MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC DIN BUCUREȘTI

R. RĂDULEȚ

Bazele teoretice ale ELECTROTEHNICII

VOL. I

ELECTROSTATICA ȘI MAGNETOSTATICA

1955
LITOGRAFIA ÎNVĂȚĂMÎNTULUI - BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
Asociaţia Ştiinţifică Studenţească

P R O G R A M U L

Celei de a V-a Sesiuni a Cercurilor Ştiinţifice Studenţeşti

1 aprilie 1956

Scanned with OKEN Scanner

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
Asociaţia Ştiinţifică Studenţească

P R O G R A M U L

lucrărilor celei de a V-a sesiuni a cercurilor ştiinţifice sudenţeşti

Secţia Stiinţe Tehnico-Economice şi Sociale - Sala E.I.9

Comisia :

1) Tov:Conf:Grigoriu H. - Preşedinte
2) Tov:Conf.Giura T. - Membru
3) Tov.Conf.Pavel D. - "
4) Tov.Bayer Emina - Secretar

1) Importanţa stocurilor de producţie neterminate. - Moise Anghel

2) Importanţa termoficării din punct de vedere economic în general şi din punct de vedere al combustibilor în special. - Brian M.

3) Calculul preţului de cost în industria energiei electrice. - Gherbozi E.
- Popescu G.

5) Mijloacele circulante în întreprinderile constructoare de maşini şi căile de mărire a vitezei lor de rotaţie. - Filipescu S.
- Berinde M.

5) Despre planificarea preţului de cost în ramura telecomunicaţiilor.

6) Procesul formării noi intelectualităţi - Zovei C.

7) Importanţa industrializării socialiste - Melega B.

8) Principiul coexistenţei paşnice

Secţia Electronică - Sala F.1.10

Comisia :

1) Tov:Prof.Cartianu Gh. - Preşedinte
2) Tov.Prof.Nicolau E. - Membru
3) Tov:Asist.Vasiliu Cr. - "
4) Tov.Dobrescu I. - Secretar

Scanned with OKEN Scanner

1) Realizarea unui vobulator - Sinmreich Beni
2) Centrala telefonică automată - Niţă Ion
Boboc Petre

3) Producerea undelor milimetrice - Radu Ionel

4) Manometru de ionizare - Senchea Elena
Ciobanu Eugen

5) Osciloografierea reprezentării vectoriale a relaţiilor de fază dintre tensiune şi curent la curentul electric. - Chihaia Gheorghe

6) Adaptor pentru recepţia semnalelor modulate în frecvenţă. - Vasiloiu C.
Zaciu Radu

7) Sistemul M.E.8 (o cale emisie recepţie) - Ploşoianu L.
Osias A.
Moraru A.
Streulo A.

8) P nou demonstrativ superheterodina - Cristian AL.

9) Aparataj electronic pentru laborator - Goldenberg R.
şi un colectiv

Secţia Energetică - Sala F.II.9

Comisia

1) Tov.prof. Dinculescu C. - Preşedinte
2) Tov.conf. Arie Arie - Membru
3) Tov.asist.Potolea E. - "
4) Tov. Gârcea N. - Secretar

1) Amplasarea centralelor electrice în R.P.R. - Bîrlibe E.
- Cristescu L.
- Cristescu V.

2) Centralele atomo-electrice - Mihăilă A.
- Mirancea T.

3) Configuraţia reţelelor urbane - Georgescu E
- Grigorescu P.

4) Efectul variaţiilor de tensiune asupra consumatorilor - Fogelman M.
- Manolescu T.
- Săulescu M.

5) Compensarea factorului de putere în întreprinderile industriale şi reţele - Bunea E.
- Neniţă E.
- Moisc I.

Secţia Electrotehnică - Sala F.II.lo

Comisia

1) Tov.prof.Steinberg Carol - Presedinte
2) Tov.asist.Ciofu Valeriu - Membru
3) Tov. asist.Timotin A. - Membru
4) Tov. Neculn Al. - Secretar

o / o

1) Studiul electrostricţiuni şi magnetostricţiuni - Tîrgovişiu I.

2) Curenţi de palier în maşinile electrice - Drăgănescu L.

3) Studiul unui motor derivaţie de curent continuu cu rotorul ahuntat - Andreescu N.

4) Infăşurări cu pas scurtat, aplicate maşinilor electrice asincrone trifazate avînd turaţia ridicată şi circuitul magnetic nesaturat. - Fotiţa A.

5) Maşină de calculat electromagnetice - Meltz G.

6) Amplificatorul magnetic cu reacţie în regim de amplificator şi de releu - Robănescu M.

7) Pierderi în electromagneti[illegible] cu întrefer mare. - Soviny R.

Secţia Tehnică Nucleară - Sala I.II.7

Comisia :

1) Tov.Prof.Auslender I. - Preşedinte
2) Tov.Prof. Mantea St. - Membru
3) Tov.Prof.Drimus I - "
4) Tov.Milo Mira - Secretar

1) Utilizarea izotopilor radioactivi pentru studiul presiunilor de vapori foarte joase. - Weiss Gh.

2) Influenţa radiaţiilor nucleare asupra substanţelor şi reacţiilor organice - Georgescu P. - Suciu Dan

3) Ciclotronul - Oprişescu D.

4) Aparate de măsură şi control pentru industria chimică bazate pe izotopi radioactivi. - Costian Dan.

Secţia Tehnologie şi Organe de maşini - Sala A.I.2

Comisia :

1) Tov.Prof.Manea Gh. - Preşedinte
2) Tov.Prof.Săveanu I. - Membru
3) Tov.Prof.Petrovici - "
4) Tov.Haiduc V. - Secretar

1) Metode pentru indicarea toleranţelor şi stabilirea abaterilor cu privire la forma suprafeţelor şi a poziţiei lor reciproce. - Bolgiu P.

2) Prelucrarea găurilor prin scîntei electrice - Danţer R. - Bercea I.

3) Metode noi pentru determinarea exactă a uzurii organelor de maşini - Hamburger L. - Solomon Z. - Horşcu M. - Eisicovici M.

./.

4) Studiul şi proiectarea unui dispozitiv pentru limitarea automată a sarcinilor la macarale. - Georgescu G.
Arană S.
Avram S.
Suster L.
Mirion E.

) Problema lubreficaţiei lagărelor radiale cu gaze - Haiduc Al.
Beiner L.
Bartoloveanu Gh
Livorschi P.
Medar I.

Secţia Chimie - Sala A.P.34

1) Comisia:
1.- Tov.Prof.Neniţescu Cornel - presedinte
2.- Tov.Prof.Bratu E. membru
3.- Tov.Prof.Solacolu Serban "
4.- Tov.Lect.Herşchovici I. "
5.- Tov. Susan A. Secretar

1.- Sinteza cardiazolului - Lupu Noe
2.- T.E.M. (medicament anticanceros) Suciu Dan
3.- Azotiperita Susan Al.
4.- Sulfatiazol Mihăilescu V.
5.- Ceramicea antiacide compacte din materii prime indigene Rusu Aristiţa
6.- Cimenturi anti acide Costin Ion
7.- Emailuri anti acide pentru fonte şi oţeluri Petre Iancu

Secţia Tehnologia chinică sala F.II.19

Comisia:
1.- Tov.Prof.Ionescu Tudor Presedinte
2.- Tov.Conf.Solomon Osias Membru
3.- Asist. Danciu E. "
4.- Tov. Gutman Puiu Secretar

1.- Dimetilbutalian Stoicescu C.
Dumitrescu L.
2.- Galvanoplastie în cupru din soluţia acidă de sulfat Nandra Gh.
Nandra L.
3.- Obţinerea manganului electrolitic Băcţică C.
Minea I.
Rottner S.
4.- Cationiţi Brînduş Liviu
5.- Polimerizarea ortoclorstirenului Tomescu M.
Pleşu Sefastian
6.- Stratificare pe bază de răşini rezolice Moraru Stela
Nanu Nuţa
7.- Obţinerea vinilcarbazolului Ionescu Conan
Corciovei M.

Secţia Metalurgie Sala F.F.1

1) Comisia :

1) Tov.Prof.Bolgiu I. - Preşedinte
2) Tov.Prof.Lupu Al. - Membru
3) Tov.Asist.Protopopescu I. - "
4) Tov.Verzan V. - Secretar

1) Studiul purificări bentanitelor - Steiberg O.

2) Elaborarea şi determinarea preprietăţilor unui aliaj de rezistenţa electrică - Stul I. Verzan V. Sofronic M. Drosu M.

3) Analiza termodiferenţiară a unor baoxite indigene şi străine - Mînturescu D. Caba M.

4) Studiul tratamentelor termice pentru aliajele industriale Al - CU - Dărhanciuc B. Mirian I. Buzdugan M.

5) Studiul incluziunilor în oţel - Pascu E. Vasile I. Diaconu C. Furnarachis C.

6) Susceptibilitate la călire a oţelului - Popovici F.

7) Stabilirea posibilităţilor de a clasifica oţelurile cu ajutorul probei de scînteie şi globulă - Nadin M.

Secţia rezistenţa materialelor şi mecanica teoretic - Sala Laboratorul de Rezist.materialor Corpul L.

Comisia :

1) Tov.Prof.Buzdugan Gh. - Preşedinte
2) Tov.Lect.Blumenfeld L. - Membru
3) Asist.Craiffeanu D. - "
4) Tov.Prof.Sarian M. - "
5) Tov.Lect.Atanasiu M. - Buriană E.
6) Buriană E. - Secretar

1) Maşina de încercat la răsucire prin şoc - Rîpeanu M.

2) Aparat pentru studiul răsucirii şi încovoierii profilelor subţiri - Hagiu St. Apostolescu D.

3) Torsiometru optic - Lascu N. Guja N.

4) Aparat pentru studiul mişcării crucei cardanice - Hagiu St.

5) Aparat pentru determinarea coeficientului de frecare în stare dinamică - Hamburger N.

./.

Secţia Maşini - Sala Al.I

Comisia :

1) Tov.Prof: Botez E.	- Preşedinte
2) Tov:Prof: Seleştoanu Al.	- Membru
3) Tov:Prof. Popescu M.	- "
4) Tov.Mitrache M.	- Secretar

1) Labirinţi - Varadi T.

2) Precizia lanţului cinematic de felitare a strungului 1A62 - Cîrţu N. Vasiliu V.

3) Determinarea puterii la mersul în gol la strungul "Iosif Ranghet - Calciani St.

4) Studiul turnării de precizie pentru sculele aşchietoare - Eremia V.

5) Studiul aerodinamic în regim supersonic al aripei triunghiulare prevăzută cu aripioarele - Săndulescu S.

6) Studiul evoluţiei avionului pe traiectorii conice cuprinse în planul vertical - Guţă Crăciun

7) Suflării supersonice intermitente cu succesiune - Palos M.

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL ÎNVĂȚĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC DIN BUCUREȘTI

R. RĂDULEȚ

307

Bazele teoretice ale ELECTROTEHNICEI

VOL. I

ELECTROSTATICA ȘI MAGNETOSTATICA

1955

LITOGRAFIA ÎNVĂȚĂMÎNTULUI - BUCUREȘTI

Scanned with OKEN Scanner

I N T R O D U C E R E

1. Problemele electrotehnicii. Bazele teoretice ale Electrotehnicii se ocupă cu studiul fenomenelor electrice şi magnetice din punctul de vedere al aplicaţiilor lor în tehnică.

La începutul dezvoltării electrotehnicii, problemele ei se dezvoltau prin tatonări: Se construiau mai multe originale sau mai multe modele; acestea se încercau şi apoi se modificau pînă se ajungea la o construcţie care era considerată bună. Cu timpul s-a recunoscut că e mai avantajos ca în locul tatonărilor de fiecare dată, să se folosească sistematic cunoştinţele despre fenomenele electrice şi magnetice şi să se proiecteze, cu ajutorul lor, construcţiile electromecanice. Astfel a apărut inginerul electrician în viaţa economică,, - şi Bazele teoretice ale Electrotehnicii, ca disciplină importantă pentru cunoştinţele lui.

Problemele de Electrotehnică sînt legate de tehnica producerii, transmisiunii şi utilizării diferitelor forme de energie. Ele se împart în două mari grupuri: Probleme de curenţi tari şi probleme de curenţi slabi. In problemele de curenţi tari, atenţiunea inginerului e concentrată mai ales asupra energiei electromagnetice, asupra producerii, transmisiunii şi consumului ei în condiţiuni tehnice şi economice cît mai avantajoase. Ele cuprind maşinile şi centrale electrice, transmisiunea şi distribuţia energiei electromagnetice, iluminatul şi tracţiunea electrică şi electrometalurgia. In problemele de curenţi slabi, atenţiunea inginerului e concentrată mai ales asupra fidelităţii reproducerii semnalelor şi a indicărilor. Ele cuprind instrumentele de măsuri electrice, electrocomunicaţiile şi anumite ramuri mai noi de activitate care se constituie abia acum în unităţi independente(telemăsuri,telecomenzi, electronică industrială etc).

Utilizarea cea mai avantajoasă a energiei electromagnetice şi reproducerea fidelă a semnalelor şi a

indicărilor se pot face numai cunoscînd legile fenomenelor electrice şi magnetice.

2.- Problemele energiei şi electrificarea. Problemele energiei au început să prezinte mare importanţă în viaţa economică odată cu folosirea largă a maşinismului în procesul de producţie a bunurilor materiale. Aceasta a pus acut problema forţei motoare pentru maşini. Tehnicienii au observat că, spre a antrena maşinile trebuie ca părţile lor, asupra cărora se exercită forţe, să se şi deplaseze mai mult sau mai puţin în direcţia şi sensul forţelor. Din frămîntarea cu problemele puse de antrenarea maşinilor s-a cristalizat conceptul de lucru mecanic. După ce acesta a fost definit prin produsul dintre forţă şi deplasare, în direcţia ei, a punctului ei material de aplicaţie, tehnica a fost pusă în faţa problemei precise de a studia condiţiunile în care se efectuiază lucru mecanic, şi deci se pot antrena maşinile.

S-a recunoscut cu timpul că, pentru ca un sistem fizic să efectuieze lucru mecanic, trebuie să se schimbe starea în care se găseşte. Pentru ca un resort, de exemplu, să efectuieze lucru mecanic, trebuie ca resortul să treacă din starea încordată într-o stare mai puţin încordată, sau într-o stare de destindere completă. Lucrul mecanic efectuat de un sistem fizic, cînd acesta trece printr-o transformare dintr-o anumită stare iniţială în alta finală, reprezintă numai una dintre acţiunile externe ale sistemului. Acţiunile fizice pot să nu consiste însă deloc, sau pot să consiste numai în parte în efectuarea de lucru mecanic. Un bloc care se răceşte, de exemplu, cedează căldură corpurilor din jur, adică are, în cursul răcirii, o acţiune externă (cedarea de căldură) diferită de efectuarea de lucru mecanic. Aburul care se destinde şi se răceşte în cilindrul unei locomotive, efectuiază, în cursul acestei transformări, lucru mecanic asupra pistonului, dar şi cedează exteriorului o anumită căldură; el are deci două feluri de acţiuni externe. Se arată experimental că fiecare dintre acţiunile externe pe care le pot avea sistemele fizice are un anumit echivalent în lucru mecanic, bine determinat.

Prin aceasta se înţelege lucrul mecanic de care ar fi nevoie

spre a produce acţiunea externă, e egal cu lucrul mecanic care s-ar efectua la suprimarea acelei acţiuni externe (dacă aceasta ar fi posibil). Exprimînd toate acţiunile externe prin echivalenţii lor în lucru mecanic se obţine o mărime comună acestor acţiuni. Suma echivalenţilor în lucrul mecanic ai tuturor acţiunilor externe care se produc cînd un sistem fizic trece, printr-o transformare, dintr-o stare iniţială în alta finală, reprezintă deci maximul lucrului mecanic, care s-ar obţine dacă toate acţiunile externe, odată produse, ar putea fi suprimate şi convertite, în acest fel în lucrul lor mecanic echivalent; mai concis această sumă reprezintă capacitatea sistemului fizic de a efectua lucru mecanic în cursul transformării considerate. Suma echivalenţilor în lucru mecanic ai tuturor acţiunilor externe considerate se numeşte, cum se ştie, energia sistemului în starea sa iniţială faţă de starea finală, şi raportată la transformarea considerată.

Experienţa arată că energia unui sistem fizic într-o anumită stare, faţă de o stare finală sau de referinţă dată, are următoarea proprietate fundamentală: Ea are aceeaşi valoare, oricare ar fi transformarea dintre cele două stări, la care o raportăm. Energia depinde deci numai de starea dată a sistemului şi de starea de referinţă (principiul de conservare a energiei). După cum stările sînt mecanice, electrice, magnetice, etc., deosebim energia de formă mecanică - electrică, magnetică, etc. Dacă starea dată coincide de exemplu, cu starea de referinţă, energia sistemului are o valoarea nulă; în adevăr, în acest caz nu e nevoie de nici o schimbare şi deci de nici o acţiune externă, spre a trece sistemul din starea de referinţă; trebuind să obţinem însă, conform principiului de conservare, aceeaşi valoare nulă a energiei, oricare ar fi transformările dintre starea dată şi starea de referinţă, urmează că nu se poate construi un sistem fizic (o maşină) care să funcţioneze ciclic şi să nu producă nici o altă schimbare decît efectuarea sau consumul de lucru mecanic. Se spune că e imposibil să se construiască un " perpe-

tuum mobile de primul ordin", sau reciprocul său. Această imposibilitate - şi formularea după care energia nu se poate creia şi nici distruge, ci numai transforma dintr-o formă în alta, au dat principiului numele de principiu de "Conservare" a energiei.

Anumite forme de energie se pot transforma fără compensare în alte forme. Există deci din punctul de vedere al convertibilităţii restricţii, forme valoroase şi forme mai puţin valoroase de energie. De asemenea există forme de energie care poate fi concentrată în volum mic, şi forme de energie care să fie răspîndită numai în volum mare.

Energia căderilor de apă şi a combustibililor unei ţări constituie un bun care nu poate fi sporit, fiindcă energia e o mărime conservativă. De aceea, fiecare ţară trebuie să-şi impună o economie bine chibzuită a energiei, avînd trecerea ei inutilă din formele valoroase în forme mai puţin valoroase sau nedorite, fără a folosi însă, în acest scop, muncă disproporţionat de multă. In ce priveşte în special forma electromagnetică a energiei, trebuie relevate anumite proprietăţi importante ale ei: Ea se înmagazinează relativ greu în volum restrîns; în schimb ea se poate transforma fără restricţii în orice altă formă; e forma de energie care se transmite cu cea mai mare uşurinţă, şi e extrem de divizibilă, De aceea dacă locurile de proveniență ale unei forme de energie nu coincid cu locurile de consum, ea trebuie transformată adesea în energie electromagnetică, şi trebuie transmisă şi dostribuită receptoarelor sub această formă.

Regiunile în care se găseşte în cantităţi mari energia căderilor de apă şi a combustibililor, adică energia cărbunilor a petrolului şi a gazelor naturale nici nu coincid în centre bogate în materii prime deosebite de combustibili, sau în centre urbane, adică, în general, în regiuni cu posibilităţi de comunicaţie uşoară. De aceea e necesar să se transmită energia din regiunile de proveniență în cele de consum; aici se distribuie diferitelor receptoare.

Scanned with OKEN Scanner

care o transformă în alte forme de energie, spre a utiliza fie noile forme, fie lucrul mecanic efectuat în cursul acestei transformări.

Energia căderilor de apă se poate transmite la mare distanţă numai sub forma electromagnetică. In acest scop energia lor se transformă, în centrele hidroelectrice cu ajutorul turbinelor hidraulice şi al maşinilor electrice generatoare antrenate de ele, în energie electromagnetică, iar aceasta se transmite printr-o linie sau reţea electrică de transmisiune de energie, în regiunea de consum, unde se distribuie receptoarelor printr-o reţea sau linie de distribuţie, spre a o utiliza sub forma care e necesară. In cazul energiei căderilor de apă, se pune deci numai problema realizării celei mai economice transmisiuni pe cale electromagnetică.

Energia cărbunilor, energia petrolului şi a gazelor naturale se pot transmite sub formă electromagnetică, adică amplasînd o uzină sau o centrală termoelectrică lîngă zăcămînt şi construind o linie sau reţea de transmisiune de energie; ea se poate transporta şi sub forma potenţială, transportînd însuşi combustibilul şi construind în regiunea de consum uzina sau centrala termoelectrică de care ar fi eventual nevoie. Transportul combustibililor cu puterea calorifică mică, adică al celor cu greutate mare pentru fiecare unitate de energie înmagazinată în ei, nu suportă nici pentru distanţe mici concurenţa transmisiunii energiei pe cale electromagnetică; transportul combustibililor cu putere calorifică mai mare o suportă pînă la o anumită distanţă. De aceea se transmite, sub formă electromagnetică, mai ales energia combustibililor inferiori. Intrebuinţarea produselor petrolifere se va restrînge, probabil, cu timpul la tracţiunea mecanică pe şosele şi la tractoare, adică aceste produse, ca şi gazele naturale, vor fi eliminate din producerea de energie electromagnetică în uzine şi centrale. Centralele se vor limita deci la utilizarea căderilor de apă şi a cărbunilor, în special a celor inferiori.

Construirea centrelor hidro şi termoelectrice producătoare de energie, construirea reţelelor electrice de transport şi distribuţie a energiei electrice, în măsura necesară pentru ca aceasta să poată fi folosită în marea producţie modernă, industrială şi agricolă, prezintă deci o importanţă de primul ordin pentru economia unei ţări.

Importanţa electrificării şi problemele tehnice puse inginerilor noştri electricieni în legătură cu electrificarea ţării, care se face actualmente pe baza experienţei cîştigate în electrificarea U.R.S.S., rezultă din următoarele pasaje ale raportului Tov.Gh.Gheorghiu- Dej privitor la planul de electrificare a ţării.

"Prin electrificarea ţării, Lenin nu înţelege construirea unor centrele electrice izolate, ci" trecerea treptată" a economiei ţării, inclusiv a agriculturii, la o bază tehnică nouă, la baza tehnică a marii producţii moderne", trecerea care e legată într-un fel sau altul, direct sau indirect, de electrificare " (Stalin, Opere vol.II pp.273-280)"

Electrificarea ţării va avea următoarele obiective:

1. Asigurarea creşterii producţiei industriilor existente şi alimentarea cu energie electrică a industriilor noi ce se vor înfiinţa în cadrul planurilor cincinale.

2. Valorificarea raţională a resurselor energetice, folosind combustibil inferior (ligniţi, turbă, deşeuri de cărbuni şi în general orice combustibil ce nu poate fi utilizat mai bine în alt domeniu) se vor economisi combustibilii superiori lichizi şi gazoşi, precum şi cărbunele brun, pentru utilizări mai raţionale, ca materie primă pentru industria chimică, transporturi, încălzit, etc.

3. Lucrările hidroenergetice vor constitui începutul folosirii cursurilor de apă pentru irigarea regiuni - lor secetoase, crearea de căi navigabile, prevenirea inunda-

ţiilor, asanări, recuperări de terenuri inundabile, etc.

4. Electrificarea treptată a căilor ferate precum şi a transporturilor în comun în centrele orăşeneşti , ceea ce va aduce o economie considerabilă a transporturilor de combustibil şi a consumului de combustibil superior.

5. Electrificarea principalelor munci agricole şi pătrunderea electricităţii la ţară, pentru ridicarea nivelului tehnic al agriculturii şi creşterea productivităţii în agricultură.

6. Ridicarea nivelului cultural şi a bunei stări a poporului pentru folosirea energiei electrice în trebuinţele casnice, dispensare, cămine culturale, precum şi instalarea de cinematografe şi staţiuni de radioficare la sate.

7. Prin crearea noilor baze energetice şi folosirea multilaterală a apelor se vor dezvolta rapid regiunile pe care regimul burghezo- moşieresc le lăsase în înapoiere.

Apele ţării noastre au o putere totală amenajabilă de 5.650.000 kW putînd produce, în anii normali 27,2 miliarde kilowatt - ore energie. Dar electrificarea ţării nu se poate baza numai pe producţia hidrocentralelor, pentru că, în cadrul folosirii multilaterale a apelor, funcţionarea hidrocentralelor - în special în anii secetoşi - va fi dictată de problema irigaţiilor şi a navigaţiei.

In ceea ce priveşte zăcăminte de combustibil inferior (lignit, turbă, cărbuni bruni inferiori, etc.) cercetările de pînă acum au stabilit existenţa unor asemenea zăcăminte la ligniţi la Doiceşti-Sotînga, Filipeştii de Pădure, Căpeni, Sarmaşag şi Valea Timişului (Banat), Cărbuneşti (Oltenia).

" In cadrul planului de lucrări de lo ani s-a fixat ca prim obiectiv instalarea şi punerea în funcţie de

Planul lucrărilor de electrificare prevede construirea unor linii de transport de energie electrică şi de legătură, în lungime totală a 3.960 km, ca şi organizarea unor staţiuni de transformare care vor asigura schimbul de energie".

Energia electromagnetică se poate produce, transmise şi utiliza în condiţiuni judicioase numai cunoscînd legile fenomenelor electrice şi magnetice.

3. Teoriile fenomenelor electrice şi magnetice

Studiul fenomenelor electrice şi magnetice e mai dificil decît studiul celorlalte fenomene fizice. In adevăr, începătorul în studiul mecanicii, în studiul căldurii sau al Opticii are o reprezentare intuitivă prealabilă mai mult sau mai puţin precisă, despre lungime şi durată, despre mişcare, despre temperatură, despre intensitatea luminii şi despre culori. Ar fi însă dificil ca, de exemplu, un orb din naştere să studieze Optica, fiindcă nu ar avea o

centrale electrice noi şi dezvoltarea unor centrale existente însumînd 2.ooo.ooo KW".

"Pentru a satisface nevoile urgente de energie din perioada 195o - 1952 ale noilor industrii şi sporurile cerute de cele existente, s-au prevăzut în plan o serie de extinderi ale centralelor existente".

"Marea centrală hidroelectrică Stejar de pe Bistriţa constituie principala lucrare a planului de electrificare. Ea va avea o putere de 2lo.ooo kW, adică a treia parte din cît avem azi cu totul în întreaga ţară şi va furniza 43o.ooo.ooo kilowattore anual"

"Centralele termoelectrice şi hidroelectrice vor înfiuri dezvoltarea tuturor regiunilor ţării.

Scanned with OKEN Scanner

cunoştinţă intuitivă prealabilă despre intensitatea luminii şi despre culori.Ar trebui ca orbul să facă studiul pe cale indirectă, urmărin anumite efecte ale luminii diferite de efectele optice,, de exemplu urmărind efectele ei chimice. Situaţia începătorului în studiul Electricităţii şi Magnetismului e asemănătoare cu situaţia orbului din naştere care începe studiul Opticei. In adevăr se arată rpin experienţe că există anumite stări fizice, numite stări electrice şi magnetice, despre care nu avem, în cazurile cele mai generale nici o reprezentare intuitivă. De aceea, studiul acestor stări se face indirect, prin intermediul forţelor şi al momentelor statice care se exercită asupra corpurilor cînd acestea se găsesc în regiunile spaţiului în care există stările electrice şi magnetice; uneori acest studiu se face şi rpin intermediul reacţiilor chimice din aceste corpuri.

Studiul fenomenelor electrice şi magnetice a trecut pînă în prezent prin cinci faze de dezvoltare.

In prima fază forţele şi momentele statice de natură electrică sau magnetică, adică acţiunile pondermotoare electrice şi magnetice care se exercită asupra corpurilor, au fost considerate ca acţiuni la distanţă. Acţiunile la distanţă sînt acţiuni pe care corpurile le exercită, în fiecare moment, din poziţiile lor actuale, asupra celorlalte corpuri. Ele sînt deci acţiuni instantanee, adică nu au nevoie de timp spre a se propaga de la corpul care le exercită pînă la corpul asupra căruia se exercită, oricît de mare ar fi distanţa dintre ele. Nici o acţiune fizică nu e însă instantanee ; de aceea teoriile acţiunilor la distanţă în Electricitate şi Magnetism nu pot reda corect toate fenomenele în care starea electrică şi magnetică variază în timp. De aceea în fazele care au urmat, aceste teorii au fost înlocuite cu teoriile acţiunii din aproape în aproape şi nu mai prezintă interes deosebit în fizică şi în tehnică.

Acţiunile din aproape în aproape sînt acţiuni care se exercită asupra corpurilor şi depind de stările pe ca-

Scanned with OKEN Scanner

re le-au avut în trecut corpurile care le cauzează. Ele sînt acţiuni retardate, adică au nevoie de un anumit timp spre a se propaga de la corpul care le cauzează pînă la corpul asupra căruia se exercită. In condiţiunile date, acest timp e cu atît mai lung, cu cît e mai mare distanţa dintre corpuri. Ca acţiuni din aproape, ele depind numai de evoluţia pe care stările fizice au avut-o într-un timp oricît de scurt, care tocmai a trecut, într-o vecinătate oricît de mică din jurul porţiunii corpurilor asupra căreia se exercită.

In cea de a doua fază de dezvoltare a studiului fenomenelor electrice şi magnetice, corpurile au fost aproximate prin medii continue. In această fază s-a dezvoltat o teorie macroscopică sau fenomenologică a fenomenelor electrice şi magnetice, analogă cu Mecanica mediilor continue şi cu Teoria fenomenologică a căldurii, adică o teorie fără vreo preocupare referitoare la structura mai fină, la scară atomică, a sistemelor fizice şi a stărilor lor. Teoria de acţiune din aproape în aproape, care s-a construit în cea de a doua fază a studiului fenomenelor electrice şi magnetice, adică Teoria clasică macroscopică a electricităţii şi magnetismului, e numită şi teoria lui Maxwell, în cazul corpurilor imobile- şi teoria lui Maxwell şi Hertz, în cazul corpurilor mobile.

In cea de a treia fază s-a construit o teorie microscopică a fenomenelor, în care se ţine seama şi de structura discontinuă a corpurilor. Anumite fenomene la scară mare şi fenomene la scară mică, atomică, dovedite experimental, sînt conforme cu legile teoriei electronilor, dar nu sînt conforme cu legile teoriei clasice macroscopice. Aceasta arată superioritatea teoriei electronilor.

Experienţa a arătat că în corpurile mobile legile stabilite în teoria clasică macroscopică şi în teoria clasică a electronilor nu sînt valabile cu destulă precizie dacă vitezele relative ale corpurilor sînt foarte mari, comparabile cu viteza de propagare a luminii în vid.

In cea de a patra fază s-a trecut deci la stabi-

lirea legilor mai generale ale fenomenelor electrice şi magnetice valabile şi în aceste condiţiuni. In acest scop a fost nevoie şi de o precizare a vechilor concepte de lungime şi timp. In urma acestei precizări, multe mărimi, ca lungime, durată şi masa, care fuseseră considerate absolute, adică având, la unităţi de măsură date, valori independente de sistemul de referinţă la care sînt raportate, au fost recunoscute drept mărimi relative; acestea sînt mărimi ale căror valori depind şi de starea cinematică a sistemului de referinţă la care sînt raportate. In această fază care nu mai e compatibilă decît cu acţiuni din apropape, s-a construit Electrodinamica relativistă, care a împiedicat şi o nouă fundare a Mecanicei şi constituie, împreună cu aceasta, Teoria einsteiniană a relativităţii restrînse. Ea prezintă interes în Electrotehnică numai prin puţine consecinţe ale ei, cum e dependenţa masei unui corp de viteza lui în raport cu sistemul de referinţă la care e raportată masa.

Experienţa a arătat că nici legile Electrodinamicii relativiste nu sînt valabile cu deabuna precizie, dacă energia cinetică şi magnetică schimbată între particulele corpurilor e extrem de mică. De aceea în faza a cincea, în care se găseşte în prezent studiul fenomenelor electrice şi magnetice, se încearcă să se stabilească legile valabile şi cînd schimburile de energie sînt extrem de mici. In această fază se constituie electrodinamica cuantică. Ea se bazează pe o nouă Mecanică, numită Mecanica cuantică. S-a constituit pînă în prezent un început de electrodinamică cuantică clasică, adică un început de teorie în care se folosesc conceptele de lungime, durata şi masa din Mecanica clasică, dar încă nu există o Electrodinamică cuantică relativistă coerentă. Ea nu prezintă actualmente interes deosebit în Electrotehnică.

In starea de azi a tehnicii, cunoştinţele din teoria macroscopică a fenomenelor electrice şi magnetice sînt practic suficiente pentru inginerii care se ocupă numai cu probleme maşini electrice şi cu probleme de distribuţie a energiei electrice. Ele nu sînt suficiente pentru inginerii

care se ocupă cu anumite probleme aparate electrice şi de transmisie a energiei la mare distanţă şi, în particular pentru inginerii care se ocupă şi cu tuburile electronice. De aceea cursul cuprinde, în primele sale părţi teoria macroscopică, iar la sfîrşit, şi cunoştinţele de teoria electronilor strict necesare inginerilor.

4. Mărimi fizice. Stările şi fenomenele fizice se descriu cu ajutorul mărimilor fizice. Lungimile de 3 m şi 5 km, duratele de 5 s şi 3 min, sau masa de 3 kg, sînt şi exemple de astfel de mărimi.

Se deosebesc mai multe specii de mărimi fizice. O astfel de specie e determinată prin procedeul ei de măsură, adică toate mărimile care se pot măsura prin acelaşi procedeu de măsură fac parte din aceiaşi specie. In ştiinţă există cîte un termen pentru fiecare specie de mărimi fizice Lungimile de exemplu, sînt mărimi fizice de aceiaşi specie; alte exemple sînt duratele, masele, forţele, vitezele, cantităţile de căldură sau temperaturile. (Termenul mărime se foloseşte uneori şi în acţiunea de specie de mărimi. Se spune, în acest sens, că timpul e o mărime etc). Lungimea de 3 m şi durata de 5 s sînt mărimi fizice de specii diferite, ele neputînd fi măsurate printr-un acelaşi procedeu de măsură. Se pot imagina uneori mai multe procedee pentru măsurarea mărimilor unei aceleiaşi specii, adică pentru mărimile care pot fi măsurate şi printr-un singur procedeu. Vom spune că acestea sînt procedee echivalente.

Procedeul de măsură a unei specii de mărimi fizice * operaţia experimentală reproductibilă, efectuată în anumite condiţiuni, cu ajutorul căreia se asociază, fiecărei mărimi fizice date a speciei respective, o mărime matematică determinată, numită valoarea sau "măsura" mărimii fizice date. Pentru ca valoarea unei mărimi fizice date să fie univoc determinată, trebuie ca rezultatul măsurării efectuate cu procedeul de măsură al speciei să fie exprimat în

raport cu o anumită unitate de măsură. Valoarea lungimii acestei catedre, de exemplu poate fi 5 dacă e exprimată în metri, 500 dacă e exprimată în centimetri etc.Reciproc: O mărime fizică dată e complet determinată numai dacă se dă afară de un procedeu de măsură al speciei ei, atît unitatea de măsură, cît şi rezultatul măsurării care se exprimă printr- anumită "valoare" sau "mărime matematică". Valorile lungimilor sau ale duratelor, de exemplu, sînt aceleaşi;valorile forţelor sau ale vitezelor (adică mărimile matematice asociate lor) sînt vectori, adică mărimi care au proprietăţi matematice ale deplasărilor rectilinii etc.Fiindcă o specie de mărimi fizice e determinată printr-un acelaşi procedeu de măsură, valorile tuturor mărimilor unei specii fizice date sînt mărimi de o aceeaşi specie matematică.Ele sînt deci toate fie scalari, fie vectori, fie tensori în sens restrîns etc. Există mărimi în specii fizice diferite cărora li se asociază prin procedeul de măsură, mărimi matematice de o aceeaşi specie matematică. Valorile lungimilor şi ale duratelor, de exemplu, sînt toate mărimi matematice din specia scalarilor, deşi lungimile şi duratele nu fac parte dintr-o aceeaşi specie de mărimi fizice.

Cu ajutorul unităţilor de măsură şi al procedeelor de măsură se asociază deci, ca rezultat al măsurărilor, fiecărei mărimi fizice date, cîte o valoare sau mărime matematică. Astfel, relaţiile dintre mărimile fizice ce se pot reprezenta prin relaţii matematice între valorile lor. Aceasta arată importanţa deosebită a măsurării în Ştiinţă şi în Tehnică.

Din punct de vedere al felului cum se introduc în Fizică, speciile de mărimi fizice se împart în două grupuri : specii de mărimi derivate şi specii de mărimi primitive.

Specii de mărimi care se definesc cu ajutorul altora, presupuse cunoscute, astfel încît valorile acestor mărimi să rezulte dinvalorile (sau din creşterea valori-

lor) mărimilor cunoscute, fără a face nici un nou apel la experienţă, se numeşte specii derivate. Vitezele, de exemplu constituie o specie de mărimi derivate, fiindcă se definesc cu ajutorul lungimilor şi al duratelor, ale căror specii se presupun cunoscute. Viteza v a unui punct material în raport cu un anumit sistem de coordonate e mărimea egală cu derivata în raport cu timpul t a razei vectoare $\bar{r}$ a punctului material faţă de originea sistemului de coordonate considerat:

$$(a) \qquad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

In general o specie de măsuri derivate se defineşte punînd valoarea mărimilor ei egală cu o anumită funcţie de valorile mărimilor folosite în definiţie, sau de creşterea valorilor acestor mărimi. In definirea speciei vitezelor de exemplu, s-au folosit creşterea razei vectoare şi ale timpului. Educaţia pe care o constituie egalitatea dintre valoarea mărimilor unei specii derivate şi funcţiunea de valorile (sau de creşterea valorilor) mărimilor altor specii prin care se defineşte specia de mărimi derivate,se numeşte ecuaţia de definiţie a speciei mărimii derivate.De exemplu ecuaţia (a) e ecuaţia de definiţie a vitezelor.

Mărimea cu ajutorul cărora se defineşte o anumită specie de mărimi derivate pot fi, la rîndul lor,mărimi derivate definite în prealabil. Dacă se definesc însă mereu noile specii de mărimi derivate cu ajutorul altor specii de mărimi, numărul de specii folosite în definiţii şi încă nedefinite cu ajutorul altora se reduce din ce în ce mai mult. Se ajunge astfel la o treaptă a cercetării, în care speciile de mărimi folosite în definiţii nu mai pot fi definite exclusiv cu ajutorul altor specii de mărimi şi fără a face apel la experienţă.

Aceste specii trebuie introduse deci direct,prin reprezentarea în concret a unităţii lor de măsură şi prin indicarea explicită a procedeului de măsură.

Ele se numesc specii de mărimi fizice primitive, spre deosebire de speciile de mă-

rimi derivate. Lungimea l, timpul t şi masa inertă m, de exemplu, sînt trei specii de mărimi primitive folosite în Mecanică (exclusiv Teoria gravitaţiei). Căldura şi temperatura sînt două specii de mărimi primitive folosite în studiul căldurii, etc.

După ce s-au introdus speciile de mărimi primitive ale unui domeniu de cercetare (de exemplu ale Mecanicii), mărimile derivate ale domeniului pot fi definite, în ultimă analiză, direct în funcţiune de mărimile primitive. Aceasta se face punînd valoarea lor egală cu o anumită funcţiune de valorile (sau de creşterile valorilor) mărimilor primitive. Mărimile derivate se introduc în ştiinţă numai pentru a uşura descrierea stărilor şi a fenomenelor. In principiu, o ramură a ştiinţei se poate constitui şi numai cu ajutorul speciilor ei de mărimi primitive.

Să presupunem că, la unităţi de măsură date, valorile mărimilor unei specii, presupusă primitivă, ar rezulta, prin simplă analiză logică, din valorile mărimilor celor lalte specii primitive. In acest caz, specia considerată nu ar fi primitivă în raport cu celelalte, ci ar fi o specie derivată. Dacă s-ar introduce direct în Mecanică, de exemplu lungimea, timpul şi viteza, prin indicarea în concret a unităţilor lor de măsură şi prin indicarea explicită a procedeelor lor de măsură, analiza logică ar arăta că valoarea vitezei punctelor materiale rezultă din variaţiile corespunzătoare ale lungimilor şi timpului care intervin în determinarea stărilor acelor puncte materiale, fără a trebui să se mai facă vreun nou apel la experienţă, că adică viteza e o mărime derivată prin lungime şi timp. Deci numărul de specii de mărimi primitive ale unui domeniu de cercetare nu poate fi mărit în mod arbitrar; numărul de specii de mărimi primitive strict necesare pentru a se putea descrie, cu ajutorul lor (şi al mărimilor derivate excluziv din ele), toate stările şi fenomenele unui domeniu, nu poate fi nici micşorat oricît, fiindcă în acest fel, nu s-ar mai putea descrie cu ajutorul lor toate fenomenele domeniului;numărul de mărimi

---

Comanda nr.77/1955 Bazele Electrotehnicii.

primitive speciale depinde de natura acelui domeniu şi constituie o caracteristică esenţială a lui.

O specie de mărimi primitive poate fi introdusă în Fizică numai dacă sînt realizate în natură condiţiunile în care se poate efectua procedeul ei de măsură. Odată cu introducerea unei specii de mărimi primitive se face deci implicit şi o aserţiune asupra naturii. Dacă această aserţiune poate fi exprimată printr-o relaţie matematică, specia respectivă de mărimi primitive are o relaţie de definiţie, ca şi mărimile derivate. Lungimea, prima specie de mărimi primitive care se introduce în Fizică, nu poate fi definită folosind valorile altor mărimi primitive, oricît s-ar face apel la experienţă, pentru motivul că alte specii de mărimi primitive încă nu sînt definite. De aceea distanţa dintre două puncte se introduce alegînd în concret unitatea de lungime (de exemplu metrul etalon dela Biroul internaţional de măsuri şi greutăţi) şi indicînd explicit procedeul de măsură, fără a folosi vreo relaţie matematică de definiţie. Pentru celelalte mărimi primitive, sau pentru perechile formate din celelalte mărimi primitive, se pot folosi însă relaţii matematice de definiţie, fiindcă s-a introdus în prealabil cel puţin lungimea şi mărimile derivate din ea, ca unghiul, aria, volumul etc.

Calitatea de mărime primitivă şi de mărime derivată, chiar şi într-o aceiaşi teorie, e relativă: Intr-o anumită formă a teoriei se pot folosi drept specii de mărimi primitive specii care, în altă formă, sînt derivate; în acest caz, tot atîtea specii primitive ale ultimei forme de introduc însă ca mărimi derivate în prima formă. Deci numărul de mărimi primitive nu e afectat de preferinţele pentru diferite forme ale unei teorii.

Numărul total de specii de mărimi primitive cu ajutorul cărora se pot descrie complet fenomenele anumitor domenii de cercetare poate scădea însă odată cu progresul Stiinţei. Odată cu acest progres se poate constata, de exemplu. că anumite specii de mări ale unui domeniu, considerate

ca primitive, sînt specii derivate din altele (primitive sau derivate) şi care pot aparţine aceluiaşi domeniu sau eventual, pot aparţine chiar altui domeniu de cercetare. De exemplu, s-a constatat că temperatura, considerată ca specie de mărimi primitive în studiul Căldurii, e o specie derivată din energia cinetică, adică dintr-o specie de mărimi, derivată, a Mecanicii; anume, s-a constatat că temperatura unei mici porţiuni a unui corp e o mărime proporţională cu energia cinetică medie, corespunzătoare mişcării desordonate a moleculelor din acea porţiune, împărţită cu numărul total de grade de libertate ale acestor molecule. Cînd se recunoaşte că o specie de mărimi, considerată pînă atunci primitivă, e derivată din alte specii, se face un progres important în Stiinţă; se înţelege că, dintre două teorii referitoare la un acelaşi grup de fenomene, e mai înaintată teoria care foloseşte un număr mai mic de specii de mărimi primitive.

Din aceste consideraţii referitoare la mărimile fizice rezultă importanţa deosebită a numărului şi felului speciilor de mărimi primitive strict necesare pentru descrierea completă a stărilor şi fenomenelor unui domeniu de cercetare, în cadrul unei anumite teorii. De aceea e necesar să se reţină că în teoria macroscopică a fenomenelor electrice şi magnetice e nevoie de opt specii de mărimi primitive, iar în teoria electronilor, numai de trei specii de astfel de mărimi. Dintre cele opt specii de mărimi primitive ale teoriei macroscopice, cinci sînt mărimi electrice, iar trei sînt mărimi magnetice. Dintre speciile de mărimi electrice, una, sarcina electrică adevărată, care se notează cu simbolul q, e o specie de mărimi scalare; celelalte patru: momentul electric ($\bar{P}$), densitatea curentului electric de conducţie ($\bar{J}$), intensitatea cîmpului electric ($\bar{E}$) şi inducţia electrică ($\bar{D}$) sînt specii de mărimi vectoriale. Sarcina electrică, densitatea curentului electric de conducţie şi momentul electric sînt specii de mărimi de stare electrică a corpurilor, iar intensitatea cîmpului electric şi

nducţia electrică sînt specii de mărimi de stare a cîmpului electric. Toate cele trei specii de mărimi primitive magneti ce sînt mărimi vectoriale. Una: momentul magnetic ($\bar{m}$), e specia de mărimi de stare magnetică a corpurilor, iar celelalte două: intensitatea cîmpului magnetic ($\bar{H}$) şi inducţia magnetică ($\bar{B}$) sînt specii de mărimi de stare a cîmpului magnetic. Dintre cele trei specii de mărimi primitive ale teoriei electronilor, una, sarcina electrică ($\mathcal{Q}e$), e o specie de mărimi scalare, singura specie de mărimi primitive de stare electromagnetică a corpurilor; celelalte două sînt specii de mărimi vectoriale şi anume intensitatea microscopică a cîmpului electric ($\bar{e}$) e singura mărime de stare a acestui cîmp, iar inducţia magnetică microscopică ($\bar{b}$) e singura mărime de stare a cîmpului magnetic.

5. Legi şi teoreme. Se constată experimental că între mărimile primitive ale domeniilor de cercetare există oricînd şi oriunde anumite relaţii care nu sînt de natură analitică (adică nu sînt, de exemplu, de natura relaţiilor care leagă mărimile derivate de mărimile primitive din relaţia lor de definiţie). Aceste relaţii de natură experimentală exprimă legile diferitelor domenii de cercetare. Propoziţiile prin care se exprimă relaţii de natură experimentală între mărimile primitive pot să nu fie toate independente, ci unele pot deriva eventual din altele. Numai cele mai generale propoziţii de natură experimentală enunţă propriu zise; propoziţiile care rezultă din aceasta prin analiză logică constituie teoreme. Există multe propoziţii care au redat, la data primei lor enunţări, cele mai generale cunoştinţe despre fenomenele domeniului de cercetare din care fac parte; cu timpul s-au descoperi propoziţii mai generale, care enunţă legi, şi din care propoziţiile iniţiale reprezintă numai consecinţe sau cazuri particulare. Astfel de propoziţii se numeau legi; azi, ele trebuie numite teoreme (dar din obişnuinţă se mai numesc uneori legi). De exemplu, cunoscuta teoremă a lui Galilei, referitoare la căderea liberă a corpurilor la suprafaţa pămîntului, reprezenta, la data descoperirii ei, cele

mai generale cunoştinţe despre mişcarea corpurilor sub acţiu nea gravităţii, şi a fost numită deci legea căderii libere a corpurilor; astăzi, ea se deduce ca simplă consecinţă din legea de mişcare a punctului material şi din legea gravitaţiei şi e corect că e numită teoremă. De asemenea, cunoscuta teoremă a lui Coulomb, din Electrostatică, reprezenta, la data descoperiri ei, cele mai generale cunoştinţe despre fe nomenele electrice şi a fost numită deci legea lui Coulomb; azi se cunosc legi ale fenomenelelor electrice şi magnetice din care aserţiunile cuprinse în acea "lege" rezultă ca sim plă teoremă; de aceea e corect să o numim teorema lui Coulamb Există însă şi anumite teoreme care sînt echivalente cu anu mite legi, pe care le-ar putea înlocui în sistemul legilor. Vom folosi adesea astfel de teoreme - şi le vom numi leme. Acum putem preciza că mărimile derivate se folosesc în Stiin ţă pentru a permite o formulare mai simplă a legilor, a lemo lor şi teoremelor.

Stăpînim deci un domeniu de cercetare, dacă în deplinim următoarele trei condiţiuni: cunoaştem mărimile primitive, principalele mărimi derivate şi legile domeniulu.; ştim să demonstrăm din legi teoremele importante ale domeniu lui; putem să deducem, cu ajutorul legilor şi al teoremelor, evoluţia viitoare prezentă sau trecută a oricărui fenomen din domeniu, în funcţiune de suficiente condiţiuni concrete date; acestea privesc starea iniţială a sistemului fizic în care se produc fenomenele şi starea acelui sistem fizic frontierele sale. Condiţiunile iniţiale şi pe frontiere, sufi ciente pentru determinarea univocă a fenomenelor, se numesc condiţiunile lor de unicitate.

Legile teoriilor macroscopice ale fenomenelor fizice se împart în două grupuri. legi generale şi legi de material. Legile de material se deosebesc de legile generale prin faptul că în expresia lor intervin şi anumiţi parametri specifici diferitelor materiale (ca vîscozitatea, coeficien ţii defrecare, mărimile de comportare elastică, conductibili

tatea termică şi căldura specifică, etc.). Legile de material sînt necesare fiindcă legile generale nu sînt destul de cuprinzătoare pentru a se deduce evoluţia fenomenelor numai cu ajutorul lor, din condiţiunile de unicitate. Teoriile microscopice au numai legi generale.

Teoria macroscopică a fenomenelor electrice şi magnetice are douăsprezece legi importante. Dintre acestea, şapte sînt legi generale: cele două legi ale legăturii dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în cîmpul electric, respectiv magnetic, legea de conservare a sarcinii electrice adevărate, legea transformării de energie în corpurile parcurse de curent de conducţie, legea inducţiei electromagnetice, legea circuitului magnetic şi legea energiei electromagnetice. Cele cinci legi de material importante sînt următoarele: legea polarizaţiei electrice, legea polarizaţiei magnetice, legea electrolizei, legea conducţiei electrice şi legea cîmpurilor electrice imprimate. Alte legi de material, ca legea lucrului mecanic de extracţie a fluidului electronic din conductoare în parte cadrul teoriei macroscopice a fenomenelor electrice şi magnetice, In fond,se mai folosesc două legi generale; conform acestora, putem anula, prin mijloace adecvate, inducţiile electrică şi magnetică din orice domeniu din spaţiu.

Expunerea legilor sub forma lor generală reclamă multă atenţiune şi încordare din partea celor care o urmăresc pentru prima oară, înainte de a se fi familiarizat în deajuns cu cîmpuri electrice şi magnetice particulare.De aceia vom adopta o expunere în care anumite legi, mai simple au forma lor generală, iar altele, mai complexe, sînt folosite întîi sub anumite forme particulare, care rezultă ca simple teoreme din una sau mai multe forme generale ale legilor. Vom expune aceste teoreme, ca şi lemele, drept propoziţii bazate pe experienţă - şi le vom demonstra abia mai tîrziu. Pentru ca deosebirea dintre aceste două feluri de expunere să fie marcată şi formal, capitolele care cuprind formele generale (de exemplu: Legea inducţiei electromagnetice)

Scanned with OKEN Scanner

au titlul de legi, capitolele care cuprind propoziţii echivalente cu anumite legi au titlul de leme (şi se demonstrează mai tîrziu), iar capitolele care cuprind forme particulare ale legilor sau lemelor, valabile numai în anumite regimuri, au titlul de teoreme (de ex.Lema fluxului electric sau Teorema potenţialului electric staţionar). Se înţelege că legile sînt valabile independent de capitolul particular al Electrotehnicii, în care sînt enunţate. De exemplu, legea polarizaţiei electrice, enunţată în Electrostatică, e valabilă în orice cîmp electric. Dar teorema potenţialului electric staţionar, enunţată în Electrocinetică, e valabilă numai în cîmpurile electrice a căror intensitate nu variază în timp.

6. Conţinutul cursului. Multe mărimi care se folosesc în studiul fenomenelor electrice şi magnetice sînt vectori. Pentru a nu întrerupe mereu studiul fenomenelor cu anumite consideraţii matematice, cunoştinţele de calcul vectorial de care e nevoie pentru a urmări problemele de Electrotehnică au fost strînse împreună într-o anexă a primului volum al cursului. In această anexă s-au adaptat nevoilor Electrotehnicii anumite probleme de calcul vectorial, care fac parte din Matematicile speciale. E adevărat că nu ajunge fiecare inginer electrician să contribuie prin cercetări personale la progresul Electrotehnicii prin lucrări în care e nevoie de calcul vectorial, dar fiecare trebuie să poată înţelege lucrurile de specialitate electrotehnică ale specialiştilor, care i-ar putea fi utile; aceasta reclamă cunoştinţele de calcul vectorial care se găsesc în anexa matematică.

Partea întîi a cursului cuprinde Electrostatica, adică studiul stărilor electrice care nu sînt însoţite de dezvoltare de căldură în conductoarele electrice, studiul forţelor şi al momentelor care se exercită în aceste condiţiuni asupra corpurilor, şi studiul mărimilor electrice utilizate în Electrostatică.

Partea a doua cuprinde Magnetostatica, adică studiul stărilor magnetice staţionare care nu însoţesc cu-

renţii electrici de conducţie din conductoarele electrice, şi studiul mărimilor magnetice utilizate în Magnetostatică. Aceste două părţi formează, împreună cu anexa matematică, primul volum al cursului.

Partea a treia cuprinde Electrocinetica, adică studiul stărilor electrice din conductoarele parcurse de curenţi electrici şi, în special, teoria curentului continuu. Partea a patra cuprinde Electrodinamica, adică studiul celor mai generale fenomene electrice şi magnetice, şi al aplicaţiilor lor tipice. Legile Electrostaticii Magnetostaticii şi Electrocineticii, reprezintă, cu anumite excepţii, numai cazuri particulare ale acestor legi. Părţile a treia şi a patra formează, împreună cu o anexă, cel de al doilea volum al cursului.

Partea a cincia cuprinde studiul reţelelor electrice de curent alternativ; partea a şasea, transformatoarele electrice, iar partea a şaptea, maşinile electrice. Părţile a cincia, a şasea şi a şaptea formează al treilea volum al cursului.

Partea a opta cuprinde liniile electrice lungi; partea a noua cuprinde studiul curenţilor alternativi în conductoare masive, iar partea a zecea cuprinde undele electromagnetice. In partea a unsprezecea se adîncesc bazele teoriei generale a fenomenelor electrice şi magnetice, în cadrul teoriei electronilor. Bazele acestei teorii se expun numai în măsura în care au nevoie de ele inginerii electricieni. Partea a douăsprezecea cuprinde teoria electronică a proprietăţilor electrice şi magnetice ale materialelor electrotehnice. Aceste ultime cinci părţi formează al patrulea volum al cursului. Cursul se încheie cu un capitol privitor la contribuţia oamenilor de ştiinţă romîni şi cu un capitol privitor la contribuţia oamenilor de ştiinţă sovietici la progresul electrotehnicii.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA ÎNTÎI

ELECTROSTATICA

1. Sarcina electrică adevărată, intensitatea cîmpului electric în vid și permitivitatea vidului

1.1. Electrizarea în cîmpul electric. Dacă se freacă o vergea de sticlă cu o bucată de mătase și apoi se separă cele două corpuri, se exercită între ele și asupra corpurilor din apropiere forțe și eventual momente care nu se exercitau înainte. Se spune că sistemul pe care-l formează cele două corpuri s-a electrizat; se mai spune că există un cîmp electric în regiunea din spațiu susceptibilă de a se exercita în ea aceste forțe și momente, asupra corpurilor electrizate și neelectrizate.

Frecarea nu e singurul mijloc prin care se pot electriza sistemele de corpuri. Există substanțe care se pot electriza prin contact intim, prin contactul cu corpuri electrizate, prin curgere, prin întindere sau prin compresiune, prin încălzire, prin iradierea cu lumină ultravioletă sau cu raze X, prin reacții chimice, etc. Prin aceste mijloace, substanțele pot fi aduse deci în starea fizică în care se comportă ca și corpurile electrizate prin frecare, din punctul de vedere al forțelor și momentelor pe care le exercită, respectiv care se exercită asupra lor. Prin mijloace adecvate, orice corp poate fi electrizat, oricare ar fi starea lui de agregare.

Prin experiență se arată că în jurul corpurilor electrizate există totdeauna cîmp electric. Acele corpuri produc totdeauna cîmp electric. Prin experiență se mai arată că prezența corpurilor electrizate nu e o condițiune necesară pentru prezența, într-o anumită regiune, a cîmpului electric. Deci un cîmp electric poate fi produs și prin alte mijloace decît cu ajutorul corpurilor electrizate.

1.2. Conductoare, semiconductoare și dielectrici. Prin experiență se arată că un corp electrizat și situat la oarecare distanță de un alt corp electrizat, e

fie atras, fie respins, fie respins de acesa, şi că orice corp neelectrizat e atras de orice corp electrizat prin fre care. Anumite corpuri neelectrizate sînt atrase şi după ce au ajuns în contact cu corpurile electrizate prin frecare; ele se numesc izolanţi sau dielectrici. Alte corpuri neelectrizate sînt respinse după ce au ajuns în contact cu corpurile electrizate prin Frecare; ele se numesc conductoare electrice. Metalele, cărbunele, anumite substanţe compuse şi soluţii de săruri anorganice, de acizi şi de baze, sînt conductoare. Aerul uscat, uleiurile, mătasea, marmura, mica, cuarţul, porţelanul, sticla, ebonita, parafina, răşinele artificiale, hîrtia uscată, sînt izolante. - Nu există izolanţi perfecţi. Orice corp neelectrizat, atras şi ajuns în contact cu un corp electrizat, e respins după un timp mai scurt sau mai lung. Pentru izolanţii buni, acest timp poate fi de ordinul zilelor; pentru conductoare, el e de ordinul unor fracţiuni mici dintr-o secundă, iar pentru corpurile intermediare între izolanţi şi conductoare, numite semiconductoare, acest timp e de ordinul secundelor.

1.3. <u>Corpurile de probă metalice.</u> Cîmpul electric se explorează macroscopic măsurînd, în fiecare loc din cîmp, valoarea absolută, direcţia şi sensul forţelor care se exercită asupra unor corpuri de probă solide conductoare(metalice sau metalizate), electrizate. Pentru ca rezultatele obţinute în diferitele puncte, cu un corp de probă dat, să fie comparabilă între ele; trebuie ca starea de electrizare a corpului să fie invariabilă, adică trebuie să fie astfel încît, în condiţiuni exterioare egale, să se exercite asupra lui forţe de natură electrică egale. Prin experienţă se arată că, pentru ca starea de electrizare a unui mic conductor să nu varieze, trebuie ca starea lui fizico-chimică să nu se schimbe, şi că trebuie ca el să fie înconjurat din toate părţile fie de dielectrici şi vid, fie numai de vid, adică trebuie ca acel conductor să fie izolat din punctul de vedere electric. Pentru ca starea de electrizare a unui corp de probă conductor să nu varieze, el poate fi deci suspendat, de

exemplu, cu ajutorul unor fire de mătase.Starea corpurilor de probă mai trebuie aleasă astfel, încît prezenţa lor să nu modifice sensibil starea electrică iniţială, care urmează să fie studiată. Prin experienţă se arată că se poate realiza o astfel de stare şi că un corp e cu atît mai apropiat de ea, cu cît sînt mai mici forţele care se exercită, în condiţiuni date, asupra lui. Corpurile de probă trebuie să fie practic punctuale, adică destul de mici, spre a nu prezenta neuniformităţi, şi spre a permite să se măsoare rezultanta forţelor de natură electrică, dintr-o regiune cît mai mică.

Pentru a putea preciza condiţiunile de explorare a cîmpului electric, trebuie stabilit mai întîi ce se înţelege printr-un anumit punct din cîmp şi prin regăsirea, după un anumit timp, a acelui punct. Un anumit punct dintr-un corp poate fi indentificat independent de sistemele geometrice de referinţă fiindcă, în principiu, locurile din corpuri pot fi recunoscute oricînd, independent de aceste sisteme. Un anumit punct din afara corpurilor, adică din "vid", nu ar putea fi definit însă decît în raport cu un anumit sistem geometric de referinţă. Acesta este presupusul legat, într-un anumit fel, de corpuri.

In teoria clasică macroscopică a electricităţii şi magnetismului "vidul" se admite numai ca stare limită, către care se tinde cînd densitatea de masă a corpurilor tinde către zero. Suprafeţele corpurilor sînt considerate numai ca suprafeţe în exteriorul cărora densitatea de masă a corpurilor tinde extrem de repede către zero.Corpurile sînt presupuse deci macroscopic continue, şi anume astfel, încît, în principiu, nu pot prezenta nicio întrerupere a continuităţii repartiţiei lor în spaţiu. Indiferent dacă corpurile sînt dense, sau sînt atît de rare încît se găsesc în anumite regiuni numai urme din ele, corpurile sînt folosite pretutindeni pentru identificarea punctelor din cîmp, independent de orice sistem geometric de referinţă.Printr-un "acelaşi" punct în spaţiu se înţelege deci un"acelaşi" punct dintr-un corp.

Se presupune că micile conductoare de probă electrizate, care se folosesc pentru exploatarea cîmpului electric situate în vid şi nu prea aproape de părţile electrizate ale corpurilor care au densitatea de masă apreciabilă, spre a nu modifica local starea lor de electrizare.

1.4. Pendulul electric. Prin experienţă se arată că forţa de natură electrică $\bar{F}_{qv}$ care se exercită în cîmpul electric din vidasupra unui mic corp metalic sau metalizat, electrizat, depinde. ca valoare absolută, direcţie şi sens, atît de starea de electrizare a corpului, cît şi de poziţia lui instantanee în cîmp. Starea de electrizare a corpurilor de probă se indică prin simbolul literal η (care nu reprezintă deci un număr), iar poziţia lor instantanee în cîmp se indică prin raza lor vectoare instantanee $\bar{r}$ în raport cu originea sistemului de referinţă faţă de care se descriu fenomenele. Deci:

$$(a)\quad \bar{F}_{qv} = \bar{F}_{qv}(\eta, \bar{r})$$

Prin exploatarea sistematică a cîmpului electric se determină experimental Felul în care Forţa $\bar{F}_{qv}$ depinde de starea de electrizare a conductorului de probă şi de raza vectoare $\bar{r}$ a poziţiei conductorului în cîmp.

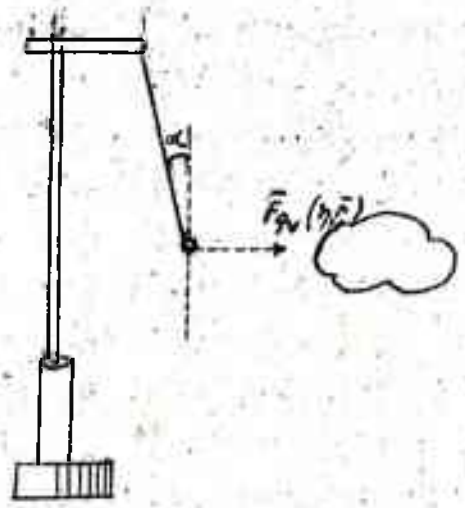


Fig.1
Pendul electric.

In principiu, această forţă poate fi măsurată prin oricare dintre procedeele folosite în Mecanică. In experienţele curente se folosesc adesea, în acest scop, două instrumente simple: Pendulul electric şi balanţa electrică de tensiune.

Pendulul electric e format dintr-un corp de probă compus dintr-o bobiţă de măduvă de sec

îmbrăcată cu foiţă de aur, suspendată de un fir de mătase destul de lung şi subţire, şi al cărui capăt de sus e prins de un suport (Fig.1.). Dacă se atinge un corp, de exemplu vergeaua de sticlă electrizată, din prima experienţă, de supra faţa de metal a bobiţei de măduvă de soc, bobiţa se electrizează şi poate fi folosită pentru explorarea cîmpului electric. Dacă F_h e forţa orizontală care se exercită asupra corpului de probă al pendulului, ea e determinată din următoarele condiţiuni: E conţinută în planul determinat de fir şi de verticală, e orizontală iar rezultanta dintre ea şi greutatea(cunoscută) $\overline{G} = m\overline{g}$ a corpului de probă (de masă m) are direcţia firului şi e dirijată în jos, adică

(6) $F_h = G \operatorname{tg} \alpha$

Pendulul electric nu poate fi folosit pentru măsurări de precizie.

1.5*. Balanţa electrică de torsiune. Un instrument de măsură de precizie mai mare e balanţa electrică de torsiune. Aceasta e compus dintr-un fir de torsiune suspendat de un buton care poate fi rotit, pentru a produce o răsucire a firului de torsiune, cînd aceasta e necesară, firul poartă la capătul său de jos o mică greutate de metal care susţine pîrghia izolantă a balanţei, echipată la un capăt cu o bobiţă de măduvă de soc îmbrăcată în foiţă de metal, iar la cealaltă extremitate, cu o contragreutate (fig.2). Firul de torsiune e suspendat în axa de simetrie a unui cilindru gol, lung şi strîmt, pe care se reazimă deasupra butonul de torsiune, iar cilindrul gol e coaxial cu o carcasă cilindrică transparentă, largă şi mai scundă, şi e situat imediat deasupra ei, astfel încît pîrghia pendulului de torsiune să se găsească în carcasă aproximativ la jumătatea înălţimii ei. Un ac indicator fixat de butonul de torsiune permite să se citească, pe o scară gradată, cilindrică, orizontală, unghiurile cu care se roteşte butonul de torsiune, o a doua scară gradată orizontală, situată la mijlocul înălţimei carcasei transparente, pe peretele ei lateral, permite să se citească unghiurile cu care se roteşte pîrghia balanţei. In execuţia curentă, carcasa balanţei are la partea de sus un orificiu prin care se poate intro

duce, în carcasă corpul electrizat al cărui cîmp electric urmează să fie explorat. In principiu balanţa de torsiune poate fi folosită însă şi pentru explorarea cîmpurilor electrice produse din exteriorul carcasei. Fie, de exemplu, o balanţă de torsiune în afara cărui cîmp electric şi cu butonul de torsiune rotit astfel, încît pîrghia balanţei să fie în echilibru stabil în poziţia în care urmează să se măsoare, fără ca firul de torsiune să fie răsucit. Măsurarea statică a forţei în cîmpul electrostatic se poate efectua dacă bobiţa de sqc electrizată, poziţia balanţei şi cîmpul electric sînt astfel, încît forţa $\bar{F}_{qv}$ să fie orizontală şi perpendiculară pe pîrghia balanţei cînd aceasta e în echilibru în cîmpul electric, în vechea ei poziţie. In adevăr, fie α unghiul cu care a trebuit să fie rotit butonul superior al balanţei pentru a restabili echilibrul în noile condiţiuni. In acest caz, momentul $F_{qv}l$ al forţei în raport cu axa firului e egal şi de sens contrar cu cuplul de torsiune antagonist - $k\alpha$ pe care-l exercită firul asupra pîrghiei balanţei, fiindcă extremitatea inferioară a firului e rotită cu unghiul α faţă de extremitatea lui superioară. Deci:

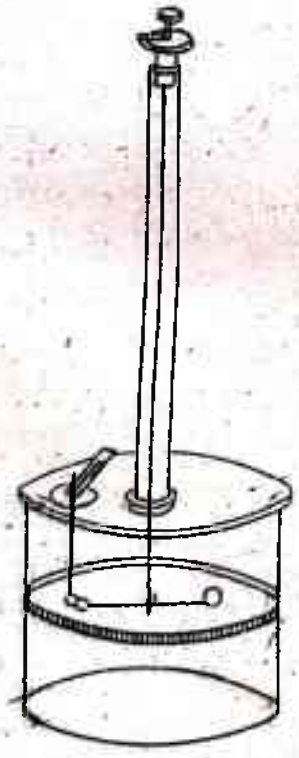


Fig. 2
Balanţă electrică de torsiune.

$$(c)\quad F_{qv} = \frac{k\alpha}{l}$$

ceea ce permite să se determine static forţa $\bar{F}_{qv}$.

Forţa se determină mai precis măsurînd cu un cronometru perioadele de oscilaţie a braţului balanţei în cîmpul electric. Rotind foarte puţin pîrghia din poziţia ei de echilibru cu unghiul mic α într-un cîmp care are în acel punct direcţia braţului ei, pentru ca forţa $\bar{F}_{qv}$, să nu varieze sensibil, şi lăsînd apoi pîrghia

liberă, ea va oscila în jurul poziţiei de echilibru, cu o frecvenţă care depinde de lungimea braţului pîrghiei, de momentul de inerţie I al pîrghiei în raport cu axa firului de torsiune, de momentul forţei $\bar{F}qv$ în raport cu axa firului de torsiune, şi de cuplul de torsiune antagonist $-k\alpha$ pe care firul răsucit cu unghiul α îl exercită asupra pîrghiei. Ecuaţia diferenţială a mişcării pîrghiei exprimă că produsul momentului ei de inerţie prin acceleraţia ei unghiulară, adică prin derivata a doua, în raport cu timpul t, a unghiului α, e egal cu momentul rezultant care se exercită asupra pîrghiei. Momentul componentei orizontale F_h a forţei $\bar{F}qv$ este $-F_h \ell \sin\alpha$ dacă ℓ e braţul pîrghiei. Momentul rezultant este deci $F_h \ell \sin\alpha - k\alpha$ dacă se neglijează momentul de amortizare al frecărilor. La unghiul α mic, $\sin\alpha$ poate fi aproximat prin α adică momentul rezultant se poate aproxima prin $-(Fl + k)\alpha$ Se obţine deci următoarea aproximaţie a ecuaţiei diferenţiale a mişcării:

$$(d)\quad I \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -(F_h \ell + K)\alpha.$$

Această ecuaţie diferenţială se integrează încercînd o integrală de forma

$$(e)\quad \alpha = A \sin(2\pi F t + \delta),$$

unde A e amplitudinea unghiului α iar f e frecvenţa de oscilaţie. Această frecvenţă se determină introducînd integrala în ecuaţie. Se obţine astfel:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -(2\pi f)^2 A I \sin(2\pi f t + \delta) = -(F\ell + K)\alpha =$$
$$= -(F\ell + K) A \sin(2\pi f t + \delta),$$

de unde rezultă

$$(f)\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F_h \ell + K}{I}}$$

Dacă se măsoară perioada de oscilaţie f şi se cunosc mărimile k şi I ale balanţei, se poate calcula deci

Forţa F_h din relaţia (f). Dacă nu se cunosc mărimile k şi I, ele se determină din două măsurări suplimentare, care se fac cum urmează: Dacă pîrghia balanţei de torsiune oscilează în afara cîmpului electric, $F_h = 0$, şi frecvenţa sa proprie are expresiunea:

$$(f') \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{I}},$$

care se poate măsura. Dacă se adaugă apoi pîrghiei un corp de moment de inerţie cunoscut I_1, frecvenţa sa proprie, în afara cîmpului electric, devine:

$$(f'') \qquad f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{I+I_1}}$$

care se poate măsura.

Din relaţiile (f') şi (f'') se pot calcula mărimile I şi k în funcţiunile de momentul de inerţie I_1 şi de frecvenţele măsurate f_0 şi f_1:

$$I = I_1 \frac{f_1^2}{f_0^2 - f_1^2}; \qquad K = 4\pi^2 f_0^2 I = 4\pi^2 \frac{f_0^2 \cdot f_1^2}{f_0^2 - f_1^2} I_1;$$

Din relaţia (f) rezultă deci componenţa orizontală F_h şi Forţei în cîmpul electric, în funcţiune de mărimile I_1, f_0, f_1 şi de frecvanţa f, măsurată în cîmpul electric:

$$(g) \qquad F_h = 4\pi^2 f_1^2 \frac{f^2 - f_0^2}{f_0^2 - f_1^2} \cdot \frac{I_1}{l}.$$

Dacă poziţia balanţei şi cîmpul electric sînt astfel, încît Forţa $\overline{F}qv$ să fie orizontală, aceasta se poate determina deci cu ajutorul balanţei electrice de torsiune.

1.6. <u>Explorarea cîmpului electric în vid.</u> Experienţa arată că forţele care se exercită în cîmpul electric asupra micilor corpuri conductoare, electrizate, satisfac următoarele relaţii importante:

a) Dacă se aduc succesiv, în vid, în acelaşi punct dintr-un cîmp electric invariabil, mici conductoare electrizate în condiţiuni inegale şi izolate, direcţia forţe

lor care se exercită asupra lor e aceeaşi, adică nu depinde

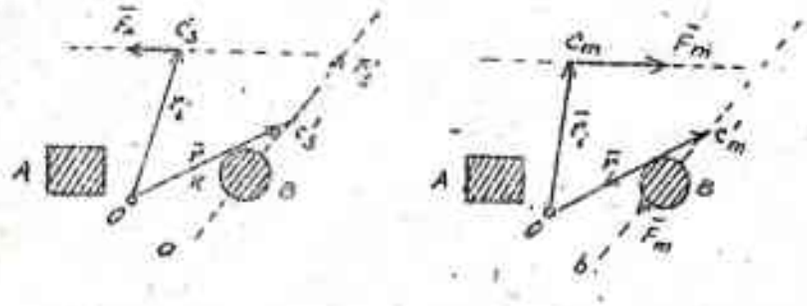


Fig.3

Forţa exercitată în aceleaşi puncte ale unui cîmp electric, asupra unor corpuri de probă electrizate prin contactul cu sticla(C_s, Fig.3 a) respectiv prin contactul cu mătasea frecată cu sticlă(C_m Fig.3 b)
A şi B sînt corpuri electrizate.

de starea de electrizare a micilor conductoare şi nici de orientarea lor, dar această direcţie variază odată cu variarea poziţiei lor în cîmp. Dacă se foloseşte un mic conductor C_s electrizat prin contactul cu vergeaua de sticlă din prima experienţă forţa are, în fiecare poziţie a lui, un anumit sens pe direcţie (v. Fig.3 a); ea are în fiecare poziţie sensul contrar dacă se foloseşte un mic conductor C_m electrizat prin contactul cu mătasea (v. Fig.3 b). Direcţia forţei $\bar{F}_{qv}$ ($\nabla \bar{r}$) depinde deci numai de poziţia corpului în cîmpul electric invariabil şi nu depinde de starea de electrizare a corpului, dar în fiecare punct sensul ei pe direcţia determinată de cîmp depinde numai de starea de electrizare a corpului şi nu depinde de poziţia lui în cîmp. Rezultă că există două feluri de electrizare prin contact a corpurilor, opuse unul altuia din punctul de vedere al sensului forţelor: electrizarea obţinută prin contactul cu vergeaua de sticlă frecată cu mătasă , şi cea obţinută prin contactul cu acea mătasă. Fie deci $\bar{u}(\bar{r})$ vectorii unitate, adică versorii nu ai orientărilor razelor vectoare $\bar{r}$, ci ai forţelor $\bar{F}_q$

$(\mathcal{V}, \bar{r})$ care se exercită, în punctele de raze vectoare $\bar{r}$ din cîmpul electric, asupra corpurilor electrizate prin contactul cu vergeaua de sticlă din prima experienţă. In aceste condiţiuni urmează :

$$(h) \qquad \bar{F}_{qv}(\mathcal{V},\bar{r}) = \bar{u}(\bar{r}).F_{rqv}(\mathcal{V}, \bar{r})$$

In această relaţie $F_{rqv}(\mathcal{V},\bar{r})$ e valoarea relativă a forţei $\bar{F}_{qv}(\mathcal{V},\bar{r})$ în raport cu versorul $\bar{u}(\bar{r})$ valoare al cărui modul e egal cu valoarea absolută a forţei. Dacă această valoare relativă e contată pozitivă pentru toate corpurile electrizate prin contactul cu vergeaua de sticlă, şi negativă pentru cele electrizate prin contactul cu mătasea din prima experienţă rezultă că $\bar{u}(\bar{r})$ depinde, într-un cîmp electric dat numai de $\bar{r}$.

Oricare ar fi starea de electrizare a unor mici corpuri de probă, raportul dintre valorile absolute ale forţelor $\bar{F}_{qv}(\mathcal{V}, \bar{r}_k)$ şi $\bar{F}_{qv}(\mathcal{V}, \bar{r}_i)$ care se exercită asupra fiecăruia dintre ele, în vid, în două puncte oarecare din cîmpul electric (fig.3), de raze vectoare $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_k$, e acelaşi, adică nu depinde de starea de electrizare a conductorului sau de orientarea lui, ci numai de cele două raze vectoare ale punctelor :

$$(i) \qquad \frac{F_{qv}(\mathcal{V}, \bar{r}_i)}{F_{qv}(\mathcal{V}, \bar{r}_k)} = \varphi(\bar{r}_i, \bar{r}_k)$$

Funcţiunea $\varphi(\bar{r}_i, \bar{r}_k)$ depinzînd numai de variabilele $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_k$ şi fiind egală cu cîtul a două funcţiuni, dintre care una nu depinde de $\bar{r}_k$, iar cealaltă nu depinde de $\bar{r}_i$, trebuie să fie egală cu cîtul unei funcţiuni pozitive de $\bar{r}_i$ printr-o aceeaşi funcţiune de $\bar{r}_k$ (pentru ca raportul să fie egal cu unitatea cînd $\bar{r}_i = \bar{r}_k$) :

$$(i') \qquad \frac{F_{qv}(\mathcal{V}, \bar{r}_i)}{F_{qv}(\mathcal{V}, \bar{r}_k)} = \varphi(\bar{r}_i, \bar{r}_k) = \frac{E_v(\bar{r}_i)}{E_v(\bar{r}_k)}$$

Valoarea relativă $F_{rqv}(\mathcal{V},\bar{r})$ trebuie să conţină deci, drept factor scalar, o funcţiune $q(\mathcal{V})$, care depinde numai de starea de electrizare , adică trebuie să fie de forma :

(i") $$F_{rqv}(\mathcal{V},\bar{r}) = q(\mathcal{V}).E_v(\bar{r})$$

In adevăr, în acest caz, mărimea $q(\mathcal{V})$, care depinde numai de starea de electrizare a corpului de probă, se reduce în cîtul valorilor absolute $F_{qv}(\mathcal{V},\bar{r}_i)$ şi $F_{qv}(\mathcal{V},\bar{r}_k)$ pe care le are funcţiunea $F_{qv}(\mathcal{V},\bar{r})$ în punctele de raze vectoare $\bar{r}$ şi $\bar{r}_k$ fiindcă în aceste valori absolute $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_k$ sînt oarecare. Mai jos vom folosi notaţia :

)j) $$\bar{E}_v(\bar{r}) \equiv \bar{u}(\bar{r}).\ E_v(r)$$

Introducînd în (h) expresia (i") a valorii relative a forţei se obţine următoarea relaţie fundamentală :

(k) $$\bar{F}_{qv}(\mathcal{V},\bar{r}) = q(\mathcal{V}).\bar{E}_v(\bar{r})$$

Pentru a putea explora cîmpul electric prin experienţele indicate mai sus, trebuie ca mărimea vectorială $\bar{E}_v$, care depinde numai de poziţia în cîmp a corpului de probă, să fie invariabilă sau să varieze destul de lent în timp. Relaţia (k) se consideră însă valabilă în toate cîmpurile electrice, oricît de repede ar varia mărimea $\bar{E}_v$, fiindcă experienţa confirmă consecinţele acestei ipoteze.

Astfel e valabilă relaţia experimentală pe care o indicăm mai jos, referitoare la forţa de natură electrică, în orice cîmp electric.

1.7. <u>Sarcina electrică adevărată şi intensitatea cîmpului electric în vid</u>. - Forţa $\bar{F}_{qv}$, care se exercită într-un cîmp electric, în vid, asupra unui mic corp conductor electrizat, e egală, în fiecare moment, cu produsul unei mărimi de stare electrică a corpului, care e un scalar pozitiv sau negativ q, care depinde numai de starea de electrizare a corpului, dar nu depinde de poziţia şi de orientarea lui în cîmp, şi se numeşte sarcina lui electrică adevărată, printr-o mărime vectorială de stare a cîmpului în vid $\bar{E}_v$, care depinde numai de poziţia micului corp în cîmp şi se numeşte tatea cîmpului electric în vid. sau vectorul

cîmp electric în vid(sau şi"cîmpul electric" în vid),în punctul respectiv:

$$(1) \quad \boxed{\vec{F}_{qv} = q \cdot \vec{E}_v}$$

Sarcina electrică adevărată a conductoarelor electrizate prin contactul cu vergeaua de sticlă din prima experienţă e contată deci pozitivă,iar sarcina electrică adevărată a conductoarelor electrizate prin contactul cu mătasea e contată negativă. Astfel,cele două feluri de electrizare prin contact a corpurilor sînt caracterizate prin sarcini electrice adevărate de nume contrare.Din relaţia experimentală(1), care reprezintă o lege generală a naturii, mai rezultă că două mici corpuri au sarcini electrice adevărate egale,dacă se exercită asupra lor,în vid, aceeaşi forţă, într-un punct dat al unui cîmp electric invariabil. Mai rezultă din acea lege că intensitatea cîmpului electric în vid,într-un punct dat e constantă, adică nu variază în timp,dacă se exercită în acel punct o forţă invariabilă (constantă) asupra unui mic corp izolat,încărcat cu o sarcină electrică adevărată.Rezultă de asemenea, că un mic corp de probă are o stare de electrizare prin contact invariabilă, dacă sarcina lui electrică adevărată, numită mai simplu sarcina lui electrică sau şi numai sarcina lui, e invariabilă.Sarcina corpurilor izolate e deci invariabilă.

Pentru a se constata numele sarcinii electrice adevărate dintr-un anumit loc al unui corp,se adûce un mic corp de probă metalic neutru în contact cu acest loc al corpului, şi se măsoară apoi sarcina micului corp de probă metalic.Aceasta are acelaşi nume ca şi sarcina din locul în care a fost stabilit contactul cu corpul considerat.

Sarcina electrică adevărată şi intensitatea cîmpului electric în vid, fiind mărimi introduse direct în studiul Electricităţii şi Magnetismului, trebuie alese în concret unităţile lor de măsură şi trebuie indicat explicit, pe baza legii(1), procedeul prin care se măsoară.

Drept unitate de măsură a sarcinii electrice s-ar putea alege, în principiu sarcina adevărată pozitivă a unui conductor etalon, electrizat într-un anumit fel şi izolat,

cum s-a ales drept unitate de măsură a lungimii distanţa dintre cele două repere ale barei de platină iridiată care reprezintă metrul etalon al Biroului Internaţional de măsuri şi greutăţi. Practic nu se poate realiza în acest fel un corp a cărui sarcină adevărată să nu varieze, fiindcă nu există izolanţi perfecţi. De aceea unitatea de măsură a sarcinii se stabileşte prin mijloacele mai complicate, care se indică mai tîrziu. Unitatea de măsură a intensităţii cîmpului electric în vid nu poate fi reprezentată nici în principiu printr-un etalon, cum nu poate fi reprezentată printr-un etalon nici unitatea de timp. De aceea unitatea de măsură a intensităţii cîmpului electric în vid se cuplează cu unitatea de măsură a sarcinii, astfel încît să fie satisfăcută legea (1).

Presupunem deci că dispunem de un mic conductor încărcat cu unitatea de măsură a sarcinii şi indicăm explicit procedeul de măsurare a mărimilor q şi $\bar{E}_v$.

Dacă se introduc succesiv, în acelaşi punct dintr-un cîmp electric invariabil, în vid două mici conductoare electrizate, dintre care unul are unitate de măsură a sarcinii pozitive şi cel de al doilea are o altă sarcină, şi se măsoară forţele $\bar{F}_{1v}$ şi $\bar{F}_{qv}$ care se exercită asupra lor, cîtul valorilor relative ale celor două forţe în raport cu un versor $\bar{u}$ paralel cu ele este:

$$\frac{\bar{u}\,\bar{F}_{qv}}{\bar{u}\,\bar{F}_{1v}} = \frac{q\,E_v}{1\,.\,E_v} = \frac{q}{1}$$

adică e numeric egal cu sarcina electrică adevărată q a ultimului corp. Astfel se poate măsura sarcina corpurilor care sînt destul de mici pentru ca să poată fi considerate punctuale.

Sarcina repartizată în corpuri de dimensiuni mai mari se măsoară prin procedee care se indică mai tîrziu.

In figuri se desenează adesea semne plus(+), respectiv semne minus(-) în regiunile încărcate cu sarcini adevărate pozitive, respectiv negative.

Dacă se introduce într-un cîmp electric, în vid, un mic conductor care are unitatea de măsură a sarcinii pozitive, rezultă din (1) că forţa $\bar{F}_{1v}$ care i se aplică e numeric egală cu intensitatea cîmpului electric local în vid. In general, intensitatea cîmpului electric în vid, într-un anumit punct, este egal cu cîtul forţei care s-ar exercita în acel punct asupra unui mic conductor, prin sarcina electrică adevărată a corpului ; mai precis el e egal cu limita către care ar tinde acest cît, cînd sarcina corpului ar tinde către zero.

Forţa fiind un vector polar, urmează din legea (1), fie că sarcina electrică adevărată e un scalar propriu zis şi deci intensitatea cîmpului electric în vid e un vector polar, fie că sarcina electrică adevărată e un pseudo-scalar, şi deci intensitatea cîmpului electric în vid e un vector axial. Există un fenomen numit efectul Hall, din care se deduce că sarcina adevărată e un scalar propriu zis şi că intensitatea cîmpului electric în vid e deci un vector polar.

Se spune că în regiunile în care valoarea absolută a mărimii vectoriale $\bar{E}_v$ e mai mare, cîmpul electric e mai intens, şi că regiunile în care valoarea absolută a mărimii $\bar{E}_v$ e mai mică, cîmpul electric e mai slab.

Aducerea unui corp în starea în care are o anumită sarcinăelectrică adevărată se numeşte încărcarea lui; se spune că acel corp e încărcat cu sarcină electrică. Prin experienţă se arată că numele sarcinii care încarcă un corp nu depinde de natura lui. Toate corpurile, inclusiv cele izolante, pot fi încărcate atît cu sarcină pozitivă cît şi cu sarcină negativă. Izolanţii şi conductoarele izolante nu se împart în două grupuri: unele care, prin frecare, se încarcă pozitiv şi altele care, prin frecare, se încarcă negativ, ci se pot ordona într-un şir, în care fiecare corp, frecat de exemplu cu orice corp din dreapta lui, se încarcă pozitiv şi frecat cu orice corp din stînga lui, se încarcă negativ. In şirul acesta, sticla e aproape de extremitatea pozitivă, iar ebonita şi substanţele răşinoase sînt aproape de cea negativă.

Orice corp electrizat poate fi descărcat, adică poate fi adus, prin mijloace adecvate în starea în care sarcina electrică adevărată e nulă în orice regiune a sa. In principiu, corpurile de probă electrizate, folosite pentru explorarea cîmpului electric, ar putea fi şi izolante. Pentru motive care se vor arăta după ce se va defini momentul electric, operarea cu mici corpuri de probă izolante electrizate, reclamă anumite precauţiuni, care nu sînt necesare în cazul conductoarelor. De aceea au fost preferate corpurile de probă conductoare.

Starea fizică specifică descrisă de intensitatea cîmpului electric în vid, este starea unui sistem fizic diferit de corpuri, numit cîmp electromagnetic, care există în toată regiunea din spaţiu susceptibilă de a se exercita în ea, asupra corpurilor, forţe şi momente de natură electrică. Acest sistem fizic are şi alte proprietăţi diferite de manifestarea lui prin forţele pe care le exercită asupra corpurilor electrizate ; de exemplu, cînd intensitatea cîmpului electric în vid variază în timp, se produce, cum vom arăta mai tîrziu un cîmp magnetic.

Termenul cîmp electric se foloseşte uneori în accepţiunea de regiune a spaţiului susceptibilă de a se exercita în ea, asupra corpurilor, forţe şi momente denatură electrică. Alteori, termenul se foloseşte în accepţiunea de stare fizică specifică din acea regiune, iar alteori în accepţiunea de cîmp electromagnetic considerat numai sub raportul stărilor sale electrice; această accepţiune o folosim în viitor. Intensitatea cîmpului electric în vid $\overline{E}_v$ e una din mărimile de stare ale cîmpului electromagnetic, aşa cum viteza,de exemplu, e una dintre mărimile de stare ale unui mic corp.Cîmpul electromagnetic are însă şi alte mărimi de stare; de exemplu, intensitatea cîmpului magnetic în vid (care se va introduce în studiul fenomenelor magnetice). Intr-o regiune din spaţiu există sistemul fizic numit cîmp electromagnetic,şi sta-

Experienţa arată că sistemul fizic numit cîmp electromagnetic poate transmite impuls şi masă între corpurile din cîmp. Împreună cu corpurile cîmpul electromagnetic face deci parte din categoria materiei. Experienţa mai arată că prin mijloace adecvate, intensitatea cîmpului electric în vid poate fi anulată în orice domeniu din spaţiu.

1,6. Spectrele electrice. Cîmpul de vectori al intensităţii cîmpului electric în vid se poate reprezenta desenînd liniile sale de cîmp. Acestea sînt linii care sînt tangente la intensitatea cîmpului electric în vid în fiecare dintre punctele lor. De obicei se desenează, pe fiecare unitate de arie normală pe ele, un număr de linii de cîmp proporţional cu valoarea absolută locală a intensităţii cîmpului. Se obţine astfel spectrul electric al liniilor de cîmp ale intensităţii cîmpului electric în vid.

Direcţia locală a liniilor de cîmp ale intensităţii cîmpului electric în vid se poate determina cu ajutorul acului electric. Acesta se compune dintr-o mică vergea de cuarţ, care are la mijloc o adîncitură prin care să sprijine în echilibru aproape indiferent pe un vîrf de ac, iar la capete are două bobiţe de măduvă de soc îmbrăcate cu foiţă de metal şi încărcate cu sarcini adevărate de nume contrare (v.fig.4)

rea sa, caracterizată de intensitatea cîmpului electric în vid, independent de prezenţa corpurilor de probă electrizate; prezenţa acestor corpuri e numai una dintre ocaziunile în care cîmpul electromagnetic se manifestă într-un mod observabil pentru noi, şi anume, în cazul considerat, prin forţele electrice pe care le exercită asupra corpurilor.

Cîmpul electromagnetic e deci sistemul fizic care exercită direct forţele electrice asupra corpurilor din regiunea ocupată de el; corpurile care produc acest cîmp intervin numai indirect, şi anume prin faptul că produc cîmpul. Relaţiile prezintă analogie cu exercitarea unei forţe asupra unei bile, prin intermediul unei bare elastice: bara exercită forţa asupra corpului, mîna care acţionează asupra barei intervine numai indirect, prin faptul că pune bara într-o stare de deformaţie elastică. In această analogie, bara corespunde cîmpului electromagnetic.

Scanned with OKEN Scanner

In cîmp se exercită asupra bobiţei încărcate pozitiv o forţă omoparalelă cu intensitatea cîmpului electric şi asupra bobiţei încărcate negativ o forţă antiparalelă cu intensitatea cîmpului electric. Dacă acul electric nu are deci direcţia locală a liniilor de cîmp, se exercită asupra lui un moment care-l roteşte pînă cînd ajunge paralel cu liniile de cîmp. In poziţia stabilă a acului, sensul dinspre bobiţa negativă spre cea pozitivă indică deci şi sensul local al intensităţii cîmpului electric în vid. Figura 5-a reprezintă o secţiune plană prin spectrul liniilor de cîmp ale intensităţii cîmpului electric în vidul din jurul a două plăci metalice dreptunghiulare egale, paralele şi încărcate cu sarcini adevărate egale şi de nume contrare, determinate cu ajutorul acului electric. Liniile de cîmp au marcate pe ele cu săgeţi sensurile intensităţilor locale ale cîmpului electric în vid. De obicei aceste sensuri nu se indică însă în spectrele electrice, fiindcă o aceeaşi formă a liniilor de cîmp se poate realiza cu ambele sensuri ale intensităţii cîmpului de-a lungul lor.

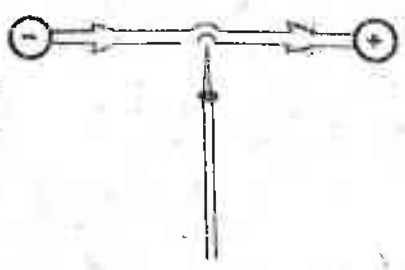


Fig.4
Ac electric

Spectrele electrice pot fi reprezentate şi cu ajutorul anumitor

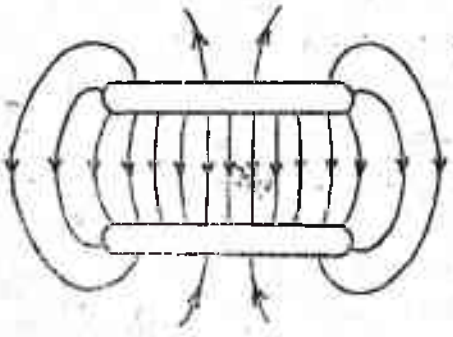


Fig.5 a
Spectru electric obţinut cu acul electric (5 a), respectiv cu fibre izolante (5 b),

corpuri izolante mici: Se presară anumite fibre, sau mici cristale de gips sau de rutil, pe o placă subţire, care se introduce în cîmpul electric. Se bate uşor în placă, şi se observă că fibrele, respectiv cristalele, deşi nu sînt încărcate cu sarcină electrică adevărată, se aranjează în şiruri de-a lungul liniilor de cîmp, cu dimensiunile mai mari de-a lungul lor, şi că aceste fibre, respectiv cristalele sînt mai rare sau mai dese, după cum cîmpul electric local e mai slab sau mai intens (vezi fig.5 b). Dacă dimensiunile mai mari ale fibrelor nu au direcţia liniilor de cîmp, se exercită asupra lor şi un moment, care tinde să le orienteze în această direcţie. De aceea dimensiunile lor mai mari iau, în toate punctele direcţia locală a liniilor de cîmp.

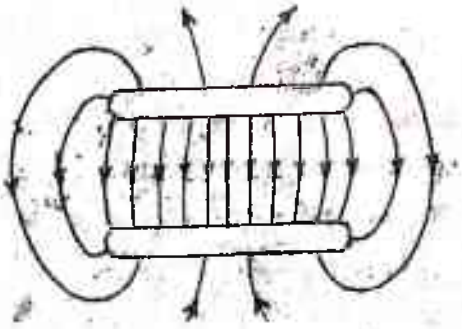


Fig. 5 a
Spectru electric obţinut cu acul electric (5 a), respectiv cu fibre izolante (5 b).

Fibrele sau cristalele se îngrămădesc în regiunile de cîmp electric mai intens, fiindcă în cîmpul electric se exercită asupra lor o forţă dirijată pretutindeni spre regiunile de cîmp mai intens (v.sub Momentul electric).

Experienţele referitoare la spectrele electrice nu se fac în vid. Aerul, placa - suport şi fibre, respectiv cristale din cîmp, produc perturbaţii faţă de cazul cîmpului în vid. Influenţa aerului e practic neglijabilă. Da-

că se alege un material potrivit pentru placa-suport, influenţa ei este, de asemenea, neglijabilă. Influenţa fibrelor, respectiv al cristalelor, e numai locală. De exemplu, măsurarea exactă arată că niciodată liniile de cîmp nu se intersectează, nu se unesc şi nu se ramifică în vid. (Ramificaţiile din spectrele electrice obţinute cu fibre sau cu mici cristale sînt produse de descărcări electrice locale perturbătoare).

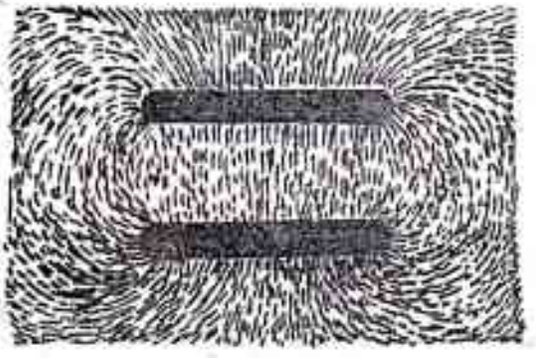


Fig.5 b

1.9. <u>Măsurarea sarcinii adevărata repartizate în corpuri, cu ajutorul electrometrelor</u>.

Sarcina adevărată repartizată pe un conductor sau într-un izolant electric se măsoară cu electrometrul. Acesta e un instrument de măsură bazat pe forţele care se exercită asupra conductoarelor în cîmpul electric. Electrometrul cu foiţe, de exemplu, se compune (vezi fig.6) din două foiţe de metal mobile F_1 şi F_2, suspendate de o vergea metalică verticală V, care are la capătul ei de sus un conductor omogen, gol în interior C, numit cilindrul Faraday; vergeaua trece printr-un dop izolat F, fixat printr-o carcasă de metal cilindrică M, pentru a proteja foiţele de influenţele din exterior; cilindrul are bazele devsticlă, pentru a permite observarea poziţiei foiţelor. Conductorul omogen,

gol în interior, are cum vom arăta proprietatea de a primi toată sarcina adevărată a unui conductor introdus în cavitate şi pus în contact cu suprafaţa lui interioară. Cînd corpul încărcat ajunge în contact cu suprafaţa cavităţii el face corp comun cu conductorul căruia toată sarcina lui adevărată trece pe suprafaţa exterioară a cilindrului Faraday. De fapt deschiderea prin care corpul încărcat se introduce în cavitate are o anumită influenţă, care face să existe sarcini adevărate şi pe faţa interioară a cilindrului Faraday, dar acestea sînt neglijabile faţă de cele din exterior. Dacă se descarcă deci un conductor în cilindrul Faraday al electrometrului, foiţele electrometrului deviază sub acţiunea forţelor electrice dintre ele. Cum vom arăta mai tîrziu, pe un sistem de conductoare izolat, sarcinile electrice adevărate care nu variază prea repede în timp pot fi repartizate numai într-un singur fel în cîmpul electric produs de ele. De aceea electrometrul permite să se măsoare sarcina electrică adevărată a cilindrului. In adevăr dacă forţele deviază cu acelaşi unghiu în două experienţe, se găseşte pe ele şi deci pe cilindrul Faraday aceeaşi sarcină adevărată. Dacă se descarcă succesiv complet în cilindrul Faraday, conductoare încărcate cu cîte o unitate de măsură a sarcinii şi se notează pe scara S deviaţiile corespunzătoare ale foiţelor se obţine din instrumentul nestalonat (electroscop) un instrument etalonat: electrometrul. Introducînd apoi în cilindrul Faraday conductoarele ale căror sarcini adevărate urmează să fie măsurate, electrometrul indică valoarea lor absolută. In aceste experienţe cilindrul Faraday poate fi

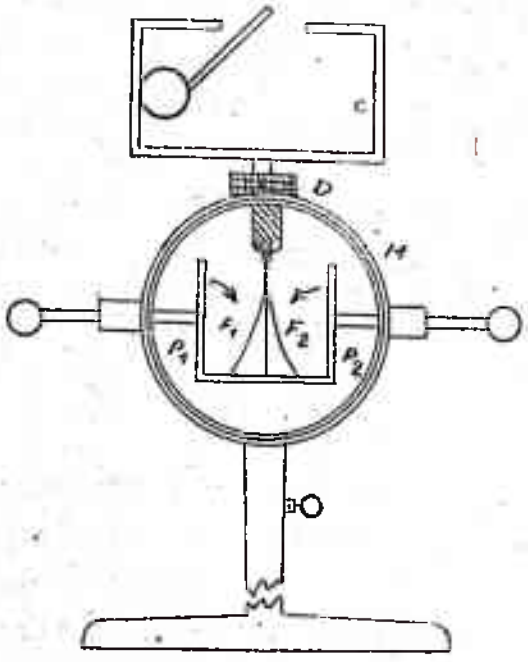


Fig.6
Electrometrul cu foiţe

fi înlocuit cu o colivie Faraday, compusă din fire conductoare(Plăcile verticale P_1 și P_2 se apasă asupra foițelor,pentru a le proteja în cursul transportului).

Experiența arată că, dacă se introduce corpul electrizat la o anumită adîncime în cilindru, respectiv în colivie, foițele electrometrului deviază înainte de a-l pune în contact cu suprafața cavității,respectiv cu fața interioară a coliviei și că poziția lor rămîne aceeași și după ce s-a stabilit contactul. Aceasta permite să se măsoare și sarcinile adevărate ale dielectricilor,, prin introducerea lor în colivie, respectiv în cilindrul Faraday al electrometrului.

1,2o. <u>Densitățile sarcinii electrice adevărate</u>. Limita ρ_v a raportului dintre sarcina adevărată Δq și volumul Δv în care se găsește, cînd acest volum tinde către zero și limita există:

$$(4) \qquad \rho_v \equiv \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \equiv \frac{dq}{dv}$$

este o mărime electrică derivată care se numește densitatea de volum a sarcinii adevărate. Această mărime prezintă importanță în special pentru izolanți.

Sarcina electrică adevărată q repartizată cu densitatea de volum,într-un volum v, se poate pune deci sub forma

$$(4\,a) \qquad q \equiv \int_v \rho_v \, dv$$

Uneori sarcina adevărată e repartizată în straturi atît de subțiri ale corpurilor încît interesează limita ρ_s a cîtului dintre sarcina adevărată Δq și aria simplă ΔA a stratului extrem de subțire, în care se găsește cînd această arie tinde către zero și limita există:

$$(5) \qquad \rho_s \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} \equiv \frac{dq}{dA}$$

mărime electrică numită densitatea de suprafață a sarcinii adevărate. Ea prezintă importanță în special pentru conductoare - dar și pentru izanții electrizați prin frecare.

Sarcina electrică adevărată q repartizată cu densitatea de suprafaţă pe o faţă a unei suprafeţe S se poate pune deci sub forma :

$$(5\ a) \qquad q = \int_S \rho_s \, dA$$

Uneori, sarcina adevărată e repartizată pe fire atît de subţiri încît interesează limita ρ_ℓ a cîtului dintre sarcina adevărată Δq şi lungimea Δs a unei porţiuni de fir, pe care se găseşte, cînd această lungime tinde către zero şi limita există :

$$(6) \qquad \rho_\ell \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \equiv \frac{dq}{ds}$$

mărime numită densitatea de linie a sarcinii electrice adevărate.

Sarcina electrică adevărată a porţiunii unui fir foarte subţire, cuprinsă între lungimile de arc s_0 şi s ale curbei firului se poate pune deci sub forma :

$$(6\ a) \qquad q = \int_{s_0}^{s} \rho_\ell \, ds$$

1.11. <u>Sistemele de unităţi de măsură ale mărimilor mecanice</u>. In Mecanică se folosesc trei sisteme principale coerente de unităţi de măsură: sistemele CGS, MKS şi CGsS.

In cercetările teoretice se foloseşte adesea sistemul CGS, care are centimetrul (cm) ca unitate de măsură a lungimii, gramul (g), ca unitate de măsură a masei inerte, şi secunda (s), ca unitate de măsură a timpului. In acest sistem se foloseşte, ca unitate de măsură a forţei, dina, egală cu forţa care imprimă masei inerte de un gram acceleraţia de un centimetru pe secundă la pătrat, în raport cu sistemele de referinţă inerţiale; ca unitate de măsură a lucrului mecanic şi a energiei se foloseşte ergul, egal cu lucrul mecanic efectuat de forţa de o dină cînd punctul ei material de aplicaţie se deplasează cu un centimetru în direcţia şi sensul ei, în raport cu sistemul de referinţă inerţial faţă de care se consideră lucrul mecanic, respectiv energia - şi ca unitate de

măsură a puterii, ergul pe secundă egal cu puterea pe care o transmite forţa de o dină cînd punctul ei material de aplicaţie se deplasează în fiecare secundă cu cîte un centimetru în direcţia şi sensul ei, în raport cu sistemul de referinţă inerţial faţă de care se consideră puterea.

In tehnică şi în anumite cercetări teoretice se foloseşte adesea sistemul MKS, care are metrul (m), egal cu 100 cm, ca unitate de măsură a lungimii, kilogramul - masă (kg), egal cu 1000 g, ca unitate de măsură a masei inerte, şi secunda ca unitate de măsură a timpului. In acest sistem se foloseşte newtonul (N), egal cu 10^5 dyn (o decimegadină), ca unitate de măsură a forţei, şi egal cu forţa care imprimă masei de un kilogram acceleraţia de un metru pe secundă la pătrat în raport cu sistemele de referinţă inerţiale; joule-ul (J), egal cu 10^7 ergi, ca unitate de măsură a lucrului mecanic şi a energiei, şi egal cu lucrul mecanic efectuat de forţă de un newton cînd punctul ei material de aplicaţie se deplasează cu un metru în direcţia şi sensul ei, în raport cu sistemul de referinţă inerţial faţă de care se consideră lucrul mecanic, respectiv energia - şi wattul (W) egal cu 10^7 ergi pe secundă, respectiv cu un joule pe secundă ca unitate de măsură a puterii şi egal cu puterea pe care o transmite faţă de un newton cînd punctul ei material de aplicaţie se deplasează în fiecare secundă cu cîte un metru în direcţia şi sensul ei, în raport cu sistemul de referinţă inerţial faţă de care se consideră puterea.

In lucrările mai vechi de Electrotehnică se foloseşte sistemul CGS, care folosea centimetrul ca unitate de lungime decamegagramul sau gramseventh-ul egal cu 10^7 g (adică egal cu masa de 10 tone) ca unitate de masă, şi secunda ca unitate de timp. In acest sistem unitatea de forţă e decamegadina, egală cu 10^7 dyn, unitatea de lucru mecanic şi de energie a joule-ului, egal cu o decamegadină - centimetru sau cu 10^7 ergi şi unitatea de putere e wattul, egal cu un joule pe secundă.

Exemplele sistemelor de unităţi de măsură CGS

şi CGsS arată că o aceeaşi unitate de măsură a unei mărimi (secunda în cazul considerat) poate face parte din mai multe sisteme adică poate fi asociată cu unităţi de măsură diferite ale celorlalte mărimi, spre a forma sisteme diferite.

1,11. Sisteme de unităţi de măsură ale mărimilor electrice. Se folosesc curent trei sisteme de unităţi de măsură a mărimilor electrice(şi magnetice) asociate sistemului CGS din Mecanică: sistemul CGS electrostatic, sistemul CGS electromagnetic, şi sistemul CGS-a lui Gauss.- un sistem de unităţi de măsură a mărimilor electrice(şi magnetice) asociat sistemului MKS din Mecanică, numit sistemul MKSC sau MKSA - şi un sistem asociat sistemului CGsS,vechiul sistem tehnic, pe care-l numim sistemul CGsSC sau CGsSA.

Unitatea de măsură a sarcinii electrice adevărate în sistemul CGS electrostatic este sarcina unui mic conductor care ar exercita forţa de 1 dyn asupra unui mic conductor încărcat cu aceeaşi sarcină adevărată şi situat în vid,la distanţa de 1 cm de el şi foarte departe de orice alte corpuri; unitatea de măsură corespunzătoare a intensităţii cîmpului electric în vid e valoarea absolută a acestei intensităţi care ar trebui să fie stabilită într-un punct oarecare pentru ca să se exercite în acel punct forţa de 1 dyn asupra unui mic corp care ar fi încărcat cu unitatea de măsură CGS electrostatică a sarcinii electrice adevărate.

Unitatea de măsură a sarcinii electrice adevărate în sistemul CGS electromagnetic este sarcina unui mic conductor care ar exercita forţa de 9.10^{20} dyn asupra unui mic conductor încărcat cu aceeaşi sarcină adevărată şi situat în vid la distanţa de 1 cm de el şi foarte departe de orice alte corpuri; unitatea de măsură corespunzătoare a intensităţii cîmpului electric în vid este valoarea absolută a acestei intensităţi care ar trebui să fie stabilită într-un punct oarecare pentru ca să se exercite, în acel punct, forţa de 1 dyn asupra unui mic corp care ar fi încărcat cu unitatea de măsură CGS electromagnetică a sarcinii electrice adevărate.

Se arată experimental (şi rezultă din legi pe care le vom stabili ulterior) că unitatea de măsură a sarcinii adevărate în sistemul CGS electromagnetic e de 3.10^{10} ori mai mare decît cea din sistemul CGS electrostatic, şi că deci, unitatea de măsură corespunzătoare a intensităţii cîmpului electric în vid e de tot atîtea ori mai mică decît cea din sistemul CGS electrostatic.

În sistemul de unităţi de măsură CGS al lui Gauss se folosesc unităţile de măsură ale sistemului CGS electrostatic pentru toate mărimile electrice, adică şi pentru q şi $\bar{E}_v$, (şi unităţile de măsură ale sistemului CGS electromagnetic pentru toate mărimile magnetice).

Unitatea de măsură a sarcinii electrice adevărate în sistemul MKSC (sau MKSA) se numeşte culomb(C), şi e sarcina unui mic conductor care ar exercita forţa de 9.10^9 newtoni asupra unui mic conductor încărcat cu aceeaşi sarcină adevărată şi situat în vid, la distanţa de 1 m de el şi foarte departe de orice alte corpuri; unitatea de măsură corespunzătoare a intensităţii cîmpului electric în vid se numeşte volt pe metru (V/m), şi e valoarea absolută a intensităţii cîmpului electric în vid, care ar trebui să fie stabilită într-un punct oarecare, pentru ca să se exercite, în acel punct, forţa de un newton asupra unui mic corp care ar fi încărcat cu sarcină electrică adevărată de un culomb. Se arată experimental (şi rezultă din legi pe care le vom stabili ulterior) că un coulomb e de 3.10^9 ori mai mare decît unitatea de măsură a sarcinii adevărate în sistemul CGS electrostatic, adică de 10^9 ori mai mică decît cea din sistemul CGS electromagnetic, şi că deci, un volt pe metru e de 3.10^4 mai mic decît unitatea de măsură a vectorului cîmp electric în sistemul CGS electrostatic, sau de 10^6 ori mai mare decît unitatea din sistemul CGS electromagnetic.

In sistemul de unităţi CGeS se foloseşte coulombul ca unitate de măsură a sarcinii electrice adevărate şi voltul pe centimetru (V/cm) de 100 ori mai mare decît voltul pe metru sau de 300 ori mai mic decît unitatea de măsură corespunzătoare în sistemul C.G.S. electrostatic,ca unitate de măsură a vectorului cîmp electric în vid.

Fasc.7. BAZELE ELECTROTEHNICII, cda.77/1955.

Să notăm deci cu q_{els}, q_{elm}, q_G, q şi q_s valoarea unei sarcini electrice date, măsurată în unităţi CGS-electrostatice, CGS electromagnetice, CGS Gauss, MKSC şi CGsSC. Intre aceste valori ale aceleeaşi sarcini există deci relaţiile

$$q_{els} = q_G = 3.10^{10} q_{elm} = 3.10^9 q = 3.10^9 q_s \ ;$$

$$q_{elm} = \frac{1}{3.10^{10}} q_{els} = \frac{1}{3.10^{10}} q_G = \frac{1}{10} q = \frac{1}{10} q_s \ ;$$

$$q_s = q = \frac{1}{3.10^9} q_{els} = \frac{1}{3.10^9} q_G = 10\, q_{elm} \ .$$

Să notăm cu E_{els}, E_{elm}, E_G, E şi E_n valoarea unei intensităţi date a cîmpului electric în vis, măsurată în unităţi CGS electrostatice, CGS electromagnetice, C.G.S. Gauss, MKSC şi CGsSc. Intre aceste valori ale aceleiaşi intensităţi a cîmpului electric în vid există deci relaţiile :

$$E_{els} = E_G = \frac{1}{3.10^{10}} E_{elm} = \frac{1}{3.10^4} E = \frac{1}{3.10^2} E_s \ ;$$

$$E_{elm} = 3.10^{10} E_{els} = 3.10^{10} E_G = 10^6 E = 10^8 E_s \ ;$$

$$E = 3.10^4 E_{els} = 3.10^4 E_G = \frac{1}{10^6} E_{elm} = 10^2 E_s \ ;$$

$$E_s = 3.10^2 E_{els} = 3.10^2 E_G = \frac{1}{10^8} E_{elm} = \frac{1}{10^2} E_s \ .$$

Unităţile de măsură de mai sus, introduse folosind forţele care se exercită între corpurile încărcate cu sarcină electrică, se numesc unităţi absolute. Ele prezintă desavantajul practic că nu pot fi prezentate direct prin etaloane. De aceea s-au folosit pînă în prezent unităţile internaţionale corespunzătoare, bazate pe etaloane. Fiindcă nu se pot construi etaloane stabile pentru sarcina electrică adevărată, se folosesc etaloane şi definiţii corespunzătoare pentru unităţile de măsură ale unor mărimi electrice care vor fi introduse mai tîrziu în studiul nostru (rezistenţa electrică şi

intensitatea curentului electric). Fiindcă aceste etaloane nu au fost alese exact cum ar corespunde unităţilor absolute, există mici diferenţe între unităţile absolute şi cele internaţionale. Situaţia e aceiaşi ca în cazul metrului, care ar urma să fie de 40.000.000 de ori mai mic decît lungimea meridianelor pămînteşti. Din cauza impreciziei măsurătorilor efectuate la determinarea metrului, acesta e cu cca 0,03 mm prea lung. De aceea se operează astăzi exclusiv cu metrul internaţional, egal cu distanţa dintre cele două repere ale unei bare de platină iradiată, care se găseşte la Biroul Internaţional de măsuri şi greutăţi, şi se numeşte metrul etalon.

Iată relaţia dintre cîteva unităţi internaţionale şi absolute (pe care le vom utiliza în calculele numerice) :

$$1\ C_{abs} = 1{,}0001\ C_{int.}$$

$$1\ V/m_{abs} = 0{,}9996\ V/m_{int.}$$

In studiul şi proiectarea maşinilor electrice se utilizează şi un sistem hibrid de unităţi, format din conexarea unităţilor MKSC pentru mărimile mecanice şi electrice, cu unităţile sistemului electromagnetic pentru mărimile magnetice. In acest sistem formulele forţelor şi ale energiei magnetice au anumiţi factori de transformare, din sistemul CGS, pe care se bazează sistemul electromagnetic, în sistemul MKS, pe care se bazează sistemul MKSC.

1.12. <u>Unităţile de măsură raţionalizate şi neraţionalizate ale mărimii electromagnetice</u>. Mărimile electrice se introduc în Electricitate cu ajutorul mărimilor mecanice. Sarcina electrică adevărată q şi intensitatea cîmpului electric în vid $\bar{E}_v$, de exemplu, se introduc prin legea (1) :

$$\bar{F}_{qv} = q\,\bar{E}_v \ .$$

Unităţile de măsură a sarcinii adevărate şi vectorului cîmp electric în vid trebuie alese deci astfel încît, în

punctele în care se stabileşte unitatea de măsură a vectorului cîmp electric în vid, să se exercite asupra unui mic corp încărcat cu unitate de sarcină adevărată, o forţă egală cu unitatea de forţă. De aceea fiecare sistem de unităţi de măsură ale mărimilor electrice se găseşte în relaţie cu un anumit sistem de unităţi de măsură ale mărimilor mecanice. Unui sistem dat de unităţi de măsură ale mărimilor mecanice îi pot corespunde însă mai multe sisteme de unităţi de măsură ale mărimilor electrice. Acest fapt se datoreşte împrejurării ca unitatea de măsură a uneia dintre mărimile electrice e independentă de unităţile mărimilor mecanice. In adevăr, de exemplu, pentru ca relaţia (1) să fie satisfăcută cu o anumită unitate de măsură a forţei, se poate alege arbitrar o unumită unitate de măsură pentru sarcina adevărată, şi apoi rezultă din (1) unitatea corespunzătoare pentru intensitatea cîmpului electric în vid, unitatea de sarcină adevărată poate fi mărită însă de n ori şi, dacă se micşorează totodată de n ori unitatea de intensitate a cîmpului electric în vid, relaţia (1) rămîne satisfăcută. Aceste observaţii privesc şi mărimile magnetice, fiindcă şi acestea se introduc în ştiinţă cu ajutorul mărimilor mecanice (şi eventual electrice).

Fiecare sistem de unităţi de măsură ale mărimilor mecanice se foloseşte împreună cu trei clase de unităţi de măsură ale mărimilor electrice şi magnetice : clasa de unităţi de măsură clasice nerationalizate, clasa de unităţi de măsură raţionalizate (nesimetric), şi clasa de unităţi de măsură, raţionalizate simetric. Clasa de unităţi de măsură raţionalizate are unităţi de măsură ale anumitor mărimi egale cu cele clasice nerationalizate, iar unităţile de măsură ale celorlalte mărimi, fie de 4π ori mai mici, fie de 4π ori mai mari decît cele nerationalizate corespunzătoare; unităţile anumiţor mărimi sînt afectate deci de raţionalizare, iar unităţile alter mărimi nu sînt afectate de această operaţie. Clasa de unităţi de măsură raţionalizate simetric are unităţile de măsură ale anumitor mărimi electrice şi magnetice

de $\sqrt{4\pi}$ ori mai mari, şi cele ale altor mărimi electrice şi magnetice, de $\sqrt{4\pi}$ ori mai mici decît cele clasice neraţionalizate corespunzătoare.

Motivele pentru care se operează adesea cu unităţi de măsură raţionalizate (nesimetric sau simetric) sînt următoarele : Cînd s-au introdus unităţile de măsură clasice neraţionalizate, încă nu se cunoşteau formele cele mai generale ale legilor Electricităţii şi magnetismului, ci numai anumite forme particulare ale lor care se numesc lemele (sau legile) lui Coulomb, şi care au fost folosite pentru introducerea unor unităţi de măsură neraţionalizate. Exprimînd cu aceste unităţi de măsură neraţionalizate formele cele mai generale ale legilor, apare în anumite legi generale factorul de proporţionalitate 4π ; pentru ca acest factor să dispară din toate formele generale ale legilor (şi să apară, în schimb, în anumite teoreme generale, cum sînt lemele lui Coulomb), se operează cu unităţile de măsură raţionalizate.

Clasa de unităţi de măsură raţionalizate simetric nu se foloseşte în tehnică. De aceea vom defini numai unităţile de măsură clasice neraţionalizate, pe care le vom folosi în exemplele numerice, şi unităţile de măsură neraţionalizate (nesimetric), dar pe acestea numai pentru mărimile ale căror unităţi sînt afectate de raţionalizare. Fiindcă instrumentele de măsură indică valoarea mărimilor în unităţi de măsură clasice neraţionalizate, s-au ales, ca mărimi cu unităţi de măsură afectate de raţionalizare, mărimi pentru a căror măsurare se construiesc rar instrumente de măsură, sau mărimi cu care se operează mai rar în tehnică. De exemplu, unităţile de măsură ale sarcinii şi intensităţii cîmpului electric nu sînt afectate de raţionalizare.

1.14. Coeficientul de raţionalizare. Dacă intervine, în ecuaţia care exprimă o lege Fizică, sau în ecuaţia care se defineşte o anumită mărime, atît mărimi cu unităţi afectate de raţionalizare, cît şi mărimi cu unităţi neafectate de aceas operaţie, rezultă că în ecuaţia scrisă în unităţi neraţionali-

...ate intervine o anumită putere a numărului 4π , iar în ecuaţia scrisă în unităţi raţionalizate intervine o altă putere a numărului 4π . Toate aceste ecuaţii ar trebui scrise deci de două ori.

Spre a evita acest lucru se poate opera un coeficient de raţionalizare $\varkappa$, pentru care se convine să aibă valoarea $\varkappa = 4\pi$ în unităţi neraţionalizate - şi valoarea $\varkappa = 1$ în unităţi raţionalizate, adică :

$$(2) \qquad \varkappa \begin{cases} = 4\pi & \text{în unităţi neraţionalizate} \\ = 1 & \text{în unităţi raţionalizate} \ . \end{cases}$$

Fiindcă nu s-a trecut la folosirea exclusivă a unităţilor de măsură raţionalizate, vom folosi coeficientul de raţionalizare, spre a putea scrie cîte o singură ecuaţie pentru fiecare lege.

1.15. Permitivitatea vidului. Presupunem că s-a ales un anumit sistem de unităţi de măsură pentru lungime, pentru timp şi masă şi deci pentru forţă, şi ne propunem să stabilim o unitate de măsură, corespunzătoare, a sarcinii electrice adevărate. Alegem, în acest scop, două corpuri practic punctuale, încărcate cu sarcini electrice adevărate egale. Aceste sarcinile se aleg în aşa fel încît, situînd cele două corpuri în vid, la unitatea de distanţă unul de altul, să se exercite între ele Δ_0 unităţi de forţă, convenim să spunem că fiecare corp are unitatea de sarcină electrică adevărată.

Dacă schimbăm unităţile de lungime, de timp, de masă şi de sarcină adevărată, mărimea Δ_0 , cu ajutorul căreia se defineşte unitatea de măsură a sarcinii adevărate, nu variază în acelaşi fel ca unitatea de forţă. In adevăr, de exemplu, dacă se măreşte de n ori unitatea de lungime şi se lasă neschimbate unităţile de măsură a timpului t, masei m şi sarcinii adevărate q, forţa exercită asupra unui punct material de masă m, care are raza vectoare $\bar{r}$ în raport cu un sistem de referinţă inerţial, avînd expresiunea

$$\bar{F} = m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

unitatea ei de măsură se măreşte, de asemenea, de n ori, adică valoarea absolută a unei forţe date scade la a n - a parte. Pentru ca şi Δ_0 să scadă de n ori, ar trebui ca între cele două corpuri punctiforme, încărcate cu cîte o unitate de măsură a sarcinii adevărate şi situate acum la o distanţă de n ori mai mare unul de altul, să se exercite o forţă de n ori mai mică decît înainte, adică ar trebui ca forţa dintre cele două corpuri să fie invers proporţională cu distanţa dintre ele, ceea ce nu se confirmă de experienţă. De aceea mărimea Δ_0 e o mărime fizică, fiindcă valoarea ei variază odată cu schimbarea unităţilor de măsură ale anumitor mărimi fizice. Ea diferă însă de forţă; în adevăr, valoarea ei este egală cu valoarea unei forţe numai în condiţiunile specificate mai sus, iar cînd se schimbă aceste condiţiuni (de exemplu unitatea de lungime), se schimbă şi unitatea în care se măsoară noua forţă, aşa încît mărimea nu variază în felul în care variază valoarea unei forţe date. Mărimea Δ_0 este o constantă universală fiindcă, la unităţi date ale celorlalte mărimi fizice, ea poate avea o singură valoare (care depinde de aceste unităţi), în opoziţie cu forţa sau cu lungimea, mărimi fizice care sînt capabile, în aceleaşi condiţiuni, de mai multe valori (sînt capabile de variaţie). Mărimea Δ_0 e o constantă universală referitoare la vid, fiindcă se obţine prin operaţii presupuse efectuate în vid. Nu e avantajos să se opereze direct cu mărimea Δ_0 ci cu o mărime invers proporţională cu ea. Nu e avantajos ca unităţile acestei mărimi reciproce cu Δ_0 să fie aceleaşi, atît în unităţi neraţionalizate, cît şi în unităţi raţionalizate. E avantajos ca în unităţi neraţionalizate să se opereze cu mărimea $1:\Delta_0$, iar în unităţi raţionalizate, cu mărimea $1:(4\pi\Delta_0)$. Cu ajutorul coeficientului de raţionalizare $\varkappa$ mărimea ε_0, care are valorile Δ respectiv $1:(4\pi\Delta_0)$ în clasele de unităţi neraţionalizate, respectiv raţionalizate, se exprimă deci sub forma

$$\varepsilon_0 = \frac{\varkappa}{4\pi\,\Delta_0}$$

Mărimea fizică ε_0 astfel definită, e o constantă universală referitoare la vid, şi unitatea ei de măsură e afectată de raţionalizare; ea se numeşte permitivitatea absolută a vidului sau, mai scurt, permitivitatea vidului. Unitatea ei se numeşte farad steradian pe metru (Fstr/m) în sistemul de unităţi MKSO neraţionalizate, şi farad pe metru în sistemul de unităţi MKSC raţionalizate.

1.16. Conservarea şi combinarea sarcinilor electrice adevărate. Dacă se freacă două corpuri, unul se încarcă cu sarcină electrică adevărată de un nume, iar celălalt, cu sarcină de nume contrar, şi valorile absolute ale sarcinilor de nume contrare sînt egale. In general: Producerea sau dispariţia unei sarcini electrice adevărate e însoţită totdeauna de producerea, respectiv de dispariţia simultană şi în acelaşi loc, a unei sarcini egale şi de nume contrar.

Sarcinile electrice adevărate pozitive şi negative se combină aditiv, adică un mic corp, dielectric sau conductor, încărcat succesiv cu sarcinile q_1, q_2, q_3, ..., q_n, sau format prin reunirea unor corpuri izolate care au aceste sarcini, se comportă ca şi cînd ar fi fost încărcat cu o sarcină q egală cu suma lor algebrică :

$$(7) \qquad q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$$

Dacă această sumă e nulă, se spune că sarcinile adevărate s-au neutralizat. - De asemenea, după descompunerea unui corp izolat în mai multe corpuri izolate, suma sarcinilor părţilor lui, nu poate fi variată decît prin aducerea sau îndepărtarea de sarcină adevărată. In acest sens sarcinile electrice adevărate pozitive şi negative se conservă, ca şi masa inertă.

1.17. Sarcina electrică adevărată a dielectricilor. Sub acţiunea unui cîmp electric, sarcina adevărată a unui dielectric rămîne neschimbată în locul în care a fost produsă sau adusă prin fenomene care sînt cel puţin în parte neelectrice

De aceea dielectricii se numesc izolanţi electrici.

In cîmpuri electrice destul de intense, sarcina adevărată poate trece prin izolanţi. Trecerea e însoţită de dezvoltarea de căldură, de zgomot, de o scînteie electrică sau de un arc electric. Se spune că un cîmp electric solicită izolantul la descărcarea electrică de străpungere, şi că izolantul are o rigiditate electrică cu atît mai mare cu cît suportă un cîmp electric mai intens, fără ca să se producă în el o descărcare electrică. Calculul intensităţii cîmpului electric în izolanţi prezintă deci interes şi pentru a se aprecia pericolul de descărcare electrică.

1.18. Sarcina electrică adevărată a conductoarelor. Sarcina electrică adevărată a unui conductor izolat nu rămîne neschimbată în locul în care a fost produsă sau adusă, ci se repartizează în conductor în funcţiune de cîmpul electric în care se găseşte conductorul, valoarea ei algebrică rămînînd invariabilă.

Nu există izolanţi perfecţi: Repartiţia sarcinii electrice adevărate din corpuri variază cu timpul şi numai sub acţiunea cîmpului electric. In izolanţi buni, repartiţia sarcinilor adevărate variază însă sensibil abia după ce au trecut zile de la încărcare; în conductoare, variaţia se produce în fracţiuni foarte mici dintr-o secundă, iar în semiconductoarele intermediare între izolanţi şi conductoare, variaţia se produce în timpuri de ordinul secundelor. Partea unui izolant prin care trece descărcarea electrică s-a transformat deci temporar în parte conductoare.

1.19. Clasificarea stărilor electrice. Se constată experimental că în conductoarele în care repartiţia sarcinii electrice adevărate variază în timp, adică în stările electrice variabile, se dezvoltă totdeauna căldură. Se constată că se poate dezvolta căldură şi în conductoarele în care repartiţia sarcinilor adevărate e constantă (nu variază în timp). Stările electrice în care repartiţiile sarcinilor electrice adevărate în conductoare sînt invariabile se împart deci în

două clase: Unele care sînt însoţite de dezvoltare de căldură, ca şi stările cu sarcini variabile în timp; acestea se numesc stări electrice staţionare; altele, care nu sînt însoţite de dezvoltare de căldură; acestea se numesc stări statice sau electrostatice.

Se constată experimental că în regim electrostatic, intensitatea cîmpului electric în vid, în imediata apropiere a suprafeţei conductoarelor omogene şi care au temperatură uniformă, e normală pe suprafaţa lor, şi că nu există sarcină electrică adevărată în interiorul lor, ci numai la suprafaţa lor, unde e repartizată într-un fel care depinde de cîmp, dar nu depinde de natura materialului conductorului. Se mai constată că intensitatea cîmpului electric e nulă în toate cavităţile care se practică într-un conductor omogen care se găseşte în regim electrostatic.

Dacă se dezvoltă căldură în conductoarele dintr-un cîmp electric, se spune că prin părţile conductoarelor în care se dezvoltă căldură trece curent electric de conducţie, indiferent dacă acestea se găsesc într-un cîmp electric staţionar, sau într-un cîmp electric variabil.

1.2o. Clasificarea conductoarelor electrice. Conductoarele electrice în care nu se produc transformări chimice cînd sînt parcurse de curent electric de conducţie (cînd se dezvoltă, adică în ele căldură) se numesc conductoare de prima speţă sau conductoare metalice, fiindcă metalele (şi cărbunele) fac parte din aceeaşi clasă; conductoarele în care se produc transformări chimice cînd sînt parcurse de curent de conducţie se numesc conductoare de a doua speţă sau conductoare electrolitice. Soluţiile apoase de acizi, de baze şi de săruri, de exemplu, fac parte din conductoarele electrolitice. - De izolanţii prin care se produc descărcări electrice nu se ţine seamă în această clasificare.

2. CIMPURILE ELECTROSTATICE IN VID ALE CONDUCTOARELOR OMOGENE INCARCATE.

2.1. Bazele experimentale ale teoremei lui Coulomb

Coulomb a măsurat, cu ajutorul balanţei electrice de torsiune

forţele care se exercită între două corpuri practic punctuale, imobile, situate în vid la distanţe între ele care sînt mari în raport cu dimensiunile lor lineare, şi încărcate cu sarcini electrice adevărate constante. Variind valorile absolute şi numele sarcinilor adevărate ale celor două corpuri, şi distanţa dintre ele, el a stabilit felul în care forţele depind de sarcinile celor două corpuri şi de distanţa dintre ele. Aceste forţe de natură electrică satisfac următoarele relaţii: Sînt dirijate de-a lungul dreptei determinate de cele două corpuri; satisfac principiul acţiunii şi reacţiunii, adică forţa exercitată de primul corp, încărcat cu sarcină adevărată q_1, asupra celui de al doilea corp, încărcat cu sarcină adevărată q_2, e egală şi de sens contrar cu forţa exercitată în acelaşi moment de al doilea corp asupra primului; între corpurile încărcate cu sarcini adevărate de acelaşi nume se exercită o forţă de repulsie, indiferent de numele lor comun, iar între corpurile încărcate cu sarcini adevărate de nume contrare se exercită o forţă de atracţiune; valoarea absolută a forţei pe care fiecare dintre corpurile încărcate o exercită asupra celuilalt e proporţională cu produsul valorilor absolute ale sarcinilor adevărate ale celor două corpuri, şi invers proporţională cu pătratul distanţei dintre ele.

Fie deci q_1 şi q_2 valorile sarcinilor adevărate ale celor două corpuri cu numele lor, $R_{12} = R_{21}$ distanţa dintre ele, şi $\bar{u}_{12}$ versorul dirijat dinspre corpul cu sarcina adevărată q_1 spre corpul cu sarcină adevărată q_2, egal şi de sens contrar cu versorul $\bar{u}_{21}$, dirijat din spre cel de al doilea spre primul corp (fig.7). In aceste condiţiuni, forţa electrică $\bar{F}_{12}$, exercitată de primul asupra celui de al doilea corp, are expresiunea

$$\bar{F}_{12} = \bar{u}_{12} \, \Delta_o \, \frac{q_1 \, q_2}{R^2_{12}}$$

unde mărimea pozitivă Δ_o este egală cu valoarea absolută a

forţei care se exercită între corpurile încărcate cu unitatea de măsură a sarcinii adevărate şi situate în vid, la unitatea de distanţă unul de altul.

Dacă se operează cu permitivitatea absolută ε_0 a vidului (6) :

$$(6) \qquad \varepsilon_0 = \frac{K}{4\pi\Delta_0}$$

se obţin următoarele expresiuni ale celor două forţe :

$$(7) \quad \bar{F}_{12} = \bar{u}_{12}\,\frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{R^2_{12}} = -\bar{F}_{21} = \bar{u}_{21}\,\frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2 q_1}{R^2_{21}}\,.$$

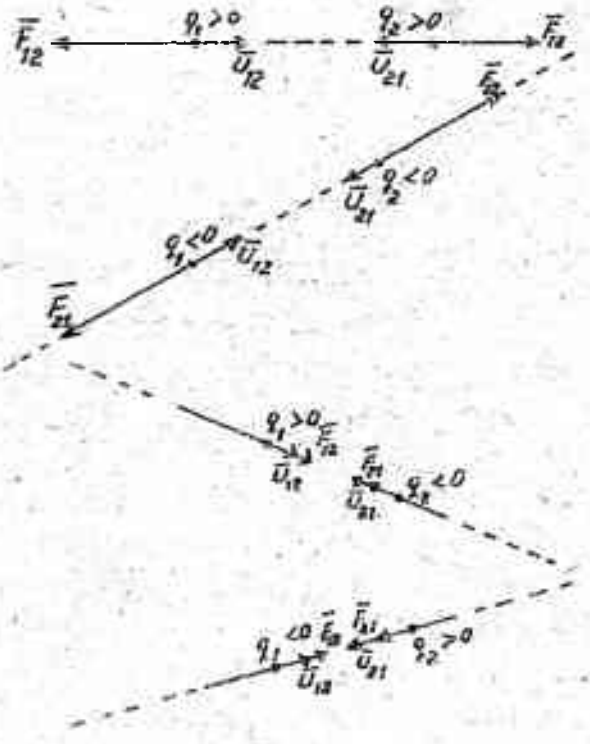


Fig.7

Forţe coulombiene dintre corpuri punctuale încărcate.

Această relaţie, stabilită pe bază experimentală, se numeşte lema sau teorema lui Coulomb. Experienţa arată că în corpurile încărcate nu se dezvoltă căldură, chiar dacă acestea sînt conductoare; ele se găsesc deci în regim electrostatic.

Se pot măsura, cu ajutorul balanţei electrice de torsiune, şi forţele care se exercită asupra a două corpuri practic punctuale, încărcate, situate într-un corp dielectric omogen şi isotrop şi care nu are polarizaţie electrică permanentă, dacă dielectricul e gazos, pentru ca braţul balanţei să poată oscila. Se găseşte că, în condiţiuni în rest egale forţa e de ε_r ori mai mică decît în vid ($\varepsilon_r > 1$). Numărul ε_r, definit în acest fel, se numeşte permitivitatea relativă a corpului dielectric omogen şi isotrop. Permitivitatea absolută

$_0$ a vidului trebuie deci înlocuită în formulele de mai sus cu mărimea mai mare $\varepsilon = \varepsilon_0 \ \varepsilon_r$, care se numeşte permitivitatea absolută a dielectricului.

În acest caz forţele

$$(7a) \qquad \bar{F}_{12} = \bar{u}_{12} \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q_1 \ q_2}{R^2_{12}} = - \bar{F}_{21}$$

nu sînt forţele de interacţiune numai între cele două corpuri încărcate, ci sînt forţe care rezultă din interacţiunea dintre cele două corpuri, şi dintre ele şi mediul izolant, iar ultima expresiune a forţelor e valabilă numai dacă mediul izolant e isotrop şi omogen şi nu are polarizaţie electrică permanentă. Dacă se aduce un corp izolant în apropierea celor două corpuri încărcate, şi restul spaţiului conţine un izolant chiar şi izotrop şi omogen, dar cu altă permitivitate absolută, expresiunea nu mai e valabilă, şi forţele nu mai sînt dirijate, în general, paralel cu $\bar{u}_{12}$. Expresiunea (7) a forţelor coulombiene în vid prezintă în studiul fenomenelor electrice mai multă importanţă decît expresiunea mai generală (7-a). De aceea ne limităm la cazul conductoarelor presupuse situate în vid. Practic, ele pot fi situate în dielectrici cu $\varepsilon_r \approx 1$, de exemplu în aer.

2.2. Cîmpul electrostatic coulombian. Limita cîtului dintre forţa $\bar{F}_q$, pe care un corp punctual, situat în originea unui sistem de coordonate şi încărcat cu sarcina adevărată constantă q, o exercită în vid asupra unui al doilea corp punctual, încărcat cu sarcină adevărată constantă q' , şi însăşi sarcina q', cînd acesta tinde către zero, se numeşte vectorul cîmp electric în vid $\bar{E}_v$ - al cîmpului electric produs de corpul cu sarcina q :

$$\bar{E}_{vq} = \lim_{q' \to 0} \frac{\bar{F}_q}{q'} = \bar{u} \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} ,$$

dacă $\bar{u}$ e versorul dirijat din spre corpul cu sarcina q spre corpul cu sarcina q' , iar r e distanţa dintre cele două

corpuri. Cîmpul coulombian e deci staţionar, şi anume electrostatic, fiindcă nu se dezvoltă căldură. Dacă $\bar{r} = \bar{u}r$ e raza vectoare a unui punct P în raport cu originea de coordonate, în care se găseşte corpul cu sarcina q, vectorul cîmp electric în vid al cîmpului electrostatic produs de acest corp, numit cîmp electrostatic coulombian, are deci în punctul P următoarea expresiune :

$$(8) \qquad \bar{E}_{vq} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q\,\bar{r}}{r^3}$$

adică e proporţional cu sarcina adevărată q şi invers proporţional cu pătratul distanţei r de la corp şi e dirijat spre corp sau din spre corp, după cum sarcina adevărată a acestuia e negativă, respectiv pozitivă.

Exemplu numeric. Un corp punctual, încărcat cu sarcina adevărată $q = 1o^{-8}C$, produce la distanţa $R = 0,1$ m de el, următoarea intensitate a cîmpului electric în vid (formula 8):

$$E_v = \frac{K}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{R^2} = 9.1o^9 \cdot \frac{1o^{-6}}{o,1^2} = 9.ooo \text{ V/m.}$$

El exercită, asupra unui corp punctual care are sarcina adevărată

$q' = 1o^{-8}C_2$ şi se găseşte la distanţa $R = o,1$ m de el, forţa

$$F = q'E_v = 1o^{-8}.9ooo = 9.1o^{-5}N = 9,18.1o^{-6} \text{ kgf.}$$

Figurile 8 reprezintă în linii pline liniile de cîmp ale cîmpului coulombian al unui corp punctual încărcat cu sarcină electrică adevărată pozitivă, respectiv negativă.

2.3. Superpoziţia cîmpurilor coulombiene. Fie un punct material, şi fie $\bar{F}_1$ forţa pe care o exercită asupra lui un sistem fizic S_1 dacă se găseşte singur în prezenţa punctului material, şi $\bar{F}_2$ forţa pe care o exercită asupra lui un sistem fizic S_2, dacă se găseşte singur în prezenţa punctului

material. Se constată experimental că, dacă punctul material se găseşte în prezenţa simultană numai a sistemelor materiale S_1 şi S_2, aceasta exercită asupra lui o forţă $\bar{F}$, egală cu suma vectorială a forţelor $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$, adică : $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$. Această relaţie, stabilită experimental, se numeşte principiul superpoziţiei forţelor sau principiul paralelogramului forţelor. Principiul poate fi folosit pentru a calcula forţa pe care o exercită asupra unui corp punctiform în sistem fizic S, compus din două sisteme fizice disjuncte S_1 şi S_2, dacă se pot calcula forţele pe care acestea le-ar exercita singure asupra corpului. Fiecare dintre sistemele fizice S_1 şi S_2 poate fi descompus, de asemenea, în sisteme parţiale disjuncte. Principiul superpoziţiei se poate anunţa deci sub următoarea formă : Un sistem fizic S, format din n sisteme disjuncte S_1, S_2, S_n, exercită asupra unui punct material o forţă $\bar{F}$ egală cu suma vectorială a forţelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$ pe care le-ar exercita asupra punctului fiecare din sistemele fizice S_1, S_2, ..., S_n dacă s-ar găsi singur în prezenţa lui :

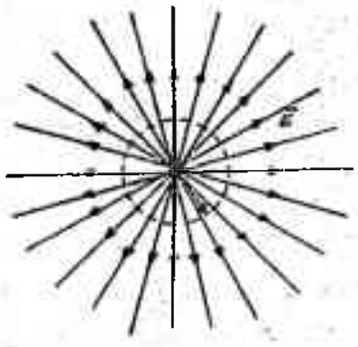


Fig. 8

Cîmpul electric coulombian al unui corp punctual încărcat pozitiv, respectiv negativ.

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n \qquad (9)$$

Aplicînd principiul superpoziţiei forţelor

$$\bar{F}_i = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\, q_i\, \bar{R}_i}{R_i^3}$$

exercitate de fiecare dintre cele n corpuri punctuale încărcate cu sarcini $q_i (i = 1,2,\ldots,n)$, asupra unui mic corp încărcat cu sarcina q şi care are razele vectoare $\bar{R}_i$, în raport cu

corpurile care au sarcinile q_i, obţinem forţa $\bar{F}$ pe care o exercită aceste corpuri asupra lui.

$$\bar{F} = \frac{\varkappa q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 \bar{R}_1}{R_1^3} + \frac{q_2 \bar{R}_2}{R_2^3} + \ldots + \frac{q_n \bar{R}_n}{R_n^3}\right)$$

Impărţind cu sarcina q şi calculînd apoi limita cîtului cînd q tinde către zero, se obţine vectorul cîmp electric în vid $\bar{E}_v$ al cîmpului electrostatic pe care-l produc corpurile punctuale care au sarcinile q_i într-un punct P care are în raport cu ele razele vectoare $\bar{R}_i$:

$$\bar{E}_v = \sum_{i=1}^{n} \bar{E}_{vqi} = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \bar{R}_i}{R_i^3}$$

Prin trecerea la limită se poate calcula vectorul cîmp electric în vid al cîmpului electrostatic produs de corpuri a căror sarcină adevărată e repartizată cu densitate de volum ρ_v, de suprafaţă ρ_s sau de linie ρ_ℓ. Dacă dv', dA', respectiv ds' sînt elementele de volum sau de arie, respectiv de linie în care se găsesc mărimile ρ_v, ρ_s, respectiv ρ_ℓ şi dacă $\bar{R}$ sînt razele vectoare ale punctului în raport cu aceste elemente, se obţine :

$$\bar{E}_v = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho_v \bar{R}}{R^3}\,dv' + \int \frac{\rho_s \bar{R}}{R^3}\,dA' + \int \frac{\rho_\ell \bar{R}}{R^3}\,ds'\right]$$

In general, expresiunea vectorului cîmp electric în vid, în cîmpul electrostatic obţinut prin superpoziţia de cîmpuri coulombiene, are deci expresiunea :

$$(1o)\quad \bar{E}_v = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho_v \bar{R}}{R^3}\,dv' + \int \frac{\rho_s \bar{R}}{R^3}\,dA' + \int \frac{\rho_\ell R}{R^3}\,ds' + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \bar{R}_i}{R_i^3}\right]$$

In cazul sarcinilor repartizate cu densitate de suprafaţă, e avantajos să se opereze uneori cu unghiul solid elementar $d\Omega$ sub care se vede din punctul P_1 în care se calculează vectorul cîmp electric elementul de arie dA, care are densitatea de

suprafaţă ρ_s a sarcinii, dacă α' e unghiul format de normala pe elementul de arie dA' cu raza vectoare dintre dA' şi P, rezultă :

$$d\Omega' = \frac{dA'}{R^2} \cos\alpha'$$

şi deci vectorul cîmp electric corespunzător are expresiunea :

$$(1o\text{-}a) \qquad \bar{E}_s = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho_s \, d\Omega'}{\cos\alpha'} \cdot \frac{\bar{R}}{R} ,$$

în care nu mai intervine explicit distanţa R, fiindcă $\bar{R}:R=\bar{UR}$ e versorul orientării din spre elementul de arie dA' spre punctul P.

2.4. <u>Cîmpul electrostatic dintre două armături plane paralele, încărcate cu sarcini adevărate egale şi de nume contrare</u>. Considerăm două armături de metal, în formă de plăci paralele, de arii simple A încărcate cu densităţile superficiale ρ_s şi $-\rho_s$ de sarcină adevărată pe feţele lor interioare. Ele au deci sarcinile $q = A\rho_s$, respectiv $q' = A\rho_s' = -q$. Dacă dimensiunile lineare ale armăturilor sînt mari în raport cu distanţa g dintre ele, densităţile de sarcină sînt constante pe fiecare dintre armături. Dacă se alege între ele cele două plăci un punct P depărtat de marginile lor, vectorul cîmp electric în vid din acel punct va fi perpendicular pe cele două plăci.

Placa din stînga, care are densitatea de sarcină ρ_s, produce în momentul P, conform formulei (1o a), următoarea componentă a vectorului cîmp electric după normala pe placă, al cărei versor este $\bar{u}_n$:

$$E_n' = \int d\bar{E}_y \, \bar{u}_n = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho_s d\Omega'}{\cos\alpha'} \, \bar{u}_y \, \bar{u}_n = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o} \rho_s \int d\Omega'$$

unde integrala se efectuează asupra unghiului solid corespunzător întregii arii a plăcii din stînga. Dacă punctul P e depărtat de margini, placa se vede din P sub unghiul solid 2π şi deci

$$(a) \qquad E'_n = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o}\,\rho_s\,2\pi = \frac{\varkappa}{2\varepsilon_o}\,\rho_s$$

Placa din dreapta având densitatea de sarcină $-\rho_s$, produce în P conform formulei (1o a) următoarea componentă a vectorului cîmp electric după normala pe placă, al cărei versor este $\bar{u}_n$:

$$E''_n = \int d\bar{E}_v\,\bar{u}_n = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{\rho_s\,d\Omega}{\cos\alpha'}\,u_v u_n = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o}\,\rho_s\,d\Omega\,,$$

unde integrala se efectuează asupra unghiului solid corespunzător întregii arii a plăcii din dreapta. Dacă punctul P e depărtat de margini, placa se vede din P sub unghiul solid 2π şi deci

$$(b) \qquad E''_n = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o}\,\rho_s\,2\pi = \frac{\varkappa}{2\varepsilon_o}\,\rho_s = E'_n\,.$$

Placa din dreapta având densitatea de sarcină $-\rho_s$, produce în P o componentă a vectorului cîmp electric egală cu E'_n. Intre cele două plăci, vectorul cîmp electric e deci

$$(11) \qquad \bar{E}_v = \bar{u}_n 2\,E'_n = \bar{u}_n\,\frac{\varkappa}{\varepsilon_o}\,\rho_s = \bar{u}_n\,\frac{\varkappa}{\varepsilon_o}\,\frac{q}{A}\,,$$

dacă q e sarcina armăturii din spre care versorul $\bar{u}_n$ e dirijat spre cealaltă armătură.

Liniile de cîmp ale cîmpului electric pleacă deci de pe armătura cu sarcină pozitivă şi se termină pe armătura cu sarcină negativă, $\bar{E}_v$ e constant în interiorul condensatorului şi e proporţional cu densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice (vezi fig.9).

În exteriorul armăturilor, vectorul cîmp electric e nul, fiindcă una dintre armături dă cîmpul E'_n, iar cealaltă, cîmpul $-E'_n$.

2.5. <u>Teorema lui Gauss referitoare la fluxul electrostatic în vid</u>. Fie un sistem de corpuri imobile, cu o repartiţie dată a sarcinilor lor adevărate. Sistemul produce în vid

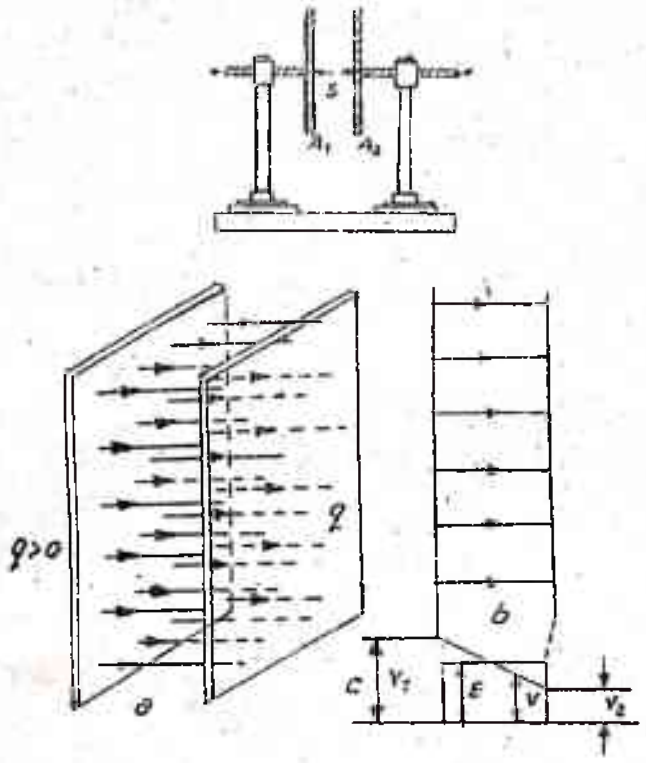


Fig.9
Cîmpul electric și potențialul electrostatic din apropierea a două plăci paralele încărcate uniform cu sarcină electrică

un cîmp electrostatic a cărui intensitate e dată de formula (1o), fie o suprafață închisă situată în întregime în vid, și fie $\overline{dA}$ elementul ei de arie (vezi fig.1o). Fluxul elementar al intensității cîmpului electric în vid $\overline{E}_v$ prin elementul de arie $\overline{dA}$ are expresiunea

$$\overline{E}_v \overline{dA} = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int \rho_v dv \frac{\overline{R}\,\overline{dA}}{R^3} + \int \rho_s dA' \frac{\overline{R}d\overline{A}}{R^3} + \int \rho_\ell ds' \frac{\overline{R}d\overline{A}}{R^3} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\overline{R}_i\, d\overline{A}}{R_i^3}\right\} .$$

Dacă mărimile vectoare $\overline{R}$ și $\overline{dA}$ formează unghiul α, $\overline{R}d\overline{A} = RdA.\cos\alpha$ și se obține

$$\frac{\overline{R}\,d\overline{A}}{R^3} = \frac{dA\cos\alpha}{R^2} = d\Omega ,$$

unde $d\Omega$ e unghiul solid sub care se vede elementul de arie dA al suprafeței închise, din locul în care se găsește densitatea de sarcină adevărată ρ_v, ρ_s, ρ_ℓ (respectiv, sarcina punctuală q_i, dacă se înlocuiește $d\Omega$ cu $d\Omega_i$, și $\overline{R}$ prin $\overline{R}_i$). Fluxul elementelor prin elemtul de arie $\overline{dA}$ se poate pune deci sub forma

$$\overline{E}_v\,\overline{dA} = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \rho_v\, dv'\, d\Omega + \int \rho_s dA'\, d\Omega + \int \rho_\ell ds' d\Omega + \sum_{i=1}^{n} q_i\, d\Omega_i\right] .$$

Fluxul prin suprafaţa închisă Σ se obţine din această expresiune integrînd pentru ea în raport cu Ω pentru fiecare element de volum, de suprafaţă şi de linie, respectiv pentru fiecare punct, în care se găseşte sarcina sdevărată. Se obţine astfel, inversînd ordinea de integrare :

$$\int d\Omega = 4\pi$$

pentru fiecare punct cu sarcina situat în interiorul suprafeţei

$$\int d\Omega = 2\pi$$

pentru fiecare punct cu sarcină situat pe suprafaţă şi

$$\int d\Omega = 0$$

pentru fiecare punct cu sarcină şi situat în exteriorul suprafeţei. Fiindcă suprafaţa e situată în vid, nu pot exista pe ea puncte în care să existe sarcină electrică. Rezultă că integrala, pentru suprafaţa Σ efectuată asupra fluxului elementar $\mathbf{E}_v\, d\bar{A}$, se obţine cum urmează din expresiunea de mai sus a fluxului elementar. Se pune factorul 4π, egal cu unghiul solid total, în faţa semnelor integrală, după ce s-au numit unghiurile solide elementare $d\Omega$ şi se efectuează integralele asupra elementelor dv'; ds'; dA' şi se efectuează sumele, numai asupra interiorului suprafeţei.

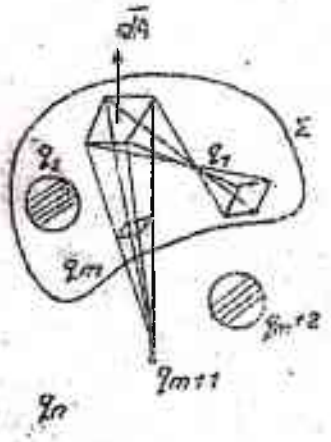


Fig 10
Figură pentru demonstrarea teoremei lui Gauss.

$$\mathbf{E}_v\, d\bar{A} = \frac{\chi}{\varepsilon_0}\left[\int \rho_v dv' + \int \rho_s dA' + \int \rho_l ds' + \sum_{i=1}^{m} q_i\right] .$$

Suma din acoladă reprezintă însă sarcina electrică adevărată din interiorul suprafeţei închise, şi deci

(12) $$\int_{\Sigma} \bar{E}_v \, \overline{dA} = \frac{K}{\varepsilon_0} q_{\Sigma}$$

Rezultă că fluxul intensităţii cîmpului electric în vid, prin orice suprafaţă închisă situată în vid, e proporţională cu sarcina electrică adevărată din interiorul acelei suprafeţe, factorul de proporţionalitate fiind cîtul dintre coeficientul de raţionalizare şi permitivitatea vidului.

Teorema lui Gauss e utilă în calculul intensităţii cîmpului electrostatic în vid. Pentru a aplica teorema lui Gauss unei suprafeţe paralelipipedice extrem de plate, situată la suprafaţa unui conductor omogen în regim electrostatic, jumătate în vid şi jumătate în conductor, ne imaginăm evacuat conductorul dintr-un strat infinit subţire, care îmbracă partea din conductor a suprafeţei paralelipipedice (fig.1o a). Intensitatea cîmpului electric în stratul în care s-a evacuat conductorul e nulă în regim electrostatic, aria feţelor perpendiculare pe conductor ale suprefeţei paralelipipedice e neglijabilă în report cu aria feţelor ei paralele cu suprafaţa conductorului, şi deci fluxul intensităţii cîmpului electric prin acele feţe e neglijabil în raport cu fluxul ei prin feţele paralele cu suprafeţa conductorului. Rezultă că trece flux sensibil numai prin faţa situată în vid, paralelă cu suprafaţa conductorului şi în imediata apropiere a acesteia. Acest flux e egal cu $\bar{E}_v \, d\bar{A} = E_v \, dA$, fiindcă în vid, în imediata apropiere a suprafeţei conductorului, intensitatea cîmpului electric e normală pe această suprafaţă. Sarcina adevărată din interiorul suprafeţei paralelipipedice e $\rho_s dA$, dacă ρ_s e densitatea de suprafaţă locală, a sarcinii electrice. Aplicînd suprafeţei paralelipipedice teorema lui Gauss, obţinem deci $E_v dA = \frac{K}{\varepsilon_0} \rho_s \, dA$, adică

(12 a) $$E_v = \frac{K}{\varepsilon_0} \rho_s .$$

Această relaţie arată că intensitatea cîmpului electric în vid, în imediata apropiere a suprafeţei unui conductor omogen, e normală pe suprafaţă şi proporţională cu densitatea de suprafaţă locală a sarcinii electrice adevărate, fiind dirijată dinspre conductor spre vid, respectiv din spre vid spre conductor, după cum densitatea locală de sarcină e pozitivă, respectiv negativă.

2.6. Teorema potenţialului electrostatic în vid.

Relaţia dintre cîmpul coulombian şi sarcina adevărată care-l produce e independentă de aportul de energie. După ce s-a stabilit un cîmp coulombian, sarcinile corpurilor rămîn constante şi, conform relaţiei (1o), cîmpul se menţine staţionar, deşi nu mai există niciun aport de energie. Conform principiului de conservare a energiei, nu se poate cîştiga deci energie prin efectuarea unui ciclu de transformare în cîmpul coulombian.

De exemplu, dacă un mic corp cu sarcina q' e purtat în curba închisă Γ în cîmpul coulombian al unui mic corp cu sarcina q, cu o viteză destul de mică pentru ca forţa $\bar{F}$ care se exercită asupra lui să poată fi calculată în fiecare moment cu expresiunea (1o) a cîmpului, lucrul mecanic efectuat asupra lui de forţa coulombiană e

$$L = \oint_{\Gamma} \bar{F} d\bar{r} = q' \oint_{\Gamma} \bar{E}_{vq} \cdot d\bar{r}.$$

Conform principiului de conservare a energiei, acest lucru mecanic trebuie să fie nul, fiindcă nu există nici un aport de energie spre sistemul format de corpuri şi de cîmpul electrostatic, şi fiindcă starea finală a sistemului, după efectuarea ciclului de transformare, e identică cu starea iniţială. Calculînd integrala de linie a vectorului cîmp $\bar{E}_{vq}$ de-a lungul unei curbe închise, se poate verifica deci dacă expresiunea lui e sau nu e compatibilă cu principiul de conservare a enregiei. Pentru a transforma expresiunea integralei de linie, ţinem seama de relaţia $\bar{r}d\bar{r} = d(\frac{\bar{r}^2}{2}) = d(\frac{r^2}{2}) = rdr$.

Obţinem :

$$U = \oint_{\Gamma} \bar{E}_{vq} d\bar{r} = \frac{Kq}{4\pi\varepsilon_o} \oint_{\Gamma} \frac{\bar{r}d\bar{r}}{r^3} = \frac{Kq}{4\pi\varepsilon_o} \oint_{\Gamma} \frac{rdr}{r^3} =$$

$$= -\frac{Kq}{4\pi\varepsilon_o} \oint_{\Gamma} d\left(\frac{1}{r}\right) .$$

Dacă r_o e deci o distanţă dintre corpul cu sarcină adevărată q şi un punct de pe curba închisă Γ, de la care se începe integrarea şi la care se revine, şi dacă r_m şi r_M sînt distanţa minimă şi maximă dintre corp şi punctele curbei (vezi fig.11), se obţine :

$$U = -\frac{Kq}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_{r_o}^{r_m} d\left(\frac{1}{r}\right) + \int_{r_m}^{r_M} d\left(\frac{1}{r}\right) + \int_{r_M}^{r_o} d\left(\frac{1}{r}\right)\right] =$$

$$= -\frac{Kq}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r_m} - \frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_m} + \frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_M}\right] = 0$$

adică expresiunile forţelor coulombiene şi vectorului cîmp electric coulombian sînt compatibile cu principiul de conservare a energiei.

Din principiul de conservare a energiei mai rezultă că nu se poate produce nici o formă nouă de energie în cîmpul coulombian, fiindcă acesta se întreţine fără nici un aport de energie din exterior. Rezultă că, dacă unul dintre cele două corpuri, sau ambele corpuri din cîmpul coulombian sînt conductoare, nu se poate dezvolta în ele căldură. Cîmpurile coulombiene sînt deci cîmpuri electrostatice.

In general integralele de linie a vectorului cîmp al unui cîmp care satisface relaţia $\oint_{\Gamma} \bar{G}\, d\bar{r} = 0$, considerată între două puncte P_o şi P, e independentă de curba dintre cele două puncte P_o şi P, de-a lungul căreia se calculează, fiindcă orice două curbe de acest fel formează o curbă închisă, ea depinde deci numai de poziţia în cîmp a celor două puncte. Se poate construi deci, pentru fiecare punct P din cîmp, un scalar cîmp V_p, efectuînd următoarea operaţiune :

$$(13) \qquad V = V_0 - \int_{P_0}^{P} \bar{G}\, d\bar{r} \ ,$$

unde V_0 e valoarea scalarului cîmp V în punctul P_0. Scalarul cîmp V se numeşte potenţialul scalar al cîmpului de vectori $\bar{G}$ (vezi Anexa matematică). Dacă e cunoscut potenţialul scalar V, se poate calcula vectorul cîmp $\bar{G}$. In adevăr, fie P' un punct de poziţie variabilă, apropiat de P, astfel încît vectorul său de poziţie în raport cu P să tindă către zero ($\bar{dr}$). Potenţialul V' în punctul P' va fi V' = V + dV unde $dV = -\bar{G}\,\bar{dr}$.

Folosind coordonate cartesiene x,y,z, se obţine :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - \bar{G}\,\bar{dr}.$$

Folosind expresiunile vectorului $\bar{G}$, a elementului de arc şi a gradientului potenţialului în coordonate cartesiene : $\bar{G} = \bar{i}G_x + \bar{j}G_y + \bar{k}G_z$; $d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$; $\text{grad } V = \bar{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial V}{\partial z}$, se obţine :

$$dV = \text{grad } V.d\bar{r} = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -\bar{G}d\bar{r} = -(G_x dx + G_y dy + G_z dz).$$

Fiindcă elementul de arc $d\bar{r}$ e arbitrar, ultima relaţie e satisfăcută numai dacă

$$(14) \qquad \bar{G} = - \text{grad } V \ ,$$

sau în coordonatele cartesiene :

$$(14\ a) \qquad G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ ; \quad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ ; \quad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \ .$$

Locurile geometrice ale punctelor în care potenţialul scalar are o aceiaşi valoare, sînt, în general, nişte suprafeţe, care se numesc suprafeţe echipotenţiale. In adevăr, două puncte foarte apropiate unul de altul şi situate pe o aceiaşi suprafaţă echipotenţială, astfel încît $d\bar{r}$ să fie raza vectoare a

unuia dintre punctele în raport cu celălalt, satisfac condiţiunea $dV = o$, adică

$$dV = d\bar{r}\ \text{grad}\ V = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0$$

Aceactă condiţiune este însă, în general, ecuaţia diferenţială a unei suprafeţe. Din forma vectorială $d\bar{r}\ \text{grad}\ V=0$ rezultă că toate elementele de arc $d\bar{r}$ dintr-o suprafaţă echipotenţială sînt normale pe valoarea locală $\bar{G} = -\ \text{grad}\ V$ a vectorului cîmp. Liniile de cîmp sînt deci traiectoriile ortogonale aîe suprafeţelor echipotenţiale.

Fie $\overline{ds}$ un element de arc de-a lungul unei traiectorii ortogonale a suprafeţelor echipotenţiale ale unui cîmp de vectori care derivă dintr-un potenţial scalar, fie ΔV valoarea absolută a diferenţei de potenţial dintre două puncte P_1 şi P_2 ale unei aceleiaşi linii de cîmp, Δs lungimea porţiunii de linie de cîmp dintre cele două puncte şi grad V/m valoarea absolută a međiei vectorului cîmp de-a lungul arcului Δs.

Rezultă :

$$\Delta V = \int_{P_1}^{P_2} \text{grad}\ V\ \overline{ds} = \int_{P_1}^{P_2} /\text{grad}\ V/ds = /\text{grad}\ V/m\ \Delta s \quad .$$

Dacă ΔV e infinit mic şi grad V/m e diferit de zero, trebuie ca şi Δs să fie infinit mic. Dacă ΔV e infinit mic, Δs poate fi finit numai dacă /grad V/m e mai mic decît orice mărime pozitivă dată. Această ultimă condiţiune dată poate fi satisfăcută numai dacă grad V are de-a lungul lui Δs atît valori pozitive, cît şi valori negative. Dacă grad V variază continu în spaţiu, trebuie ca grad V să aibă şi valoarea zero de-a lungul arcului Δs. Rezultă că două suprafeţe echipotenţiale care sînt infinit apropiate într-un anumit loc, trebuie să fie pretutindeni infinit apropiate, dacă nu există între ele valori nule ale vectorului cîmp, reprezentat de gradientul potenţialului.

Fasc.lo. BAZELE ELECTROTEHNICII, cda.77/1955.

In cazul particular al vectorului cîmp electric în vid, $\bar{E}_{vq}$ al cîmpului coulombian :

$$V_q = V_{qo} - \int_{P_o}^{P} \bar{E}_{vq}\, d\bar{r} = V_{qo} + \frac{\varkappa q}{4\pi\varepsilon_o} \int_{P_o}^{P} d\left(\frac{1}{r}\right) = V_{qo} +$$

$$+ \frac{\varkappa q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o}\right).$$

unde r şi r_o sînt valorile absolute ale razelor vectoare ale punctelor P şi P_o în raport cu originea sistemului de coordonare, iar V_{qo} e valoarea potenţialului scalar al cîmpului în punctul P_o. Dacă convenim ca punctului de la infinit, care se obţine pentru $\lim r_o = \infty$ să-i atribuim potenţialul nul, obţinem :

$$V_q = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{r} \qquad (15)$$

ca expresiune a potenţialului scalar al cîmpului coulombian. In acest caz, suprafeţele echipotenţiale sînt sfere cu centrul în q. Acest potenţial scalar, numit potenţialul electrostatic al cîmpului coulombian se poate pune sub forma :

$$V_q = -\int \bar{E}_{vq}\, d\bar{r} = -\lim_{q \to 0} \frac{\int_{\infty}^{P} \bar{F}_{q'}\, d\bar{r}}{q'} = +\lim_{q' \to 0} \frac{\int_{\infty}^{P} \bar{F}_{e}\, d\bar{r}}{q'}$$

unde $\bar{F}_e = -\bar{F}_{q'}$ e forţa exterioară care ar trebui exercitată în cîmp asupra unui corp practic punctual, încărcat cu sarcina adevărată q', pentru a-l aduce, pe un drum oarecare, de la infinit pînă la punctul în care potenţialul electrostatic are valoarea V_q. Integrala din ultimul membru reprezintă deci lucrul mecanic care ar trebui efectuat din exterior (contra forţei din cîmp $\bar{F}_q$), pentru a deplasa corpul cu sarcina q' de la infinit pînă la punctul al cărui potenţial e V_q, împărţit cu sarcina q'. Potenţialul scalar, într-un punct dat P, e deci egal cu lucrul mecanic, raportat la unitatea de sarcină, care trebuie efectuat, pentru a aduce un mic corp, încărcat, de la

infimit până la punctul P. El are dimensiunea - câtului dintre lucrul mecanic şi sarcină. Unitatea lui în sistemul de unităţi MKSC este voltul (V), adică produsul simbolic între unitatea de vector câmp electric în vid (V/m) şi unitatea de lungime (m).

Cunoscând potenţialul electrostatic, se poate calcula cu ajutorul relaţiei (b) vectorul câmp electric în vid.

$$\bar{E}_{vq} = - \operatorname{grad} \left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \right) .$$

În adevăr de exemplu în coordonate cartesiene se obţine :

$$\bar{E}_{vq} = - \frac{Kq}{4\pi\varepsilon_0} \left[\bar{i} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] =$$

$$= \frac{Kq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d \frac{1}{r}}{dr} \left[\bar{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right]$$

fiindcă

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} ;$$

rezultă :

$$\bar{E}_{vq} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z}{r} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,\bar{r}}{r^3} ,$$

adică expresiunea (8).

Şi câmpul electrostatic din vid, obţinut prin suprapunere de câmpuri coulombiene, derivă dintr-un potenţial scalar, numit potenţial electrostatic. În calcule e mai avantajos să se determine potenţialul electrostatic al unui sistem de corpuri încărcate cu sarcini adevărate, şi abia după aceea să se calculeze vectorul câmp electric în vid, din relaţia $\bar{E}_v = - \operatorname{grad} V$. Potenţialul electrostatic e egal cu suma potenţialelor scalare ale câmpurilor coulombiene suprapuse. În

adevăr, în cazul cîmpurilor coulombiene ale unor corpuri punctuale se obţine :

$$V = -\int_{\infty}^{P} \bar{E}_v \, \overline{dr} = -\int_{\infty}^{P} \sum_{i=1}^{n} \bar{E}_{vqx} d\bar{r} = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\infty}^{P} \bar{E}_{vqi} d\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} V_{qi}$$

dacă V_{q1}, V_{q2}, ..., V_{q} sînt potenţialele cîmpurilor coulombiene pe care le-ar produce corpurile cu sarcinile $q_1, q_2 \ldots q_n$ dacă s-ar găsi singure în spaţiu. Ţinînd seama de expresiunea (15) a potenţialelor V_{qi}, se obţine deci

$$V = \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{R_i}$$

In cazul sarcinilor adevărate repartizate punctual (q_i), respectiv cu densitatea de volum (ρ_v), şi de suprafaţă (ρ_s) şi de linie (ρ_l) expresiunea potenţialului electrostatic, care se obţine prin trecere la limită, e :

$$(16) \quad V = \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int \frac{\rho_v}{R} dv' + \int \frac{\rho_s}{R} dA' + \int \frac{\rho_l}{R} ds' + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{R_i}\right]$$

Vectorul cîmp electric în vid, corespunzător se calculează din relaţia

$$(16\,a) \qquad \bar{E}_v = -\,\text{grad}\, V \,.$$

Potenţialul electrostatic al cîmpului dintre două armături plane încărcate cu sarcini electrice adevărate egale şi de nume contrare, de exemplu, se calculează folosind relaţia (16). Dacă V_1 e potenţialul armăturii care are densitatea de sarcină ρ_s, pe care situăm punctul P_o, rezultă pentru potenţialul scalar într-un punct P din interiorul condensatorului, la distanţa x de acea armătură, alegînd drept curbă de integrare o dreaptă perpendiculară pe armături :

$$V = V_1 - \int_{x=0}^{x} E_x \, dx = V_1 - \frac{\kappa}{\varepsilon_o} \frac{q}{A} x \,.$$

Rezultă că potenţialul scade linear cu distanţa x dacă $q > 0$, şi creşte linear cu distanţa x dacă $q < 0$.

Formulele (1o) şi (1o a) sau formulele (16) şi (16 a), permit să se rezolve problemele de determinare a cîmpului electrostatic în vid, dacă se cunoaşte repartiţia sarcinilor electrice adevărate.

In interiorul conductoarelor omogene care se găsesc în regim electrostatic, vectorul cîmp electric în vid e nul: $\mathbf{E}_v = 0$, şi deci volumul ocupat de el e un volum echipotenţial. In general, repartiţia corespunzătoare a sarcinilor adevărate pe suprafaţa conductoarelor nu se cunoaşte. Dacă se admite însă o anumită repartiţie a acestei sarcini pe suprafaţa conductoarelor şi dacă se demonstrează că vectorul cîmp electric corespunzător e nul în interiorul tuturor conductoarelor omogene, repartiţia considerată este repartiţia care se stabileşte de fapt în cîmpul electrostatic. Liniile de cîmp ale unui cîmp electrostatic nu pătrund deci în interiorul conductoarelor omogene, ci se termină la suprafeţele lor care sînt suprafeţe echipotenţiale.

2.7. <u>Determinări grafice în cîmpurile electrostatice suprapuse</u>. Cu ajutorul superpoziţiei se pot construi grafic suprafeţele echipotenţiale ale unui sistem de corpuri încărcate, compus din două sisteme parţiale pentru ale căror cîmpuri electrostatice se cunosc suprafeţele echipotenţiale :Suprafeţele echipotenţiale ale cîmpului electrostatic al sistemului trec prin liniile de intersecţie ale suprafeţelor echipotenţiale ale sistemelor parţiale, pentru care suma potenţialelor parţiale e constantă. Fig 11 reprezintă jos suprafeţele echipotenţiale ale cîmpului electrostatic a două corpuri punctuale încărcate cu sarcini egale şi de nume contrare, construite în acest fel. Liniile de cîmp ale cîmpului rezultant sînt traiectoriile ortogonale ale suprafeţelor lui echipotenţiale. Construcţia lor în funcţiune de liniile de cîmp ale cîmpurilor sistemelor parţiale poate fi făcută numai după indicarea criteriului de "numerotare" a liniilor de cîmp din secţiuni ale acestor sisteme parţiale (care e făcută cu valoarea potenţialului în cazul suprafeţelor echipotenţiale). Numerotarea trebuie făcută astfel, încît prin linii de cîmp al căror număr

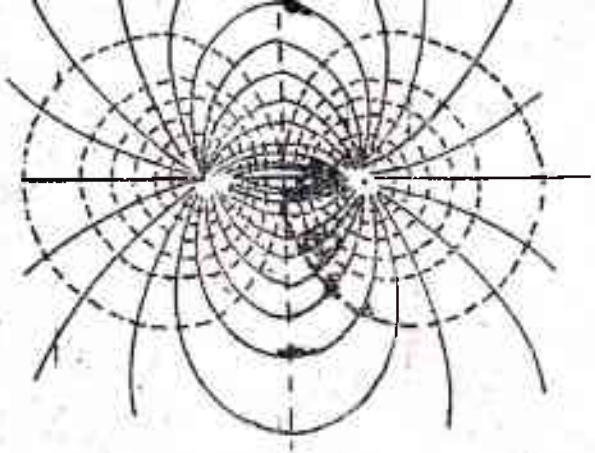


Fig. 11
Construcția liniilor de cîmp și ale suprafețelor echipotențiale ale cîmpului electric a două corpuri punctuale încărcate.

de ordine diferă cu un număr dat să treacă un acelaşi flux al vectorului cîmp.

De exemplu, în cazul celor două corpuri cu sarcini punctuale considerate mai sus, liniile de cîmp radiale ale cîmpurilor parţiale din secţiune, folosite în construcţie, trebuie să fie cu atît mai rare cu cît sînt mai apropiate de dreapta Δ, care uneşte cele două corpuri. In adevăr, dacă perechile de linii cu aceiaşi diferenţă între numerele lor de ordine sînt rotite în jurul dreptei Δ fiecare linie descrie un con, şi fluxul printre cele două conuri trebuie să fie acelaşi oricare ar fi perecheea de linii de cîmp. Vectorul cîmp fiind acelaşi pe suprafaţa unei sfere cu centrul în corpul încărcat, rezultă că diferenţa dintre deschiderile a două conuri ale căror generatoare au o diferenţă dată între numerele lor de ordine, trebuie să fie astfel, încît diferenţa dintre ariile celor două calote sferice determinate de conuri pe sferă să fie constantă. Dacă $\frac{\pi}{2}$ e deci unghiul dintre dreapta şi generatoarea (linia de cîmp) căreia i se atribuie numărul de ordine n, adică dacă aria calotei sferice determinată de ea pe sfera de rază egală cu unitatea de lungime e 2π generatoarea care are numărul de ordine i trebuie să formeze cu dreapta Δ unghiul α_i. astfel încît raportul dintre aria $2\pi(1 - \cos\alpha_i)$ a calotei sferice determinate de ea şi aria 2π a calotei sferice determinate de generatoarea cu $\alpha_i = \frac{\pi}{2}$ să fie i:n, adică:
$2\pi(1 - \cos\alpha_i) : 2\pi = i : n$, şi deci

$$(a)\quad \alpha_i = \arccos\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Punînd i=1, m=2,..., m=4n, se obţin unghiurile corespunzătoare: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{4n}$, şi 1,2,...,4n se pot înscrie ca numere de ordine pe liniile de cîmp respective. Aceste numere se înscriu cu semnul plus pentru liniile care se termină pe corpul cu sarcină negativă. Liniile de cîmp ale corpului electrostatic rezultant trec prin punctele de intersecţie ale liniilor pentru care suma algebrică a numerelor de

ordine e constantă (fig.11 a, sus). Figura 11-b reprezintă în linii pline liniile de cîmp şi în linii întrerupte intersecţia suprafeţelor echipotenţiale cu planul figurii. Figura alăturată indică şi construcţia grafică a unghiurilor α_1 ; ea se face împărţind o rază a cercului în n părţi egale, ridicînd perpendicularele pe raza împărţită, şi construind unghiurile α_i dintre această rază şi razele duse prin punctele de intersecţie ale cercului cu perpendicularele indicate. Demonstraţia că unghiurile construite în acest fel au valorile (a), e imediată.

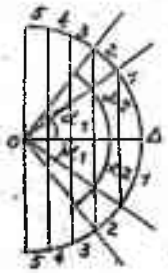


Fig. 11c
Construcţie auxiliară pentru figura 11.

2.8. <u>Cîmpul electrostatic în vid, în axa de simetrie a unui disc subţire, uniform încărcat cu sarcină electrică.</u>

Dacă q e sarcina de pe discul de rază a (fig.12) şi acesta e încărcat pe o singură faţă, densitatea de suprafaţă a sarcinii e $\rho_s = q:(\pi a^2) = q:A$. Alegem ca elementele de arie aria elementară dintre două cercuri de pe disc, concentrice cu el şi cu razele r şi r+dr, şi rezultă $dA = 2\pi r\, dr$; $R = \sqrt{r^2 + x^2}$. Deci conform expresiunii (14) :

$$(17) \qquad V = \frac{\varkappa \rho_s}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r=0}^{a} \frac{2\pi r\, dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\varkappa \rho_s}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{r^2+x^2}\right]_0^a =$$

$$= \frac{\varkappa}{2\varepsilon_0} \frac{q}{A} \left[\sqrt{a^2+x^2} - x\right] .$$

Din motive de simetrie, vectorul cîmp electric în axă e dirijat după axa Ox, şi deci, conform relaţiei (15) :

$$(17\ a) \qquad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\varkappa q}{2\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right) .$$

Dacă densitatea de suprafaţă ρ_s se menţine

constantă şi raza discului tinde către infinit, se obţine vectorul cîmp electric al unui plan uniform încărcat cu sarcină adevărată

$$(13\ b) \qquad E = \frac{\varkappa}{2\varepsilon_0}\rho_s$$

adică formula (a) din aplicaţia precedentă.

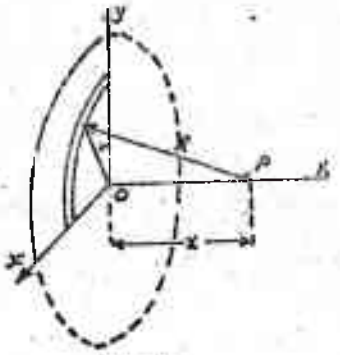


Fig. 12

figură pentru calculul cîmpului electrostatic în axa unui disc încărcat uniform.

2.9. <u>Cîmpul electrostatic al unei sfere a cărei suprafaţă e uniform încărcată cu sarcină adevărată</u>.

Dacă q e sarcina sferei şi a e raza ei densitatea de suprafaţă a sarcinii e

$$\rho_s = \frac{q}{4\pi a^2}$$

Alegem ca element de arie aria elementară dintre două cercuri paralele situate în plane normale pe direcţia OP dintre centrul O al sferei şi punctul P, astfel încît razele vectoare ale punctelor unuia dintre cercuri să formeze cu orientarea OP unghiul α iar razele vectoare ale celuilalt cerc, unghiul $\alpha + d\alpha$ (vezi fig.13). In acest caz, lăţimea fîşiei care formează elementul de arie e $a\,d\alpha$, iar lungimea ei e $2\pi a \sin\alpha$ adică $dA' = 2\pi a^2 \sin\alpha\, d\alpha$ şi $R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\alpha$.

Prin diferenţierea ultimei relaţii se obţine $RdR = ar\sin\alpha\, d\alpha$.

Conform relaţiei (14), potenţialul electrostatic în punctul P are expresiunea :

$$V = \frac{\varkappa\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha=0}^{\pi}\frac{2\pi a^2\sin\alpha\, d\alpha}{R} = \frac{\varkappa\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\pi a^2}{ar}\int_{R_0}^{R_\pi} dR =$$

$$= \frac{\varkappa\rho_s}{2\varepsilon_0}\,\frac{a}{r}\,(R_\pi - R_0)$$

unde R_o şi R_{π} sînt valorile distanţei R pentru $\alpha = 0$ şi $\alpha = \pi$. Dacă punctul P se găseşte în exteriorul sferei, $R_{\pi} = r + a$ şi $R_o = r - a$, adică $R_{\pi} - R_o = 2a$, şi deci:

$$(18) \qquad V_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a}{r} \; ; \; r \geq a \, ,$$

Dacă punctul P se găseşte în interiorul sferei, $R_{\pi} = a + r$ şi $R_o = a - r$, adică $R_{\pi} - R_o = 2r$, şi deci :

$$(18\,a) \qquad V_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{a} \; ; \; r \leq a,$$

oricare ar fi poziţia punctului P în interiorul sferei. Rezultă că o sferă cu suprafaţa uniform încărcată are în interior potenţialul electrostatic constant, şi deci vectorul cîmp electric nul ($\bar{E}_{vi} = 0$), iar în exterior acelaşi potenţial, şi deci acelaşi vector cîmp electric, ca şi cînd a-ar găsi în centrul ei un mic corp care ar avea sarcina totală q a sferei:

$$(18\,b) \qquad \bar{E}_{ve} = - \operatorname{grad} V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^3} \bar{r}; \; r \geq a \, .$$

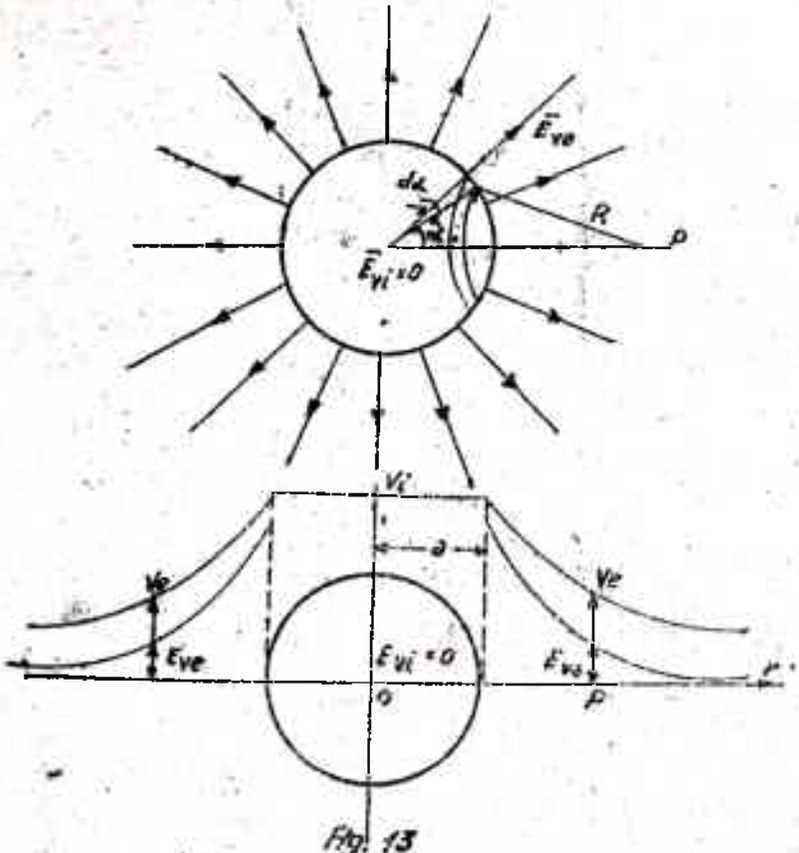


Fig. 13

Cîmpul electrostatic şi potenţialul din apropierea unei suprafeţe sferice uniform încărcate.

Fiindcă vectorul cîmp electric e nul în interiorul sferei rezultă că repartiţia superficială considerată e repartiţia sarcinii pe suprafaţa sferei conductoare, în regim electrostatic.

2.1c. <u>Cîmpul electrostatic al unei sfere care are permitivitatea ε_o şi volumul uniform încărcat cu sarcină adevărată</u> Da ă q

e sarcina sferei şi a e raza ei, densitatea de volum a sarcinii e :

$$\rho_v = \frac{3q}{4\pi a^3}$$

Considerăm sfera descompusă în scoarţe sferice de grosimea dr', cuprinse între sferele de raze r' şi r'+ dr'. Fiecare scoarţă are volumul $dv = 4\pi r'^2 dr'$, adică sarcina $dq = 4\pi r'^2 dr' \rho_v$. şi deci densitatea de suprafaţă a sarcinei adevărate

$$d\rho_s = \frac{dq}{4\pi r'^2} = \rho_v dr' ,$$

Fiecare scoarţă produce într-un punct din exteriorul ei acelaşi potenţial ca şi cînd întreaga ei sarcină dq ar fi concentrată în centrul ei, cum s-a arătat în ultima aplicaţie :

$$dV_e = \frac{\kappa \rho_v}{4\pi\varepsilon_o} \frac{4\pi r'^2 dr'}{r} ; \quad r \geqslant r' ,$$

iar într-un punct din interiorul ei, un potenţial egal cu limita potenţialului ei într-un punct exterior, cînd acest punct se apropie indefinit de suprafaţă, adică r = r' :

$$d V_i'' = \frac{\kappa\rho}{4\pi\varepsilon_o} 4\pi r' dr' ; \quad r \leq r' .$$

Punctele din exteriorul sferei sînt exterioare tuturor scoarţelor sferice; suma potenţialelor lor într-un astfel de punct se calculează deci prin integrare din dV_e şi este :

$$(19) \quad V_e = \frac{\kappa\rho_v}{\varepsilon_o r} \int_0^a r'^2 dr' = \frac{\kappa\rho}{\varepsilon_o r} \frac{a^3}{3} = \frac{\kappa}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r} ; \quad r \geqslant a$$

ca şi cînd ar fi produs de un mic corp situat în centrul sferei şi încărcat cu întreaga ei sarcină

In exteriorul sferei, vectorul cîmp electric e deci invers proporţional cu pătratul distanţei de la centrul sferei :

$$(19\ a) \qquad E_r = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\ ;\quad r \geqslant a$$

Un punct P' din interiorul sferei, la distanţa r de centrul ei, e exterior tuturor scoarţelor sferice care au raze mai mici decît ξ. Potenţialul acestora în punctul P' se calculează ca mai sus înlocuind raza a cu raza r.

$$V'_i = \frac{\varkappa \rho_v r^2}{3\varepsilon_0}$$

Punctul P' este însă interior tuturor scoarţelor care au raza r' mai mare decît r. O astfel de scoarţă produce în punctul P' potenţialul dV''_i, şi deci toate scoarţele dintre r'=r şi r'=a produc în P' potenţialul.

$$V''_i = \frac{\varkappa \rho_r}{\varepsilon_0}\int_{r'=r}^{a} r'dr = \frac{\varkappa \rho_v}{2\varepsilon_0}(a^2 - r^2)\ .$$

Potenţialul în punctul P' are deci expresiunea :

$$(19\ b) \qquad V_i = V'_i + V''_i = \frac{\varkappa \rho_v}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3a^2 - r^2}{2a^3}$$

Vectorul cîmp electric corespunzător e dirijat radial şi are expresiunea :

$$(19\ c) \qquad E_r = -\frac{\partial V_i}{\partial r} = \frac{\varkappa q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{a^3}\ ;\quad r \leqslant a$$

adică e proporţional cu distanţa de la centrul sferei şi se deosebeşte de cel din cazul suprafeţei sferice uniform încărcate.

2.11. **Condensatoarele electrice şi capacitatea lor electrostatică.** Un sistem de două conductoare încărcate cu sarcini egale şi de nume contrare formează un condensator electric. In Electrostatică se studiază deci comportarea condensatoarelor cînd conductoarele lor, numite armături, sînt încărcate cu sarcini adevărate egale şi de nume contrare. Figura alăturată reprezintă o parte dintr-un condensator electric cu liniile de cîmp şi suprafeţele echipotenţiale ale cîmpului electrostatic dintre armăturile lui, presupuse încărcate cu sarcini egale şi de nume contrare. Potenţialul electrostatic corespunzător V e reprezentat de cel de al doilea termen aditiv din expresiunea (16) ;

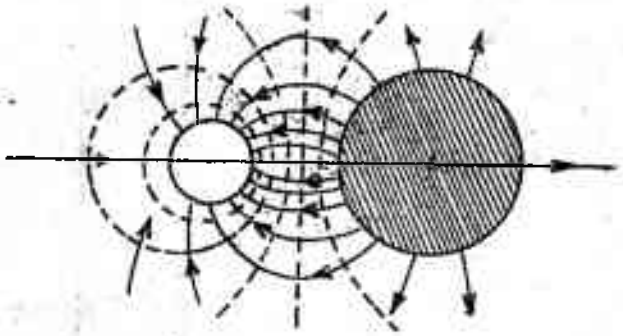


Fig. 14
Liniile cîmpului electrostatic dintr-un condensator electric şi suprafeţele lui echipotenţiale.

$$V = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_s}{R}\,dA$$

integrala fiind extinsă asupra suprafeţelor celor două armături, care sînt suprafeţele echipotenţiale de valori V_1 şi V_2 ale potenţialului. Dacă se consideră o nouă stare, în care densitatea de suprafaţă ρ_s, a sarcinii din fiecare dintre punctele suprafeţelor armăturilor e de n ori densitatea veche $\rho'_s = n\,\rho_s$, noul potenţial electrostatic va fi

$$V_n = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{n\rho_s}{R}\,dA = n\,\frac{k}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_s}{R}\,dA = n\,V_1,$$

adică va fi în fiecare punct de n ori mai mare. Suprafeţele armăturilor rămîn deci echipotenţiale; noua repartiţie a sarcinii e deci tot o repartiţie electrostatică, şi $V_{1n} = nV_1$, şi $V_{2n} = n\,V_2$ sînt noile potenţiale ale armăturilor. Dacă densitatea ρ_s se înlocuieşte în fiecare punct cu densitatea $n\,\rho_s$

şi dacă q_1 şi q_{1n} sînt sarcinile adevărate ale armăturii de potenţial V_1 respectiv V_{1n}, corespunzătoare vechii, respectiv noii densităţi, rezultă :

$$q_1 = \iint_s \sigma dA \; ; \; q_{1n} = \iint_s n\sigma dA = n\iint_s \sigma dA = nq_1$$

adică şi sarcina creşte de n ori. Cîtul C al sarcinii adevărate a unei armături a unui condensator, prin diferenţa de potenţial dintre armături satisface deci relaţia :

$$(2o) \quad C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{nq_1}{nV_1 - nV_2} = \frac{q_{1n}}{V_{1n} - V_{2n}} ,$$

adică e independent de valoarea absolută şi de numele sarcinii adevărate al armăturilor. El reprezintă deci o mărime caracteristică a condensatorului cu vid între armături, adică o mărime care depinde numai de dimensiunile şi poziţiile relative ale armăturilor, şi care se numeşte capacitatea lui electrostatică (sau şi capacitatea lui electrică, sau numai capacitatea lui).

Unitatea de capacitate în sistemul MKSC nu e afectată de raţionalizare, se numeşte farad şi se notează cu simbolul F. Ea este capacitatea unui condensator ale cărui armături se încarcă cu cîte un coulomb de sarcină adevărată cînd se stabileşte între ele o diferenţă de potenţial egală cu un volt.

Capacitatea unui condensator plan, ale cărui armături cu ariile simple A şi distanţa g între ele, se obţine cu ajutorul expresiunii (16 a) a potenţialului electrostatic, în care se pune x=g, pentru a se obţine potenţialul armăturii 2 :

$$V_2 = V_1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \frac{q}{A} g \; .$$

Rezultă următoarea expresiune a capacităţii:

$$(2o\ a) \quad C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_o A}{\sigma g}$$

Exemplu: Un condensator cu armăturile circulare care au razele de cîte a = 1 m, la distanţa g= 1 mm = 10^{-3}m una de alta şi cu vid între armături, are capacitatea :

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9.10^9} \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{10^{-3}} = \frac{10^{-6}}{36} F = 2,78.10^{-8} F.$$

2.12. Condensatorul sferic. Potenţialul electrostatic în vidul dintre o sferă conductoare de rază R_i, şi o suprafaţă sferică conductoare concentrică cu ea şi de rază interioară R_e, e suma potenţialelor electrostatice corespunzătoare sarcinilor q şi -q pe cele două armături, uniform repartizate pe suprafeţele lor (fig.14 a). Potenţialul corespunzător sarcinii q de pe suprafaţa sferei interioare se calculează din relaţia (18), iar potenţialul corespunzător sarcinii -q de pe suprafaţa interioară a sferei exterioare e nul. Valorile V_i şi V_e ale potenţialelor suprafeţelor celor două armături sînt deci :

$$V_1 = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R_i} ;$$

$$V_e = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R_e}$$

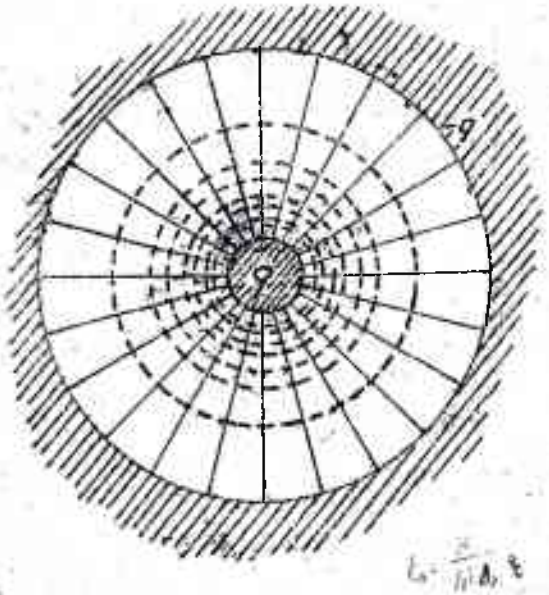


Fig. 14 a.
Liniile câmpului electrostatic dintr-un condensator electric şi suprafeţele lui echipotenţiale .

Capacitatea condensatorului are deci expresiunea :

$$(21)\quad C = \frac{q}{V_1 - V_e} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{K}\left(\frac{1}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}}\right) =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{K} \cdot \frac{R_e R_i}{R_e - R_i}$$

Dacă rasa sferei exterioare e foarte mare (teoretic, pentru $R_e \to \infty$), expresiunea capacităţii condensatorului devine :

$$(21\ a)\quad C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{K} R_i ,$$

adică C e proporţional cu raza sferei interioare. Ea se numeşte şi capacitatea "sferei" (interioare); dacă nu se găsesc conductoare în apropierea sferei, conductoarele depărtate au rolul sferei de rază R_e foarte mare independent de forma lor.

Exemplu: Capacitatea unei sfere metalice de rază $R_i = 1$ m are valoarea

$$C = \frac{4\pi}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} 1 = \frac{10^{-9}}{9} F = 1{,}11 \cdot 10^{-10} F$$

Dacă diferenţa de potenţial dintre sferă şi părţile conductoare ale Pămîntului e $V_i - V_e = 220$ V, sfera se încarcă cu sarcina

$$q = C (V_i - V_e) = 1{,}11 \cdot 10^{-10} \cdot 220 = 2{,}442 \cdot 10^{-8} C.$$

3.13. Energia cîmpului electrostatic. Energia unui cîmp electrostatic, în raport cu starea în care vectorul cîmp electric în vid e nul în toate punctele, considerată ca starea de referinţă, e egală cu lucrul mecanic total care trebuie efectuat din exterior pentru a aduce sarcinile de la infinit pînă în poziţiile pe care le ocupă în cîmp. Conform principiului de conservare a energiei, acest lucru mecanic total e independent de felul particular (şi în particular de ordinea) în care se aduc diferitele sarcini în cîmp. Deci vom considera un fel de aducere a sarcinilor în cîmp care permite să se calculeze cît mai simplu lucru mecanic necesar pentru stabilirea cîmpului. Presupunem că stabilirea cîmpului se face în aşa fel, încît, în fiecare etapă a stabilirii lui, sarcina electrică din fiecare loc să fie egală cu o anumită fracţiune F din sarcina locală finală. Astfel fiecare din aceste etape e o stare electrostatică, fiindcă se arată simplu că în acest fel sînt satisfăcute condiţiunile regimului electrostatic. Trebuie numai să se presupună că aducerea fiecărei noi mici sarcini se face atît de lent, încît să se treacă numai prin regimuri electrostatice. Considerăm deci starea în care sarcina, pe care o presupunem repartizată numai cu densitate de volum, are pretutindeni densitatea de volum $\alpha\rho$, dacă ρ e densitatea ei locală finală, unde $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. In acest moment, vectorul cîmp electric şi potenţialul electrostatic au în fiecare loc (conform relaţiilor 13 şi 14), valorile

$$E_\alpha = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\alpha\rho R}{R^3} dv = \alpha E_v; \quad V_F = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\alpha\rho}{R} dv = \alpha V,$$

dacă $\bar{E}$ şi V sînt valorile respective în stare finală. In această stare aducem, cu un mic corp metalic, sarcina adevărată elementară $d^2q = d\alpha\rho dv$ de la infinit pînă în elementul de volum dv, în care potenţialul electrostatic are valoarea αV. Lucrul mecanic d^2L, de efectuat din exterior asupra micului corp metalic pentru a-l aduce de la infinit pînă în elementul de volum dv din jurul punctului unde e descărcat, pentru a fi îndepărtat apoi la infinit, este lucrul mecanic al forţei exterioare $d^2\bar{F}_e$, egală şi de sens contrar cu forţa $d^2\bar{F}_\alpha = d^2q\bar{E}_\alpha$ pe care o exercită cîmpul asupra corpului încărcat.

$$d^2L = \int_{P\infty}^{P} d^2\bar{F}_e \, d\bar{r} = -\int_{P\infty}^{P} d^2\bar{F}_\alpha \, d\bar{r} = -d^2q \int_{P\infty}^{P} \bar{E}_\alpha \, d\bar{r} =$$

$$= d^2q \, \alpha V = \alpha d\alpha \rho V dv$$

Lucrul mecanic dL, necesar pentru a ridica în toate elementele de volum din cîmp densitatea de sarcină de la $\alpha\rho$ la $(\alpha + d\alpha)\rho$, este deci :

$$dL = \int_v d^2L = \alpha d\alpha \int_\rho V \, dv$$

Lucrul mecanic L, necesar pentru a mări pretutindeni densitatea de sarcină de la zero pînă la valoarea ei finală din cîmpul electrostatic, e deci :

$$L = \int_{\alpha=0}^{1} dL = \int_v \rho V dv \int_{\alpha=0}^{1} \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \int_v \rho V \, dv$$

Prin treceri la limită se obţin cazurile în care sarcina adevărată e repartizată în cîmp cu densitatea de suprafaţă:

$$L = \frac{1}{2} \int_S \rho_s V dA ;$$

Dacă sarcinile repartizate cu densitate de suprafaţă se găsesc pe suprafeţele a n conductoare, acestea sînt suprafeţe echipotenţiale, şi deci :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i \int_{S_i} \rho_s \, d\,A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

La sarcini punctuale şi la sarcini repartizate cu densitate de linie trebuie deosebite două cazuri: dacă sarcina punctuală q_i e presupusă adusă de la infinit în elemente dq_i, care se descarcă succesiv în punctul P_i, energia corespunzătoare e infinită, fiindcă potenţialul electrostatic e infinită în punctul P_i, din cauza termenului :

$$\frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_i}{R_i}$$

din expresiunea lui, care tinde către infinit cînd R_i tinde către zero. In acest caz, energia corespunzătoare repulsiei dintre elementele sarcinii punctuale devine infinită. Acest caz nu prezintă deci importanţă practică: dacă o sarcină adevărată nu ne e dată în natură ca sarcină punctuală, nu dispunem de energia necesară pentru a ne construi o astfel de sarcină. De aceea interesează numai cazul în care ne sînt date, la infinit, direct sarcini punctuale, pe care le luăm ca stare de referinţă în calculul energiei electrice în cazul sarcinilor punctuale. In acest caz, consideraţiile de mai sus se aplică dacă se determină numai energia de interacţiune dintre fiecare sarcină punctuală şi sistemul celorlalte sarcini. In expresiunea respectivă intervine deci în punctul fiecărei sarcini punctuale în parte, numai potenţialul electrostatic V_i al celorlalte sarcini (adică exclusiv potenţialul sarcinii q_i), şi deci termenii corespunzători din lucrul mecanic sînt :

$$(22) \qquad L_{int} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i'$$

Acest termen nu are decît aparent structura termenului referitor la sarcinile repartizate la suprafaţa conductoarelor, şi nu reprezintă energia totală, corespunzătoare aducerii în cîmp a tuturor elementelor de sarcină. De aceea nu ţinem seama de el şi presupunem că nu există sarcini punctuale. Aceleaşi consideraţii se pot face cu privire la sarcinile repartizate în densitate de tărie. Obţinem următoarea expresiune a energiei unui cîmp electrostatic.

$$(23)\quad W = \frac{1}{2}\int_V \rho V dv + \frac{1}{2}\int_{S_d} \sigma_s V dA + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \ ,$$

unde integrala de suprafaţă trebuie extinsă numai asupra suprafeţelor din dielectrici încărcate cu densitate de suprafaţă a sarcinii adevărate, fiindcă ultima sumă reprezintă integrala referitoare la suprafeţele conductoarelor din cîmp. Unitatea de energie în sistemul MKSC se numeşte joule (J).

Energia electrostatică a unui condensator care are capacitatea C şi ale cărui armături au sarcinile şi potenţialele q_1 şi $q_2 = -q_1$, V_1 şi V_2, de exemplu, se poate exprima folosind relaţia $q_1 = C(V_1 - V_2)$:

$$(23\ a)\quad W = \frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2) = \frac{1}{2}\, q_1(V_1-V_2) = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{1}{2}\, C(V_1-V_2)^2 \ .$$

Exemplu. Un condensator care are capacitatea C=1 F şi între ale cărui armături există diferenţa de potenţial $V_1-V_2 = 1$ V, are energia electrostatică de o jumătate de joule

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}\ J \ .$$

3.14. Forţele exercitate de cîmpul electrostatic asupra conductoarelor. Fie un cîmp electrostatic şi conductorul i din el. Pentru a calcula componenta F_i, în direcţia unui element de arc δs_i, a forţei rezultante $\bar{F}$ pe care cîmpul electric o exercită asupra conductorului i, procedăm cum urmează: menţinem toate conductoarele izolate, inclusiv conductorul i, şi dăm conductorului i o deplasare infinit mică şi geometric posibilă δs_i, adică o deplasare virtuală δs_i. Conductoarele fiind izolate, sarcinile lor rămîn constante, şi sistemul format din cîmp şi conductoare nu primeşte energie din exterior. Conform principiului de conservare a energiei, lucrul mecanic $\bar{F}\delta\bar{s}_i = F_i\delta s_i$, efectuat din forţa F în cursul deplasării virtuale, nu poate proveni deci, decît dintr-o scădere egală a energiei electrostatice în cursul deplasării virtuale la sarcină constantă. Dacă δW_q e deci această variaţie de energie, rezultă :

$$F_i\delta s_i = -\delta W_q = -\left(\frac{\partial W}{\partial s_i}\right)_q \delta s_i \ ,$$

unde indicele q arată că derivata energiei electrostatice în raport cu lungimea de arc s_i se face menţinînd sarcinile conductoarelor constante. Fiindcă această relaţie e valabilă, oricare ar fi variaţia δs_i, rezultă :

$$(24) \quad F_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial s_i}\right)_q$$

Proiecţia ortogonală F_i a forţei rezultante care se exercită asupra unui conductor în cîmpul electrostatic, pe direcţia unui element de arc δs_i, e deci egală şi de semn contrar cu derivata energiei electrostatice a cîmpului în raport cu lungimea de arc s_i, efectuată la sarcină constantă a conductoarelor.

Aplicaţie. De exemplu, proiecţia F_i, pe direcţia unui element de arc δs_i, a forţei care se exercită asupra unei armături a unui condensator care are capacitatea C şi ale cărei armături au sarcinile adevărate q şi -q, e :

$$(24a) \quad F_i = \frac{\partial}{\partial s_i}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)_q = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial \frac{1}{C}}{\partial s_i} = \frac{q^2}{2C^2}\cdot\frac{\partial C}{\partial s_i} = \frac{(V_1-V_2)^2}{2}\frac{\partial C}{\partial s_i}$$

In cazul condensatorului plan, de exemplu, capacitatea are expresiunea (36 a) :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{Kg}$$

unde g e distanţa dintre armături şi A e aria simplă a unei armături. Componenţa forţei care se exercită asupra unei armături, considerată într-o direcţie δs_i care formează unghiul cu normala pe cele două armături, e deci :

$$F_i = \frac{K^2 g^2}{\varepsilon_0^2 A^2}\frac{q^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 A}{k}\frac{\partial \frac{1}{g}}{\partial s_i} = -\frac{q^2}{2}\frac{k}{\varepsilon_0 A}\frac{\partial g}{\partial s_i} = -\frac{q^2 k}{2\varepsilon_0 A}\cos\alpha$$

Componenţa F_i a forţei e deci maximă pentru $\alpha = 0$, adică în direcţia normală pe armături, şi e negativă adică îndirijată în sens contrar măririi distanţei g. Rezzultă că între cele două armături se exercită o forţă de atracţiune normală pe ele :

Scanned with OKEN Scanner

$$F = -\frac{q^2}{2}\,\frac{K}{\varepsilon_0 A}\,\frac{\partial g}{\partial g} = \frac{q^2 K}{2\varepsilon_0 A} = -\frac{q^2}{2Cg} = -\frac{C(V_1-V_2)^2}{2g}$$

Măsurînd forţa F, distanţa g şi calculînd capacitatea C, se poate determina deci diferenţa de potenţial $(V_1 - V_2)$.

Exemplu: Forţa de atracţiune dintre armăturile unui condensator plan între care există diferenţa de potenţial $V_1-V_2 = 220$ V, capacitatea $C = 10^{-6}$ f şi distanţa $g = 0{,}1$ mm $= 10^{-4}$ m se obţine punînd $\alpha = 0$ şi e :

$$F = \frac{10^{-6}\ 220^2}{2.10^{-4}} = 242\ N = 24{,}5\ kg\ F$$

3.15. Electrometrul absolut al lui Kelvin. Electrometrul se compune dintr-o armătură circulară, inferioară fixă, şi o armătură superioară paralelă cu ea, circulară dar de diametru mai mic şi înconjurată de un inel de gardă fix (o coroană circulară) situat aproximativ în planul ei. Armătura superioară e suspendată la unul din braţele unei balanţe (Fig.15a), care poartă la celălalt braţ un platan pentru greutăţile folosite spre a echilibra forţa de atracţiune dintre armăturile puse sub tensiunea de măsurat. Inelul de gardă evită efectul de margine, în lipsa lui cîmpul electric de la marginea condensatorului nu ar fi uniform şi capacitatea nu s-ar putea calcula cu ajutorul formulei simple de mai sus, care e valabilă numai în lipsa efectului de margine. Dacă electrometrul are inel de gardă, capacitatea variabilă care intervine în expresiunea forţei de atracţiune dintre armătura de jos şi cea de sus, puse sub diferenţa de potenţial de măsurat se calculează cu formula simplă de mai sus, în care aria A este aria simplă a armăturii de sus.

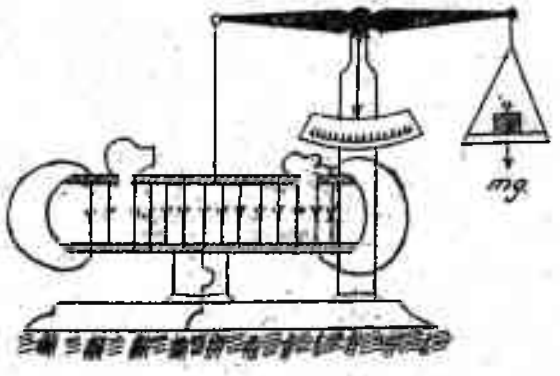


Fig. 15 a
Electrometrul absolut al lui Kelvin

Dacă greutatea de care e nevoie pentru echilibrarea electrometrului este G = mg urmează :

$$F_s = -\frac{\varepsilon_0 A}{2K \cdot g^2}(V_1 - V_2)^2 = -G$$

în newtoni (N) adică diferenţa de potenţial de măsurat este

$$V_1 - V_2 = g\sqrt{\frac{2KG}{\varepsilon_0 A}}$$

2.16 Momentele statice exercitate de cîmpul electrostatic asupra conductoarelor. Dacă C_i e momentul static al forţelor care se exercită asupra unui conductor în cîmpul electrostatic în raport cu o axă determinată şi dacă se dă conductorului o rotaţie virtuală infinitezimală cu unghiul $\delta\alpha_i$, în jurul axei lucrul mecanic elementar pe care-l efectuează C_i are expresiunea $C_i\delta\alpha_i$. El poate proveni numai dintr-o scădere egală a energiei electrostatice în cursul rotaţiei virtuale presupusă efectuată la sarcini constante ale conductoarelor, adică :

$$C_i\delta\alpha_i = -\delta W_q = -\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\right)_q \delta\alpha_i$$

Fiindcă această relaţie e valabilă, oricare ar fi variaţia $\delta\alpha$ rezultă :

$$(25) \qquad C_i = -\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\right)_q$$

De exemplu, momentul static al forţelor care se exercită asupra unei armături a unui condensator electric care are capacitatea C şi ale cărui armături sînt încărcate cu sarcini adevărate egale şi de nume contrare q şi -q, în raport cu o axă faţă de care se consideră unghiul de rotaţie $\delta\alpha_i$ al armăturii, e

$$(25\ a) \quad C_i = -\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{q^2}{2C}\right)_q = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial\frac{1}{C}}{\partial\alpha_i} = \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial\alpha_i} = \frac{(V_1-V_2)^2}{2}\frac{\partial C}{\partial\alpha_i}$$

Momentul diferă de zero de exemplu cînd armăturile nu sînt faţă în faţă (fig.15 b).

Alegem un condensator format dintr-un cadran fix(1) şi o paletă mobilă (P), care poate roţi în faţa lui cu originea

unghiurilor α după dreapta OO' (fig 15 b), şi determinăm poziţia paletei P prin unghiul α pe care-l formează axa mare a ei cu O'O. Alegem conturul paletei P astfel, încît între $\varphi = 0$ şi $\varphi = \frac{\pi}{4}$, capacitatea condensatorului să varieze proporţional cu α, P fiind factorul de proporţionalitate.

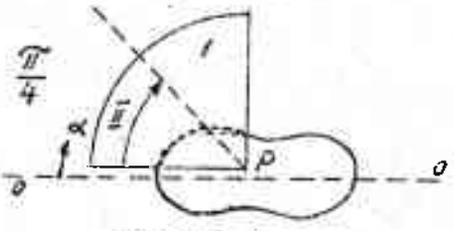


Fig.15 b

Condensator cu cadran fix şi paletă mobilă.

Dacă C_α şi C_0 sînt capacităţile condensatorului în poziţiile α şi 0 ale paletei, avem $C_\alpha = C_0 + P\alpha$ şi momentul care se exercită asupra plăcii rezultă din (25):

$$C_1 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2} \frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2} P ,$$

adică e proporţional cu pătratul diferenţei de potenţial dintre armături.

Dacă paleta mobilă P suspendată de un fir de torsiune, care se răsuceşte şi exercită asupra paletei, în poziţia α, cuplul antagonist de natură elastică

$$C_a = - M\alpha ,$$

rezultă că paleta ajunge în echilibru sub acţiunea momentului C_1 şi C_a, cînd unghiul are valoarea care rezultă din condiţiunea $C_1 + C_a = 0$, adică pentru valoarea

$$\alpha = \frac{P}{2M} (V_1 - V_2)^2$$

Dacă un astfel de dispozitiv se etalonează cu o tensiune $(V_1 - V_2)$ cunoscută, pentru a se determina mărimea $\frac{P}{2M}$ el permite să se măsoare diferenţele de potenţial, şi poate constitui deci, în principiu, un electrometru. Dacă paleta are un resort pentru cuplul antagonist ea poate fi echipată cu un ac care se roteşte în faţa unui cadran, al cărui diviziuni pot indica direct tensiunea în volţi (voltmetru electrostatic).

2.17. Electrometrul cu cadrane. Electrometrul se compune din patru armături-cadrane dispuse simetric şi în acelaşi plan în jurul unui centru, în faţa cărora, suspendată de un fir de torsiune vertical, se poate roti o paletă în forma de lemniscată, suspendată de fir şi echipată cu un ac

care se mişcă în faţa unei scări divizate, sau cu o oglindă şi care serveşte pentru indicarea deviaţiei α a paletei P din poziţia ei medie. Cadranele opuse, adică 1 şi 1' de o parte şi 2 şi 2' de altă parte, sînt egale între ele cu cîte un fir conductor. Conturul paletei P e ales astfel încît capacitatea ei faţă de perechile de cadrane 1,1' şi 2,2' variază proporţional cu unghiul ei de deviaţie din poziţia mijlocie. Cu sensul pozitiv a lui α în sens drept şi cu capacitatea C_0 a paletei în poziţia ei medie faţă de 1,1' şi (din cauza simetriei) faţă de 2,2'. putem scrie la o poziţie a paletei, capacitatea ei faţă de cele două armături 1 + 1' sub forma

$$C_1\alpha = C_0 + P\alpha$$

şi capacitatea ei faţă de cele două armături 2 + 2' sub forma:

$$C_{2\alpha} = C_0' - P\alpha$$

Electrometrul se foloseşte pentru măsurarea tensiunilor electrice. Se folosesc trei metode pentru măsurarea tensiunilor. Alegem deci un caz general, din care să se poată deduce prin particularizare, formule aplicabile celor trei metode. Presupunem că, printr-un mijloc oarecare, punem cadranele 1 şi 1' legate între ele printr-un fir conductor, la tensiunea U_1, faţă de carcasa intrumentului, cadranele 2,2' la U_2 şi paleta la potenţialul U_a şi ne propunem să calculăm unghiul cu care deviază paleta sub influenţa momentelor motoare, care se exercită în aceste condiţiuni asupra ei, şi sub influenţa momentului antagonist C_a .

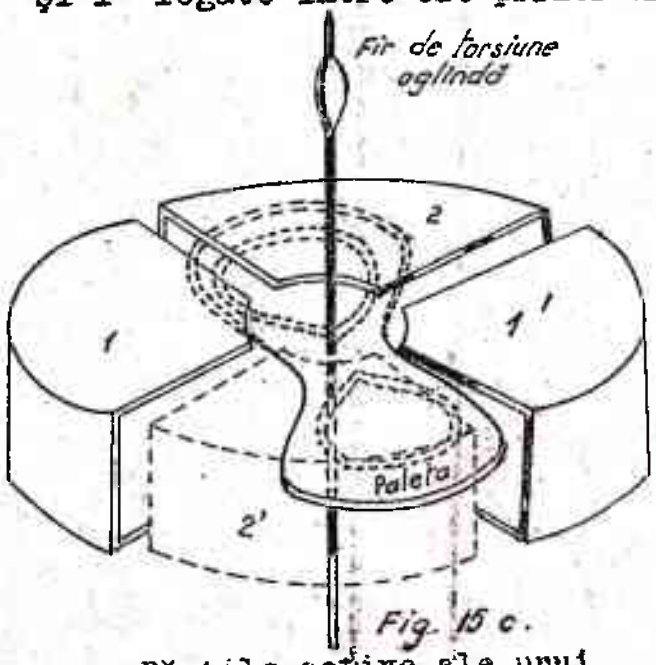


Fig. 15 c.

Părţile active ale unui electrometru cu cadrane.

$$C_a = - M_0\alpha$$

pe care-l exercită asupra ei firul răsucit în

poziţia a plăcii. Momentul motor C_1 pe care-l exercită armăturile 1,1' asupra paletei e, conform formulei (25)

$$C_1 = \frac{(U_a - U_1)^2}{2} \cdot \frac{\partial C_{1\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{(U_a - U_1)^2}{2} \cdot P$$

Momentul pe care-l exercită armăturile 2,2' asupra paletei e :

$$C_2 = \frac{(U_a - U_2)^2}{2} \cdot \frac{C_{2\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{(U_a - U_2)^2}{2} \cdot P$$

Momentul motor total care se exercită asupra paletei e deci

$$C = C_1 + C_2 = \frac{P}{2} (U_a - U_1)^2 - (U_a - U_2)^2$$

şi e constant cînd U_a, U_1, U_2 sînt constanţi şi daţi. Paleta se opreşte în poziţia în care cuplul antagonist al firului C_a egalează cuplul motor C. Unghiul ei de deviaţie se calculează deci în relaţia: $C_a + C = 0$, sau din relaţia :

$$M_o \alpha = \frac{P}{2} (U_a - U_1)^2 - (U_a - U_2)^2$$

adică are valoarea

$$(a) \quad \alpha = \frac{P}{M_o} (U_2 - U_1)(U_a - \frac{U_1 + U_2}{2}) = A(U_2 - U_1)(U_a - \frac{U_1 + U_2}{2})$$

unde $A = \frac{P}{M_o}$ e o constantă a instrumentului. Din această formulă generală se poate calcula una din necunoscutele U_a, U_1, U_2, cînd se cunosc două dintre ele, fiindcă unghiul α e indicat de electrometru. In cele trei legături particulare ale cadranelor şi paletei folosite curent, se poate măsura o tensiune şi fără a trebui să se cunoască două tensiuni. Ele folosesc metoda Joubert, folosită curent, metoda de zero şi metoda tensiunii electrice auxiliare sau a potenţialului auxiliar.

In metoda Joubert sau metoda omostatică (Fig.15-d) se leagă paleta printr-un fir metalic cu cadranele 2,2', adică avem :

$$(b) \quad \alpha = \frac{A}{2} (U_1 - U_2)^2$$

Fasc.13. BAZELE ELECTROTEHNICII, cda. nr.77/1955.

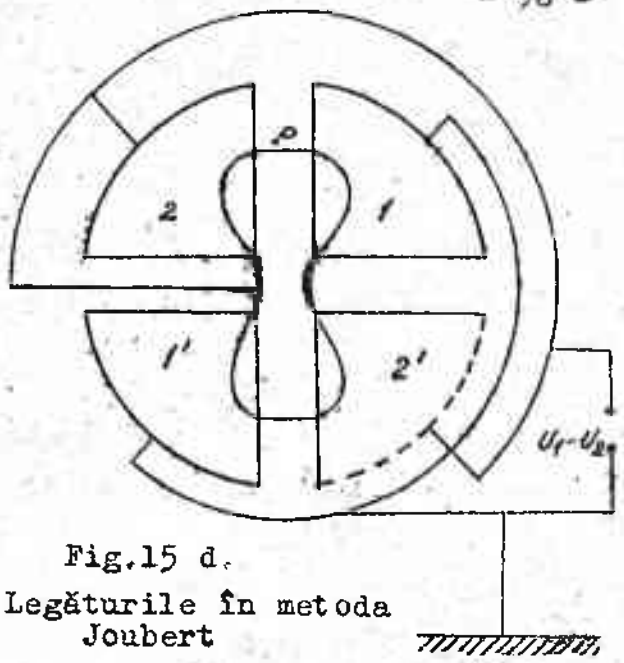


Fig.15 d.
Legăturile în metoda Joubert

unde U_1 şi U_2 sînt tensiunile cadranelor 1,1' şi 2,2' faţă de carcasă.

Pentru a măsura tensiunea (U_1-U_2) dintre bornele unei pile electrice, sau ale unui acumulator electric, legăm bornele la cele două perechi de cadrane, citim deviaţia α şi, din formula (b) deducem

$$(c)\quad (U_1 - U_2) = \sqrt{\frac{2\alpha}{A}} = \sqrt{\frac{2}{A}}\sqrt{\alpha} = C_J\sqrt{\alpha}$$

Pentru a obţine tensiunea cu un electrometru care nu are indicată în dreptul fiecărei deviaţii de pe scară direct valoarea $C_J\sqrt{\alpha}$, se construieşte o curbă care dă, la fiecare α, diferenţa $(U_1 - U_2)$ corespunzătoare (curba caracteristică). In metoda Joubert, această curbă e o parabolă.

In metodele de zero se variază în aşa fel o mărime măsurabilă, încît acul instrumentului să rămînă la graduaţia zero. In aceste condiţiuni se determină valoarea mărimii de măsurat în funcţiune de valoarea cunoscută pe care trebuie să o aibă mărimea variabilă, pentru ca acul să indice o deviaţie nulă. In cazul electrometrului cu cadrane (fig.15 e), metoda de zero se realizează, legînd armăturile 1,1' la carcasă, adică făcînd $U_1 = 0$, stabilind de exemplu cu o pilă electrică, o tensiune U_a între paleta mobilă şi cadranele 1,1' şi punînd cadranele 2,2' faţă de 1,1', la tensiunea U_2, care trebuie măsurată. Pentru $U_1 = 0$ rezultă din (a) :

$$\alpha = AU_2\left(U_a - \frac{U_2}{2}\right)$$

Variind tensiunea U_a pînă cînd acul indică

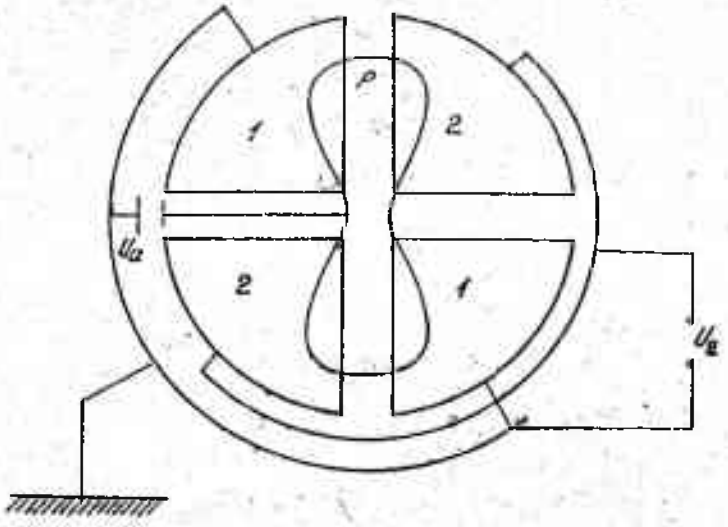


Fig. 15 e
Legăturile în metoda de zero

o deviaţie nulă, adică $\alpha = 0$. Fiindcă $AU_2 \neq 0$, rezultă pentru tensiunea de măsurat $U_z = U_2 - U_1$, relaţia

(d) $(U_2 - U_1) = U_z = 2U_a$

Dacă se cunoaşte U_a, se poate calcula deci U_2.

In metoda potenţialului auxiliar (metoda electrostatică) cu legăturile din figura alăturată, se pune la carcasă mijlocul bateriei, a cărei tensiune $(U_1 - U_2)$ trebuie măsurată. Rezultă deci $U_1 = -U_2$ (pentru că tensiunea electrică e uniform repartizată pe elementele bateriei). Obţinem din formula (a).

(e) $\alpha = 2 A U_1 U_a$

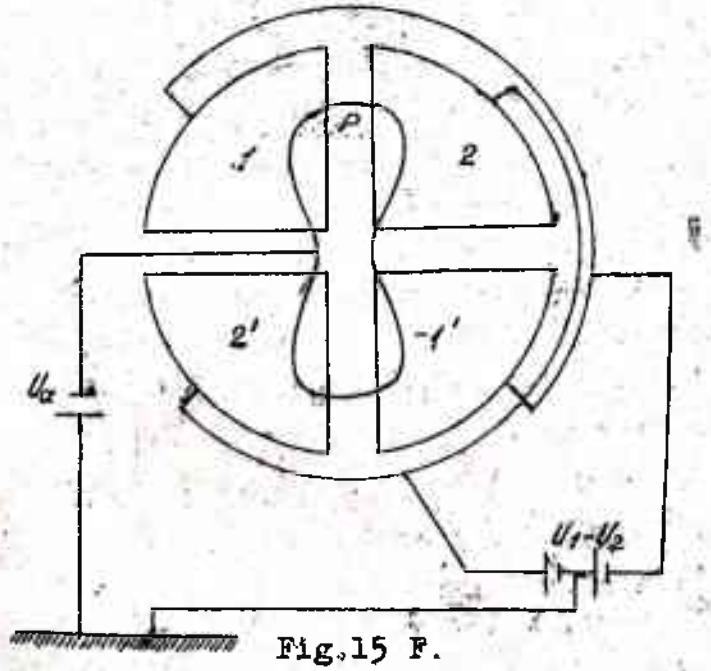


Fig. 15 F.
Legăturile în metoda potenţialului auxiliar.

sau

$$U_1 = \frac{\alpha}{2 A U_a}$$

şi deci

$$(U_1 - U_2) = 2U_1 = \frac{\alpha}{A U_a} = K\alpha$$

unde K e o constantă pentru U_a constant şi se determină prin etalonare. Se poate construi şi în cazul acesta o curbă caracteristică a electrometrului, care dă grafic tensiunea $(U_1 - U_2)$ în funcţiune de α. Relaţia dintre $(U_1 - U_2)$ şi α fiind

lineară, curba caracteristică e o dreaptă. Electrometrul cu cadrane a lui Thomson se construieşte şi cu mai multe celule adică se montează pe acelaşi ax mai multe palete mobile, fiecare situată într-o celulă formată din cadrane ca la electrometrul simplu. Se măresc astfel momentele care se exercită asupra paletelor mobile. Instrumentul se foloseşte şi pentru măsurarea tensiunilor electrice variabile.

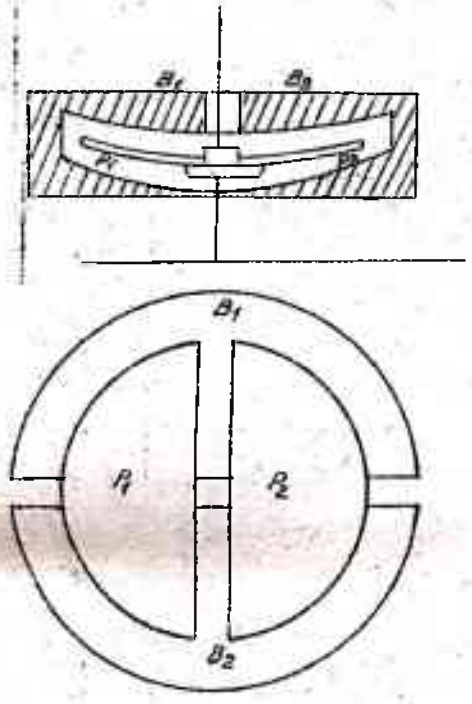


Fig. 15 g
Părţile active ale unui electrometru cu binante.

2.18. Electrometrul cu binante. Principiul lui e acelaşi ca al electrometrului cu cadrane al lui Thomson. Se compune din două binante fixe B_1 şi B_2, masive, fiecare avînd o cavitate în care poate intra o jumătate de calotă sferică. Două palete mobile P_1 şi P_2 în formă de calote sferice, pentru a avea un moment de inerţie cît mai mic şi o capacitate cît mai mare faţă de binante, sînt suspendate bifilar şi intră în cavităţile binantelor ca în fig. 15 g. Admitem mai întîi condiţiuni generale de funcţionare a electrometrului, pentru ca apoi prin particularizare, să urmărim condiţiunile lui de funcţionare în metode speciale de măsură. Electrometrul satisface condiţiunea că, la devierea paletelor P_1 şi P_2 cu un unghi α din poziţia lor mijlocie, avem variaţii care depind liniar de α, ale capacităţilor dintre paletele P_1 şi P_2. Cu sensul pozitiv pentru α în sens drept avem pentru aceste capacităţi $C_{P_1B_1}$, $C_{P_1B_2}$, $C_{P_2B_1}$ şi $C_{P_2B_2}$ în poziţia α:

$$C_{P_1B_1} = C_o + P\alpha \; ; C_{P_1B_2} = C_o - P\alpha \; ; \; C_{P_2B_1} = C_o - P\alpha \; ; \; C_{P_2B_2} = C_o + P\alpha \; ,$$

unde C_o e capacitatea în poziţia $\alpha = 0$ a uneia din paletele

P_1, P_2 față de unul din binantele B_1 B_2, iar P e o constantă.

Presupunem că fiecare dintre piesele P_1, P_2, B_1, B_2 are altă tensiune, și fie U_{P_1}, U_{P_2}, U_{B_1}, U_{B_2} tensiunile dintre ele și carcasă. Momentul motor care se exercită asupra celor două palete legate rigid una cu alta e :

$$C = \frac{(U_{P_1}-U_{B_1})^2}{2} \times \frac{C_{P_1B_1}}{\partial\alpha} + \frac{(U_{P_1}-U_{B_2})^2}{2} \times \frac{C_{P_1B_2}}{} + \frac{(U_{P_2}-U_{B_1})^2}{2} \times$$

$$\times \frac{\partial C_{P_2B_1}}{\partial\alpha} + \frac{(U_{P_2}-U_{B_2})^2}{2} \times \frac{\partial C_{P_2B_2}}{\partial\alpha}$$

adică :

$$C = \frac{P}{2}\left[(U_{P_1}-U_{B_1})^2-(U_{P_1}-U_{B_2})^2-(U_{P_2}-U_{B_1})^2+(U_{P_2}-U_{B_2})^2\right]$$

și deci e independent de unghiul de derivație α, și constant la tensiuni constante. Cînd deviază paletele, suspensiunea bifilară exercită un cuplu antagonist care e proporțional cu unghiul de deviație: $C_a = -M_o\alpha$. La o anumită deviație, cuplul antagonist va egala deci momentul motor, și paletele mobile se opresc: unghiul de deviație se calculează din condițiunea: $C + C_a = 0$, adică are expresiunea :

$$\alpha = \frac{P}{2M_o}(U_{P_1}-U_{B_1})^2 - (U_{P_1}-U_{B_2})^2 - (U_{P_2}-U_{B_1})^2 + (U_{P_2}-U_{B_2})^2$$

sau, dacă se dezvoltă pătratele și se reduc termenii asemenea:

$$(F)\quad \alpha = \frac{P}{2M_o}\left[(U_{P_2}-U_{P_1})(U_{B_1}-U_{B_2})\right] = A(U_{P_2}-U_{P_1})(U_{B_1}-U_{B_2})$$

unde $A = \frac{P}{M_o}$ e o constantă a instrumentului.

In metoda Joubert pentru măsurarea tensiunilor cu electrometrul cu binante, se leagă prin fire conductoare paleta P_1 cu binantul B_2 și paleta P_2 cu binantul B_1, ca în schema alăturată. Fie $(U_1 - U_2)$ tensiunea de măsurat.

Avem :

$$U_{P_1} = U_{B_2} = U_1 \quad :$$

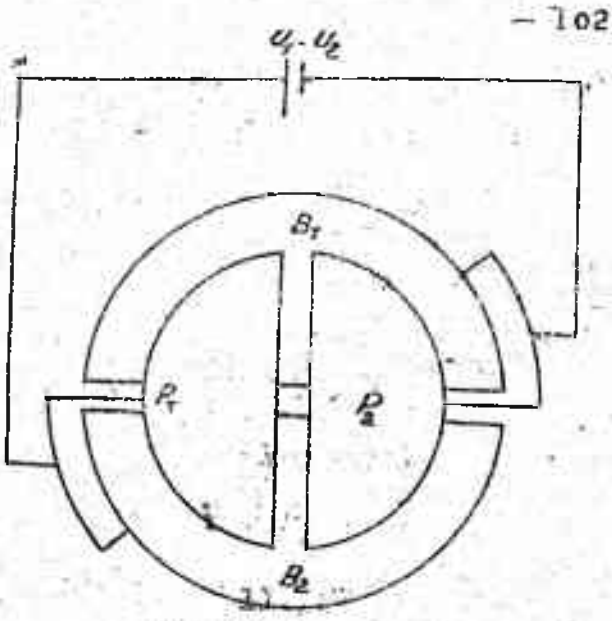


Fig.15 h
Legăturile în metoda Joubert

$$U_{P_2} = U_{B_1} = U_2$$

şi rezultă din formula

$$(2)\alpha = \frac{P}{K_0}(U_1 - U_2)^2 = A(U_1 - U_2)^2$$

deducem

$$(U_1 - U_2) = \sqrt{\frac{1}{A}}\sqrt{\alpha} = K\sqrt{\alpha},$$

unde K e o constantă a instrumentului. Curba caracteristică e metodei e o parabolă, ca şi în cazul metodei Joubert folosită la electrometrul cu cadrane.

3. MOMENTUL ELECTRIC ŞI POLARIZAŢIA ELECTRICĂ

3.1. Starea de polarizaţie electrică a corpurilor

Stările electrice ale corpurilor în care densitatea lor de sarcină adevărată e nulă se împart în două clase: Prima clasă cuprinde stările în care nu se exercită nici un cuplu şi nici o forţă de natură electrică asupra corpurilor cu densitate nulă a sarcinii adevărate, introduse în cîmpuri electrice omogene sau neomogene, cea de a doua clasă cuprinde stările în care se exercită eventual un cuplu de natură electrică asupra acestor corpuri, introduse într-un cîmp electric şi orientate potrivit, iar cînd sînt introduse într-un cîmp electric neuniform şi sînt orientate potrivit, se exercită asupra lor şi forţă de natură electrică. Corpurile fără sarcină adevărată care se găsesc în prima clasă de stări se numesc corpuri neutre nepolarizate electric iar cele care se găsesc în cea de a doua clasă de stări, se numesc corpuri neutre polarizate electric. Corpurile polarizate sau nepolarizate electric, sau părţile lor, pot fi, în acelaşi timp, şi încărcate cu sarcină ade-

vărată.Starea corpurilor mici polarizate electric se descrie cu ajutorul unei mărimi de stare vectoriale, care se numeşte moment electric,iar starea locală a corpurilor masive polarizate electric se descrie cu ajutorul densităţii de volum a momentelor electrice, care se numeşte polarizaţie electrică. Starea de polarizaţie electrică - şi deci însăşi polarizaţia electrică - se numeşte temporară,respectiv permanentă, după cum depinde sau nu depinde de intensitatea locală a cîmpului electric.

3.2.Momentul electric permanent Dacă se introduce într-un cîmp electric un mic corp de probă neîncărcat cu sarcină adevărată, format dintr-un cristal emimorf al unui dielectric(de exemplu un cristal de turmalină sau de cuarţ), ţinut intins sau comprimat(v. fig. 16), se exercită, în general, asupra lui un cuplu, indiferent dacă se găseşte într-un cîmp electric uniform sau neuniform, se exercită asupra lui, în general, şi o forţă rezultantă dacă se găseşte într-o regiune în care cîmpul e neuniform ; în acest caz cuplul e suma momentelor statice în raport cu un punct de pe forţa rezultantă. In această stare corpul de probă e polarizat electric permanent. Experienţa arată că întinderea şi compresiunea nu sînt singurele mijloace prin care asa-numite cristale pot fi polarizate permanent, de exemplu, şi prin încălzire şi răcire.Experienţa arată că cuplul $\vec{C}$, care se exercită în vid,în cîmpul electric, asupra unui mic corp polarizat electric permanent, depinde atît de poziţia şi de orientarea corpului în cîmp, cît şi de starea lui de polarizaţie. Corpul polarizat are o axă privilegiată,numită axa sa electrică permanentă (v. fig.17); aceasta e axa în jurul căreia s-ar putea roti corpul, în orice punct din cîmp s-ar găsi şi oricare ia-r fi orientarea, fără ca să varieze cuplul care s-ar exercita asupra lui; cuplul variază dacă se

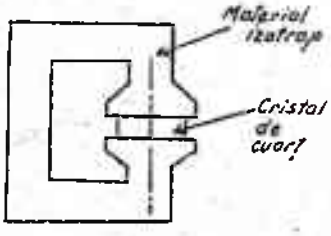


Fig.16.
Cristal de cuarţ polarizat piezoelectric.

roteşte corpul în jurul oricărei alte axe; el îşi schimbă numai sensul dacă se schimbă/ sensul axei electrice permanente, prin rotirea ei într-un plan, cu două unghiuri drepte. Dacă micul corp polarizat permanent se poate roti liber, axa lui electrică permanentă ia în fiecare punct, direcţia locală a intensităţii cîmpului electric în vid; aceasta arată că momentul static care se exercită asupra lui în ultima poziţie e nul. Una din aceste poziţii de echilibru ale axei electrice permanente e labilă, iar cea de a doua e stabilă. Se convine a se considera axa electrică polară cu sensul ei care coincide cu sensul intensităţii cîmpului cînd corpul ocupă în cîmp poziţia sa de echilibru stabil. Într-un punct al unui cîmp electric dat, variem orientarea axei electrice permanente a corpului de probă, constatăm că momentul static are o orientare care e asociată după regula burghiului drept sensului de rotaţie care suprapune, după drumul cel mai scurt, orientarea axei electrice permanente peste orientarea locală a cîmpului electric; mai constatăm că valoarea lui absolută e proporţională cu valoarea absolută a sinusului unghiului α dintre cele două orientări. Fie deci $\bar{u}$ un versor perpendicular pe vectorul $\bar{u}_p$ al axei electrice permanente şi pe versorul $\bar{u}_E$ al intensităţii locale $\bar{E}_v$ a cîmpului electric în vid, astfel încît $\bar{u}_p$, $\bar{u}_E$ şi $\bar{u}$ să determine un triedru drept şi fie C_M valoarea absolută maximă a momentului într-un punct dat. Momentul $\bar{C}$ al forţelor în poziţia α a axei electrice permanente e, în aceste condiţiuni:

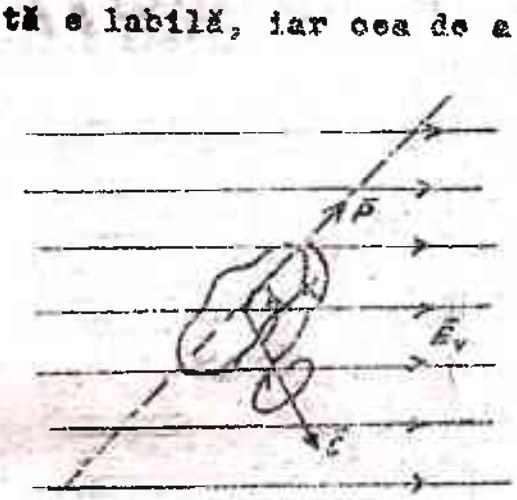


Fig. 17
Cuplul care se exercită asupra unui corp polarizat electric.

$$(a) \qquad \bar{C} = \bar{u}\, C_M \cdot \sin\alpha = \bar{u}_p \times \bar{u}_E C_M$$

Fiindcă $\bar{u} \sin\alpha = \bar{u}_p \times \bar{u}_E$.

Să considerăm un corp cu stare de polarizaţie dată(corp dat,supus unei compresiuni sau fracţiuni date, la temperatură dată. etc).Experienţa arată că în aceste condiţiuni cuplul care se exercită asupra corpului de probă, e proporţional cu vectorul cîmp electric în vid. El variază şi cu starea de polarizaţie a corpului.Cuplul maxim e deci egal cu produsul unei mărimi scalare p_p, care depinde numai de starea de polarizaţie a corpului, prin valoarea absolută a vectorului local $\bar{E}_v$ al cîmpului electric în vid, şi deci:

$$(a') \quad \bar{C} = \bar{u}_p \times \bar{u}_{\bar{E}p_p} \bar{E}_v = p_p \bar{u}_p \times \bar{E}_p$$

Fiindcă $\bar{u}_p$ şi $\bar{E}_p$ depind numai de starea de polarizaţie electrică a corpului, e util ca aceste două mărimi să fie strînse într-o singură mărime vectorială:

$$(b) \quad \bar{p}_p = \bar{u}_p p_p,$$

care se numeşte momentul electric permanent al corpului de probă. Se obţine astfel :

$$(27) \quad \bar{C} = \bar{p}_p \times \bar{E}_v$$

Cuplul care se exercită, în vid,într-un cîmp electric, asupra unui mic corp de probă dielectric e deci egal cu produsul vectorial al unei mărimi de stare vectoriale $\bar{p}_p$,care depinde numai de starea corpului şi se numeşte momentul său electric permanent, prin intensitatea locală $\bar{E}_v$a cîmpului electric în vid.

In general un corp care are moment electric permanent se numeşte corp polarizat electric permanent.

Cuplul care se exercită asupra corpurilor polarizate electric e maxim cînd momentul electric permanent e perpendicular pe vectorul cîmp electric $\bar{E}_v$,şi nul cînd momentul e paralel cu $\bar{E}_v$. De aceea prin măsurarea cuplului, nu se poate determina momentul electric permanent al corpurilor,dacă acesta are incidental direcţia locală a vectorului cîmp electric. De aceea e important că din legea de conservare a energiei şi din expresiunea (27),

a cuplului urmează că, în cîmpurile electrice neuniforme, se exercită şi o forţă asupra corpurilor polarizate permanent, şi că aceasta nu e nulă cînd momentul lor electric permanent are direcţia locală a vectorului cîmp electric. După definiţia energiei şi conform legii de conservare a energiei, creşterea elementară dW a energiei unui sistem fizic în cursul unei transformări elementare de stare, e egală cu suma dintre căldura elementară dQ cedată sistemului, lucrul mecanic elementar dL efectuat din exterior asupra sistemului, şi dintre energia elementară dW_r primită de sistem din exterior (dacă există o circulaţie a energiei în cîmp), cele patru mărimi dW, dQ, dL şi dW_r fiind referitoare la un acelaşi timp şi măsurate în aceleaşi unităţi, ele sînt contate pozitive, dacă energia sistemului creşte, dacă lucrul mecanic e efectuat de exterior asupra sistemului, respectiv dacă exteriorul cedează sistemului energie, şi negative în cazul contrar:

$$(c) \quad dW = dQ + dL + dW_r.$$

Considerînd numai transformări de stare în care nu intervin schimburi de căldură cu exteriorul, rezultă

$$(d) \quad dW = dL + dW_r$$

Din această expresiune s-ar putea calcula creşterea elementară dW a energiei în cursul unei transformări elementare a unui corp de probă cu moment permanent, în funcţiune de lucrul mecanic efectuat asupra lui în cursul transformării, dacă s-ar cunoaşte energia dW_r primită de sistem prin efectul circulaţiei energiei în cîmp. Din legea energiei referitoare la cîmpul electromagnetic, pe care vom enunţa-o mai tîrziu, rezultă că $dW_r = 0$ în toate cîmpurile electrice irotaţionale (potenţiale). În aceste cîmpuri unei variaţii cu $d\alpha$ a unghiului dintre momentul electric permanent $\bar{p}_p$ al micului corp de probă, presupus în vid îi corespunde lucrul mecanic $dL = p_p E_v \sin\alpha d\alpha$, de efectuat asupra corpului polarizat permanent. Astfel se măreşte cu aceeaşi cantitate $dW_p = p_p E_v \sin\alpha d$ energia W_p a sistemului format din cîmpul electric şi corpul cu moment electric permanent, în raport cu starea în

care momentul corpului avea orientarea sa iniţială în cîmpul electric. Energia corpului cu moment electric permanent, în cîmpul electric care are vectorul cîmp electric în vid $\bar{E}_v$, e deci:

$$(e)\quad W_p = \int dW_p = \int \bar{p}_p E_v \cdot \sin\alpha \, d\alpha = -\bar{p}_p E_v \cos\alpha + C(r) = -\bar{p}_p \bar{E}_v + C(r)$$

în raport cu starea sa în care $\bar{p}_p$ era paralel cu o orientare locală în cîmpul electric în vid. În ultimul termen, $C(r)$ e o mărime care poate depinde de poziţia în cîmp, dar nu depinde de p_p şi de $\bar{E}_v$. Această mărime $C(r)$ e constantă. În adevăr asupra unui sistem format din două corpuri cu momente electrice egale şi antiparalele nu se exercită cuplu rezultant, şi deci:

$$W = (-\bar{p}_p \bar{E}_v + C') + (\bar{p}_p \bar{E}_v + C') = \text{const, adică } C' = \text{const.}$$

Această constantă e nulă dacă se alege potrivit starea de referinţă faţă de care se consideră energia. Deci, putem baza consideraţiile pe următoarea expresiune a energiei:

$$(F)\quad W = -\bar{p}_p \bar{E}_v$$

Forţa $\bar{F}_{pv}$ care se exercită în cîmpul electric din vid asupra corpului polarizat se obţine egalînd lucrul mecanic interior $\bar{F}_{pv}\, d\bar{r}$, care se efectuează în cîmp asupra corpului cînd acesta se deplasează cu $d\bar{r}$ fără să-i varieze orientarea momentului în raport cu $\bar{E}_v$ (pentru ca cuplul să nu efectueze lucrul mecanic), cu scăderea corespunzătoare a energiei (nu cu creşterea ei, fiindcă lucrul mecanic nu e efectuat din exterior asupra sistemului format din cîmp şi corp):

$$(g)\quad \bar{F}_{pv} d\bar{r} = -\delta W = d(\bar{p}_p \bar{E}_v) = d\bar{r}\ \text{grad}\ (\bar{p}_p \bar{E}_v) =$$

$$= d\bar{r}\left[(\bar{p}_p \text{grad})\bar{E}_v + \bar{p}_p \times \text{rot}\ \bar{E}_v\right]$$

Fiindcă $d\bar{r}$ e arbitrar, rezultă

$$(h)\quad \bar{F}_{pv} = \text{grad}(\bar{p}_p \bar{E}_v) = (\bar{p}_p\ \text{grad})\ \bar{E}_v + \bar{p}_p \times \text{rot}\ \bar{E}_v$$

fiindcă $\bar{p}_p = \text{const.}$

Forţa $\bar{F}_{pv}$ e nulă cînd momentul $\bar{p}_p$ e perpendicular pe $\bar{E}_v$, şi maximă cînd $\bar{p}_p$ e paralel cu $\bar{E}_v$, avînd în acest ultim caz, sensul în care creşterea, respectiv scăderea, mărimii $\bar{E}_v$ e maximă, după cum $\bar{p}_p$ e omoparalel, respectiv antiparalel cu $\bar{E}_v$.

Această relaţie permite deci, să se determine momentul electric permanent în cîmpul neuniform, chiar dacă acesta are direcţia locală a cîmpului. În cîmpul uniform forţa este însă nulă.

Consideraţia de mai sus fiind valabilă dacă rot $\bar{E}_v = 0$, rezultă:

$$(28) \qquad \bar{F}_{pv} = (\bar{p}_p \text{grad})\, \bar{E}_v$$

Sub forma (28) expresiunea forţei e valabilă şi în cîmpurile electrice rotaţionale fiindcă în acestea valoarea dW_r a energiei primite prin efectul circulaţiei energiei în cîmp, e egală cu termenul $-d\bar{r}(\bar{p}_p \times \text{rot}\, \bar{E}_v)$ din relaţia (g).

Forţa $\bar{F}_{pv}$ care se exercită în cîmpul electric asupra unui mic corp polarizat diferă esenţial de forţa $\bar{F}_{qv}$ care se exercită în cîmp asupra unui mic corp încărcat cu sarcină adevărată. În adevăr, într-un punct dat al unui cîmp electric constant, forţa care se exercită asupra corpului polarizat electric permanent, e nulă în cîmpul uniform, iar în cîmpul neuniform ea depinde şi de orientarea momentului său electric $\bar{p}_p$ şi de orientarea şi valoarea absolută a creşterii maxime a vectorului cîmp electric în vid $\bar{E}_v$. Ea nu depinde numai de valoarea locală a acestui vector cîmp, spre deosebire de forţa $\bar{F}_{qv}$ care se exercită asupra unui corp încărcat cu sarcină adevărată, care depinde numai de valoarea locală a vectorului cîmp electric în vid, şi nu e deci nulă nici în cîmpul electric uniform. Cînd momentul electric e omoparalel cu intensitatea locală a cîmpului, forţa asupra corpului polarizat e dirijată spre regiunile de cîmp mai intens, cum rezultă din (28).

Se arată experimental că şi corpurile care au moment electric permanent produc în jurul lor cîmp electric. De aceea cînd un corp e electrizat, el are, fie sarcină electrică adevărată, fie moment electric permanent, fie atît sarcină adevărată cît şi moment permanent.

3.3. Momentul electric temporar. Din legea (1) rezultă că dacă un mic corp are sarcina adevărată q, se exercită asupra lui, în vid, în cîmpul electric, o forţă $\bar{F}_{qv}$, iar din relaţiile (27) şi (28) rezultă că dacă un mic corp are moment electric permanent se exercită asupra lui, în cîmpul electric în general, un cuplu $\bar{C}$, iar în cîmpul electric neuniform, şi o forţă $\bar{F}_{pv}$.

Experienţe arată însă că, dacă se introduc în vid, într-un cîmp electric neuniform, mici corpuri fără sarcină adevărată şi fără moment electric permanent, se exercită asupra lor, în general, totuşi şi o forţă $\bar{F}_{pv}$, care are o expresiune analogă cu (h) respectiv (i):

$$(29)\quad \bar{F}_{pv} = (\bar{p}_t \text{grad})\, \bar{E}_v .$$

În această expresiune, $\bar{p}_t$ are o valoare care depinde de vectorul cîmp electric în vid $\bar{E}_v$ al cîmpului în care se găseşte corpul, şi dispare cînd acest vector cîmp electric e nul. Se spune că aceste corpuri se polarizează electric temporar prin introducerea lor în cîmp, iar $\bar{p}_t$ se numeşte momentul lor electric temporar. - În corpurile isotrope, momentele electrice temporare "induse" de un cîmp electric sunt omoparalele cu vectorul cîmp electric local. Forţa $\bar{F}_{pv}$, care se exercită asupra unui mic corp nepolarizat permanent şi introdus într-un cîmp electric neuniform, îl atrage deci totdeauna spre regiunile de cîmp electric mai intens. Aceasta e forţa care se exercită în cîmpul electric asupra corpurilor "neelectrizate". - În corpurile anisotrope, de exemplu într-un cristal de gips, momentul electric temporar indus nu e, în general, omoparalel cu vectorul cîmp electric inductor. Orice cristal are, în cazurile cele mai generale

numai trei direcţii triortogonale, numite direcţii principale de polarizare, care trebuie să coincidă cu direcţia vectorului cîmp electric, pentru ca momentul temporar indus să aibă direcţia locală a vectorului cîmp electric. Asupra acestor corpuri se exercită deci, în cazurile cele mai generale, şi un moment static în cîmpul electric, deşi ele sînt polarizate numai temporar. Momentul lor electric temporar tinde să le orienteze cu una dintre direcţiile principale în direcţia cîmpului electric, cînd cuplul e nul.

Experienţa arată că un corp care are numai moment electric temporar modifică, prin prezenţa sa, cîmpul electric în care se găseşte. Se poate spune că el produce un cîmp electric suplimentar, care este însă nul cînd corpul nu se găseşte într-un cîmp electric produs altfel decît prin momente electrice temporare. De aceea corpurile, chiar dacă sînt polarizate temporar, nu se numesc electrizate, ci neelectrizate. Există deci două clase de stări neelectrizate : stări în care corpurile sînt polarizate temporar, şi stări în care corpurile nu au nici moment electric temporar.

3.4. Momentul electric. Suma vectorială dintre momentul electric permanent $\bar{p}_p$ şi momentul electric temporar $\bar{p}_t$ al unui corp se numeşte momentul electric $\bar{P}$ al corpului:

$$\bar{p} = \bar{p}_p + \bar{p}_t$$

El reprezintă o mărime de stare electrică al unui mic corp, determinată prin următoarele două condiţiuni: Produsul său vectorial prin vectorul cîmp electric local în vid este egal cu cuplul care se exercită în cîmp asupra micului corp:

$$(30) \quad \boxed{\bar{C}_v = \bar{p} \times \bar{E}_v}$$

Operatorul $(\bar{p}\ \text{grad})$, aplicat vectorului cîmp electric local $\bar{E}_v$ este egal cu forţa care se exercită asupra micului corp presupus neîncărcat:

$$(30\ a) \quad \boxed{\bar{F} = (\bar{p}\ \text{grad})\ \bar{E}_v}$$

Din aceste relaţii rezultă imediat şi metoda de măsurare a momentului electric.

Forţa care se exercită în cîmpul electric asupra unui mic corp introdus în cîmp are deci următoarea expresiune generală:

$$(31) \qquad \boxed{\bar{F}_v = q \cdot \bar{E}_v + (\bar{p}\ \mathrm{grad})\ \bar{E}_v}$$

iar momentul static în raport cu un punct faţă de care corpul de probă are raza vectoare $\bar{r}$, are expresiunea:

$$(32) \qquad \boxed{\bar{M}_F = q\bar{r} \times \bar{E}_v + \bar{r} \times (\bar{p}\ \mathrm{grad})\ \bar{E}_v + \bar{p} \times \bar{E}_v}$$

Experienţa arată că momentul electric al unui corp polarizat e independent de sarcina lui electrică adevărată.

Unitatea de moment electric care rezultă din relaţia (30) e momentul electric al unui mic corp asupra căruia se exercită, într-un cîmp electric cu unitatea de vector cîmp electric în vid, un cuplu maxim egal cu unitatea de cuplu. Unitatea MKSC de moment electric se numeşte metru - coulomb (Cm).

Fie două mici corpuri care au momente electrice permanente egale cu unitatea. Dacă le situăm în vid la o distanţă egală cu unitatea de lungime unul de altul, astfel încît momentul unuia dintre corpuri să fie dirijat spre cel de al doilea corp, iar momentul acestuia să fie perpendicular pe dreapta care uneşte cele două corpuri (fig.18), experienţa arată că se exercită între cele două corpuri un cuplu de valoare absolută egală cu $2\ \Delta_0$, dacă Δ_0 e determinat cum s-a arătat cînd s-a definit permitivitatea vidului. In acest fel se poate determina direct unitatea de moment electric.

Pentru a măsura momentul electric al unui mic corp, introducem corpul într-un cîmp electric neuniform şi-l orientăm astfel, încît forţa care se exercită asupra lui să fie maximă, procedăm în acelaşi fel şi în acelaşi punct al cîmpului cu un mic corp de probă care are unitatea de moment electric, raportul dintre cele două forţe e egal cu raportul celor două momente electrice. Această măsurare

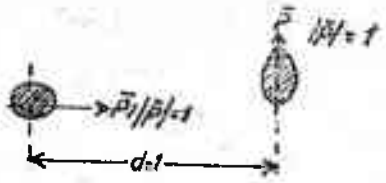


Fig. 18
Experienţă pentru determinarea unităţii de moment electric.

presupune că polarizaţia temporară a corpului de probă cu unitatea de moment e nulă.

3.5. Polarizaţia electrică. Starea locală de polarizare electrică a unui corp masiv se descrie cu ajutorul densităţii de volum locale a momentelor electrice ale părţilor corpului.

Limita către care tinde raportul dintre suma vectorială $\Sigma \bar{p}_i = \Delta \bar{p}$ a momentelor electrice ale materialului dintr-un volum Δv şi dintre acest volum, cînd el tinde către zero, adică densitatea de volum vectorială a momentelor electrice, se numeşte polarizaţie electrică $\bar{P}$:

$$(33) \qquad \bar{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta v} = \frac{d\bar{p}}{dv}$$

Polarizaţia electrică se numeşte şi intensitate de electrizare. Partea ei care corespunde momentelor permanente se numeşte polarizaţie permanentă $\bar{P}_p$, iar partea care corespunde polarizaţiei temporare se numeşte polarizaţie temporară $\bar{P}_t$:

$$(33\ a) \qquad \bar{P} = \bar{P}_p + \bar{P}_t$$

Un corp în care polarizaţia electrică e diferită de zero se numeşte corp polarizat electric - şi anume permanent, temporar sau mixt, după cum momentele electrice din suma $\Delta \bar{p}$ sînt permanente, temporare, respectiv în parte permanente şi în parte temporare.- Unitatea MKSC de polarizaţie electrică se numeşte coulomb pe metru pătrat(C/m^2)

3.6. Puterea foiţei electrice. Uneori se consideră foiţe subţiri, polarizate electric, care au momentele electrice normale sau aproape normale pe feţele foiţelor. In astfel de cazuri e util să se opereze cu densitatea de suprafaţă a momentelor electrice ale foiţei. Ea se numeşte puterea foiţei electrice.

Limita cîtului dintre suma vectorială $\Sigma \bar{p}_i \equiv \Delta \bar{p}$ a momentelor electrice ale materialului unei foiţe electrice, care ocupă aria ΔA a foiţei şi dintre arie, cînd aceasta tinde către zero, se numeşte puterea foiţei electrice:

$$(34) \qquad \bar{\gamma} \equiv \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta A} = \frac{d\bar{p}}{dA}$$

Unitatea MKSC de putere a foiţei electrice se numeşte coulon pe metru (C/m).

4.-SARCINILE ELECTRICE DIPOLARE DE POLARIZAŢIE ŞI LIBERE

4.1. Sarcinile electrice dipolare. Intr-un punct care s-ar găsi în vid şi în care vectorul cîmp electric în vid ar fi $\bar{E}_v$, s-ar exercita asupra unui corp mic încărcat cu sarcina adevărată q_a şi nepolarizat electric, forţa $\bar{F}_q = q \bar{E}_v$. Dacă micul corp ar avea numai momentul electric $\bar{p}$, s-ar exercita asupra lui cuplul $\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}_v$. Se poate găsi o repartiţie de sarcini adevărate echivalente cu momentul electric, din punctul de vedere a cuplului, adică astfel încît, dacă s-ar stabili în corp acea repartiţie a sarcinilor adevărate, s-ar exercita asupra lui, într-un cîmp electric în vid, acelaşi cuplu ca asupra corpului care are momentul electric $\bar{p}$. Suma acestor sarcini echivalente, care se numesc sarcini electrice dipolare, trebuie să fie nulă. In adevăr, dacă q_d e suma sarcinilor sale dipolare pozitive şi $-q'_d$ e suma sarcinilor sale dipolare negative, suma totală $q_d + q'_d$ trebuie să fie nulă, fiindcă altfel s-ar exercita asupra corpului şi în cîmpul uniform forţa $(q_d - q'_d)\bar{E}_v$, independentă de orientare. Experienţa arată încă că această forţă e nulă. Repartiţia sarcinilor dipolare trebuie să prezinte simetrie în jurul axei momentului electric, fiindcă, dacă se roteşte corpul în jurul acelei axe, nu se schimbă forţele şi momentele care se exercită în cîmp asupra corpului. Sarcinile dipolare pozitive trebuie să fie deplasate

în direcţia axei electrice faţă de cele negative, fiindcă axa ia o orientare antiparalelă cu cea iniţială, momentul static $\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}_v$ al forţelor exercitate în cîmp îşi schimbă sensul. Cea mai simplă repartiţie care satisface aceste condiţiuni e constituită din două sarcini dipolare egale şi de nume contrare: q_d şi $-q_d$, situate în corp pe axa lui electrică la o distanţă foarte mică una de alta. Această distanţă trebuie să fie foarte mică, fiindcă şi corpurile foarte mici pot avea moment electric. Un astfel de sistem de sarcini se numeşte dipol electric sau dublet electric (fig.19). Fie $\bar{\ell}$ raza vectoare care are originea în $-q_d$ şi o extremitate în q_d. Dacă vectorul $\bar{\ell}$ are o valoare absolută destul de mică, momentul static al forţelor care s-ar exercita asupra părţilor corpului încărcate cu sarcini dipolare poate fi calculat cu o aceiaşi valoare $\bar{E}_v$ a vectorului cîmp electric, şi se obţine aceiaşi valoare a momentului static, oricare ar fi punctul faţă de care se consideră. Alegînd deci acest punct în sarcina dipolară $-q_d$ şi notînd cu $\bar{F}$ forţa care se exercită asupra sarcinii dipolare q_d, se obţine:

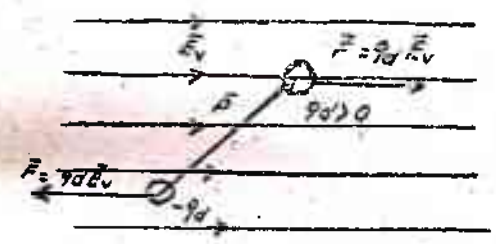


Fig. 19

Figură pentru definiţia sarcinilor electrice dipolare.

$$\bar{C} = \bar{\ell} \times \bar{F} = \bar{\ell} \times (q_d \bar{E}_v) = q_d \, \bar{\ell} \times \bar{E}_v$$

Acest cuplu este egal cu cuplul care se exercită asupra corpului cu momentul electric $\bar{p} (\bar{C} = \bar{p} \times \bar{E}_v)$, dacă

$$(35) \quad \bar{p} = q_d \bar{\ell}$$

Din această relaţie se calculează q_d în funcţiune de p, dacă se alege valoarea absolută a mărimii $\bar{\ell}$:

$$(35\,a) \quad q_d = \frac{p}{\ell}$$

Sarcinile dipolare nu trebuie confundate cu sarcinile adevărate: Sarcinile adevărate pot fi separate unele de altele divizînd, printre locurile în cari se găsesc corpurile care le poartă, dar sarcinile dipolare nu pot fi

separate printr-o astfel de operaţie. In adevăr se arată prin experienţă că fragmentele unui mic corp polarizat electric prezintă numai momente electrice, adică numai sarcini dipolare egale şi de nume contrare(dacă prin fragmentare acestea nu se electrizează, adică nu produc pe ele sarcini adevărate).Relaţia de echivalenţă $q_d \bar{\ell} = \bar{p}$ dintre perechile de sarcini dipolare (q_d şi $-q_d$) şi momentele electrice $\bar{p}$ nu determină univoc sarcinile dipolare, ci conţine şi distanţa foarte mică şi macroscopic nedeterminată ℓ. Cînd se face ca l să tindă către zero, sarcinile dipolare q_d fiind către infinit, produsul $q_d \bar{l}$ rămînînd egal cu $\bar{p}$: Se obţine un dipol elementar. In teoria fenomenologică nu se poate stabili dacă sarcinile electrice dipolare sînt sau nu sînt simple mărimi fictive, fiindcă numai prin observaţie macroscopică ele nu pot fi individualizate, pentru a se determina distanţa ℓ, şi deci sarcinile dipolare q_d şi $-q_d$.Studiul microfizic, care se face în teoria electronilor, permite însă să se arate că sarcinile electrice dipolare sînt sarcini electrice ale anumitor particule elementare ca şi sarcinile adevărate, şi că deci, momentul electric e de fapt o mărime derivată.

4.2. <u>Sarcina electrică de polarizaţie</u>. Un moment electric e echivalent din punct de vedere al forţelor electrice exercitate asupra corpului care-l are, cu două sarcini electrice dipolare egale şi de nume contrare. Dacă polarizaţia electrică a unui corp e neuniformă se poate stabili, în corp,local, un exces de sarcini dipolare de un nume faţă de cele de nume contrar. Acest exces local se numeşte sarcină electrică de polarizaţie.-Fie de exemplu, o suprafaţă închisă, într-un corp polarizat electric (Fig.2c.a) Dacă polarizaţia electrică e mai slabă în partea prin care intră liniile de cîmp ale polarizaţiei în interiorul suprafeţei, decît în partea prin care ies aceste linii, urmează că, la stabilirea polarizaţiei electrice, intră în interio-

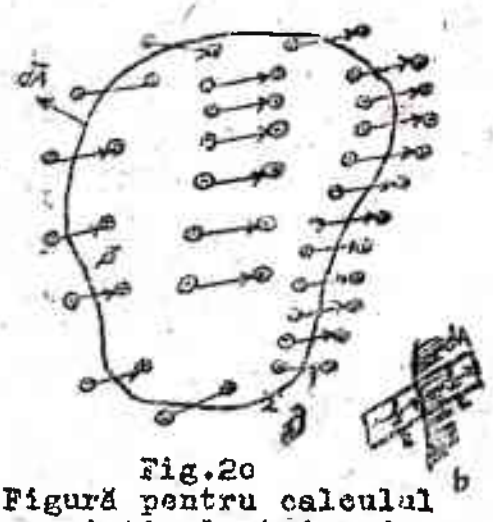


Fig.2c
Figură pentru calculul sarcinii electrice de polarizaţie

rul suprafeţei, prin prima parte, mai puţine sarcini dipolare pozitive(care sînt situate în extremităţile din suprafaţă ale săgeţilor momentelor având originile în afara ei),decît sarcinile electrice dipolare negative care intră în interiorul suprafeţei prin a doua parte (şi sînt situate în originile din suprafaţă ale săgeţilor momentelor care au extremităţi în afara ei) Interiorul suprafeţei are deci un exces de sarcină dipolară negativă cînd se stabileşte această polarizaţie electrică. Interiorul suprafeţei ar avea un exces de sarcină dipolară pozitivă, dacă polarizaţia electrică ar fi mai intensă în partea prin care liniile de cîmp ale polarizaţiei intră în suprafaţă, decît în partea prin care liniile ies din ea. Se mai observă că excesul de sarcină dipolară de un nume faţă de sarcina dipolară de nume contrar depinde numai de polarizaţia electrică pe suprafaţă, fiindcă momentele electrice depărtate de ea au ambele extremităţi fie în interiorul, fie în exteriorul ei.(Fig.24 a).Sarcina dipolară dq'_{dl}, care trece prin elementul de arie dA cînd se stabileşte polarizaţia electrică $\bar{P}$ e sarcina părţilor corpului cuprinse într-un paralelepiped oblic din exteriorul suprafeţei care are baza dA şi aplicată pe suprafaţă(Fig.24 b), înălţimea $l \cos\alpha$,dacă l e lungimea din definiţia sarcinilor dipolare, şi α e unghiul dintre polarizaţia electrică locală şi normala pe acea unitate de arie,paralelepipedul fiind situat simetric faţă de acea suprafaţă. Volumul paralelepipedului fiind $\Delta_v = dA.\ell \cos\alpha$ şi sarcina electrică dipolară corespunzătoare unităţii de volum fiind $q_{dl} = \frac{P}{\ell}$ unde P e valoarea absolută a polarizaţiei electrice, rezultă:

$$dq'_{dl} = \frac{P}{\ell} \Delta_v = \frac{P}{\ell} dA\, \ell \cos\alpha = P\, dA \cos\alpha$$

Sarcina electrică dipolară care iese din suprafaţă închisă Σ e deci

$$q'_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \bar{P} d\bar{A}$$

Rezultă că sarcina de polarizaţie q_p din suprafaţa închisă Σ,egală şi de semn contrar cu sarcina $q'_{\Sigma d}$ ieşită din Σ,e deci :

$$(36)\quad q_{p\Sigma} = -\int_{\Sigma} \bar{P}d\bar{A}$$

Sarcina electrică de polarizaţie dintr-o suprafaţă închisă e deci o mărime electrică egală şi de semn contrar cu fluxul polarizaţiei electrice din acea suprafaţă. Ea poate fi considerată deci şi ca mărime derivată din polarizaţia electrică.

4.3.Divergenţa vectorului cîmp şi teorema lui Gauss şi Ostrogradski. Relaţia de mai sus dintre sarcina de polarizaţie şi polarizaţia electrică se poate exprima sub forma diferenţială cu ajutorul divergenţei şi al teoremei lui Gauss şi Ostrogradski(v şi în Anexa matematică, formulele 17,17 a şi 18).

Dacă se alege într-un cîmp de vectori $\bar{G}$, o suprafaţă închisă Σ, se calculează fluxul vectorului cîmp prin suprafaţă şi se împarte fluxul prin volumul pe care-l închide, se obţine fluxul specific, adică fluxul raportat la suprafaţa unităţii (foarte mică) de volum. Dacă se trece la limită pentru suprafeţe ale căror dimensiuni scad în toate direcţiile, aşa încît volumul lor V_Σ tinde către zero, se obţine o valoare de punct a fluxului specific, care se numeşte divergenţa vectorului cîmp în punctul considerat şi se notează cu div $\bar{G}$:

$$(a)\quad \operatorname{div}\bar{G} = \lim_{V_\Sigma \to 0} \frac{\int_\Sigma \bar{G}d\bar{A}}{V_\Sigma}$$

Regiunile unui cîmp de vectori în cari div $\bar{G}=0$ se numesc fără divergenţă, cele în cari div $\bar{G} \neq 0$ se numesc cu divergenţă.

Divergenţa e un scalar ataşat fiecărui punct din cîmp, şi formează deci un cîmp de scalari.

Pentru a deduce expresiunea divergenţei în coordonate cartesiene, considerăm că $\bar{G}$ (x,y,z) e vectorul cîmp în punctul P de coordonate x,y,z şi G_x ,G_y,G_z componentele sale (fig.21) şi un paralelipiped cu muchiile Δx, Δy, Δz,şi cu un vîrf în P, pe faţa A a paralelipipedului; Valoarea componentei G_x în P', pe faţa B, se obţine cu apre-

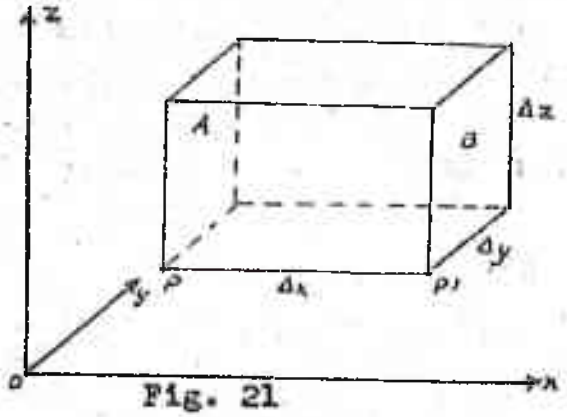


Fig. 21

Figură pentru calculul divergenţei

ximaţie din valoarea G_x în P prin desvoltare în serie Taylor şi întreruperea desvoltării la termenul al doilea, adică e: $G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x}\Delta x$, fiindcă Δ_x e creşterea coordonatei x dela P la P'. Dacă se înmulţeşte prima expresiune cu aria $\Delta y, \Delta z$ a feţei A, se obţine fluxul lui $\bar{G}$ prin A. Dacă se înmulţeşte a doua expresiune cu aria $\Delta\, y \Delta z$ a feţei B şi se scade din ea primul produs, se obţine fluxul în direcţia x prin suprafaţa paralelipipedului(diferenţa între fluxul care iese şi dintre cel care intră în paralelipiped în direcţia x) :

$$\left(G_x + \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x\right) \Delta y \Delta z - G_x \Delta_y \Delta_z = \frac{\partial G}{\partial x}\, \Delta x\ \Delta y \Delta z$$

Analog se obţine fluxul în direcţiile y şi z prin expresiuni în care y respectiv z au rolul lui x din formule de mai sus. Adunînd aceste trei expresiuni,împărţind cu volumul $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, al paralelipipedului şi trecînd la limită pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ şi $\Delta z \to 0$ se obţine expresiunea fluxului specific sau a divergenţei în coordonate cartesiene.

$$(b) \quad \operatorname{div} \bar{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} .$$

Conform teoremei lui Gauss şi Ostrogradski fluxul vectorului cîmp al unui cîmp continuu, prin orice suprafaţă închisă Σ, e egal cu integrala divergenţei lui asupra volumului v_Σ din interiorul suprafeţei închise:

$$(c) \qquad \int_\Sigma \bar{G} d\bar{A} = \int_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G} dv$$

Se împarte volumul v_Σ în elemente dv(fig.22) şi se observă că, după definiţia divergenţei,div $\bar{G}$dv e fluxul vectorului cîmp prin suprafaţa elementului de volum dv şi că, la adunarea fluxurilor parţiale corespunzătoare integralei din membrul drept al relaţiei lui Gauss şi Ostro-

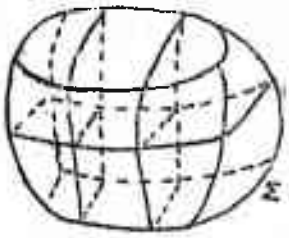


Fig.22
Figură pentru demonstrarea teoremei lui Gauss -Ostrogradski

gradski., toate fluxurile prin suprafeţele din interiorul suprafeţei Σ, se anulează două cîte două, fiindcă fluxul prin orice suprafaţă e pozitiv, în sensul normalei exterioare a lui dv, adică dacă e pozitiv pentru unul dintre cele două elemente de volum mărginite de o suprafaţă interioară, e negativ şi are aceiaşi valoare pentru celălalt, fiindcă $\bar{G}$ e repartizat continuu în cîmp. Rămîne numai sursa referitoare la suprafaţa exterioară Σ, ale cărei elemente de arie mărginesc cîte un singur element de volum, adică rămîne numai suma din membrul stîng al relaţiei care exprimă teorema lui Gauss şi Ostrogradski, care trebuia demonstrată.

4.4. <u>Densitatea sarcinii de polarizaţie</u>. Aplicînd ultimului membru din (36) teorema lui Gauss şi Ostrogradski şi folosind densitatea de volum ρ_p, a sarcinii electrice de polarizaţie, se obţine:

$$\int_{v_\Sigma} \rho_p \, dv = - \int_{\Sigma} \bar{P} d\bar{A} = - \int_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{P} \, dv$$

Fiindcă volumul v_Σ e arbitrar, ca şi suprafaţa Σ care-l închide, rezultă:

$$(36\ a)\quad \rho_p = - \operatorname{div} \bar{P}$$

Folosind expresiunea divergenţei în coordonate cartesiene, se obţine:

$$(36\ b)\quad \rho_p = - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right)$$

Cînd sarcina de polarizaţie e repartizată cu densitatea de suprafaţă ρ_{sp}, relaţia corespunzătoare se obţine aplicînd relaţia (36) unui paralelipiped extrem de plat care are ariile bazelor egale cu unitatea de arie, conţinînd componentele normale ale polarizaţiei P_{n1} şi P_{n2} pozitive cînd sînt îndreptate din spre suprafaţă cu densitate de sarcină de polarizaţie spre cîmp, se obţine:

(36 c) $\rho_{sp} = -(P_{n1} + P_{n2}) = -\bar{U}_{n12}(\bar{P}_2 - \bar{P}_1) = -\text{divs } \bar{P}$,

unde $\text{divs } \bar{P} = \bar{U}_{n\,12}(\bar{P}_2 - \bar{P}_1)$ se numeşte divergenţa de suprafaţă a polarizaţiei electrice.

Suma sarcinilor electrice de polarizaţie dintr-un corp situat în vid e nulă. În adevăr dacă se situează suprafaţa închisă în vid, unde $\bar{P} = 0$, rezultă

(36 d) $$q_p = -\int_{\Sigma} \bar{P} d\bar{A} = 0$$

Repartiţia în spaţiu a sarcinii electrice de polarizaţie e determinată deci univoc de cîmpul polarizaţiei electrice, dar există mai multe cîmpuri de polarizaţie echivalente cu o aceiaşi repartiţie în spaţiu a sarcinii de polarizaţie, diferitele cîmpuri diferind între ele printr-un cîmp solenoidal.

4.3. <u>Sarcina electrică liberă</u> Uneori se găseşte sarcină electrică adevărată q în locurile care au sarcină de polarizaţie q_p. În acest caz, suma lor se numeşte sarcină electrică liberă q_ℓ:

(37) $$q_\ell = q + q_p$$

Densitatea de volum ρ_ℓ a sarcinii electrice libere e deci:

(37 a) $$\rho_\ell = \rho + \rho_p,$$

iar densitatea lor de suprafaţă e

(37 b) $$\rho_{\ell s} = \rho_s + \rho_{ps}$$

5.- <u>Cîmpul electrostatic în vid al corpurilor încărcate şi polarizate electric</u>

5.1. <u>Bazele calculului intensităţii cîmpului electrostatic în vid</u>. Combinînd legea acţiunii ponderomotoare în cîmpul electric din vid : $\bar{F} = q\bar{E}_v$, cu teorema lui Coulomb (7), am dedus expresiunea coulombiană (8) a intensităţii $\bar{E}_{vq}$, a cîmpului electric în vid al unui corp încărcat cu sarcina punctuală q:

$$(8) \qquad E_{vq} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{q\bar{r}}{r^3}$$

Aplicînd apoi principiul superpoziţiei (9), am dedus expresiunea (1o) a intensităţii cîmpului electric în vid $\bar{E}_v$ produs de corpuri nepolarizate, încărcate cu sarcini electrice adevărate, punctuale q_i, sau repartizate în corpuri cu densitate de volum ρ_v, în elemente de volum dv', de suprafaţă ρ_s în elemente de arie dA' sau de linie ρ_l pe elemente de arc ds' :

$$(1o) \qquad \bar{E}_v = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho_v \bar{R}}{R^3}\, dv' + \int \frac{\rho_s \bar{R}}{R^3}\, dA' + \int \frac{\rho_l R}{R^3}\, ds' + \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i \bar{R}_i}{R_i^3}\right]$$

unde $\bar{R}, \bar{R}_i$ sînt razele vectoare dirijate din spre elementele dv' dA', ds', respectiv din spre punctele de sarcini q_i, spre punctele în cari se calculează $\bar{E}_v$.

De altă parte, am arătat că din punctul de vedere al forţelor care se exercită în cîmpul electric asupra unui corp polarizat electric, starea unui mic corp în care acesta are un moment electric $\bar{p}$, e echivalentă cu starea lui în care ar avea o pereche de sarcini electrice dipolare egale şi de nume contrare q_d şi $-q_d$, situate la o mică distanţă $\bar{l}$ una de alta, astfel încît

$$(35) \qquad q_d \bar{l} = \bar{p}$$

adică $q_d = p:l$, unde l rămîne nedeterminat. Considerînd cazul dubletului electric elementar, în care l tinde astfel către zero şi q_d tinde astfel către infinit, încît relaţia (35) să rămînă valabilă, se poate pune problema dacă există echivalenţă între momentul electric şi sarcinile electrice dipolare ale dubletului elementar corespunzător nu numai din punctul de vedere al forţelor electrice exercitate asupra corpului care are momentul, respectiv sarcinile dipolare corespunzătoare, ci şi din punctul de vedere al cîmpului electrostatic produs. Dacă există echivalenţă şi din acest punct de vedere, cîmpul electric produs de un corp care are momente electrice e identic cu cîmpul electric pe care l-ar produce acel corp în ipoteza că nu ar avea momentele electrice, dar ar avea, ca sarcini electrice adevărate,

sarcinile dipolare corespunzătoare momentelor. Cîmpul corespunzător acestor sarcini poate fi calculat însă cu ajutorul formulei (1o) - şi compararea rezultatelor cu datele experimentale poate să infirme sau să nu infirme această încercare de a calcula cîmpul. Experienţa nu infirmă în nici un caz încercarea. Deci,vom calcula cîmpul folosind echivalenţa completă dintre momentele electrice şi sarcinile electrice dipolare corespunzătoare. Aplicînd apoi principiul superpoziţiei, vom obţine expresiunea generală a intensităţii cîmpului electrostatic în vid.

5.2. <u>Formula lui Coulomb pentru corpurile cu momente electrice.</u> Considerăm un mic corp care are momentul electric $\bar{p}$ şi calculăm intensitatea $\bar{E}_{vp}$ a cîmpului electrostatic pe care-l produce în vid, asimilîndu-l cu un dublet electric şi considerînd apoi cazul limită al dubletului elementar echivalent (fig.23). Fie R şi R' razele vectoare care au originile în q_d şi în $-q_d$, şi extremităţile în punctul P din vid, în care calculăm intensitatea cîmpului electrostatic. Potenţialul în P al corpului care ar avea cele două sarcini dipolare ca sarcini adevărate ar fi, conform formulei (16) :

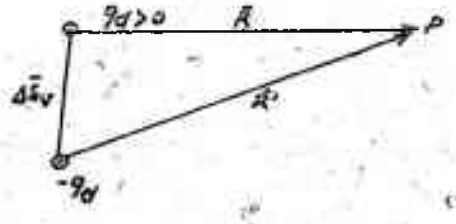


Fig.23
Dublet electric şi cîmpul său electric.

$$V_{\bar{p}} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0} q_d \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$$

Cu notaţiile din figură rezultă

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{d}{d_{sv}} \left(\frac{1}{R}\right) \Delta s_v = \frac{1}{R} + \Delta\bar{s}_v \operatorname{grad}\frac{1}{R} =$$

$$= \frac{1}{R} - \Delta\bar{s}_v \operatorname{grad}'\frac{1}{R}$$

unde simbolul "prim" (') arată că gradientul se calculează deplasînd cu $\Delta\bar{s}_v$ punctul în care se găseşte sarcina electrică dipolară $(-q_d)$. Deci

$$(a) \quad V_{\bar{p}} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0} q_d \Delta\bar{s}_v \operatorname{grad}'\frac{1}{R} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0} \bar{p} \operatorname{grad}'\frac{1}{R} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0} \bar{p}\frac{\bar{R}}{R^3}$$

Intensitatea cîmpului electric în vid, corespunzătoare, se calculează cu formula (16 a) şi are expresiunea :

$$(b)\quad \bar{E}_{v\bar{p}} = -\operatorname{grad} V_{\bar{p}} = -\frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\bar{p}\bar{R})\operatorname{grad}\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3}\operatorname{grad}(\bar{p}\bar{R})\right] =$$

$$= \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\bar{p}\bar{R})\bar{R}}{R^5} - \frac{\bar{p}}{R^3}\right]$$

Se constată două deosebiri importante între expresiunile intensităţilor cîmpului electric dat de sarcini adevărate şi de momente electrice: Cîmpul corespunzător momentelor depinde şi de direcţie, nu numai de distanţa dela corpul polarizat, intensitatea lui e invers proporţională cu cubul distanţei şi nu pătratul distanţei, ca în cazul corpurilor încărcate. Intensitatea cîmpului electric e deci slabă la depărtare de corpurile polarizate electric, dar e extrem de mare în apropierea imediată a acestor corpuri. Aceasta prezintă mare importanţă în studiul cîmpurilor, cum vom arăta mai jos.

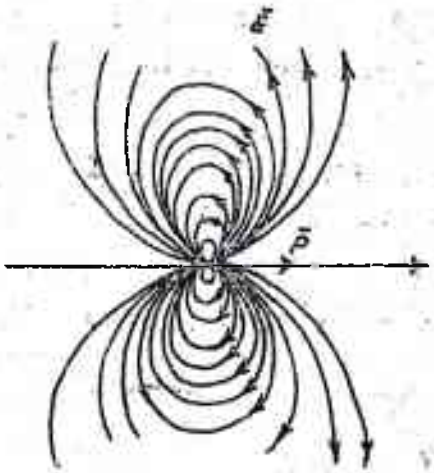


Fig. 23 a
Cîmpul electrostatic al unui mic corp cu momentul electric.

Dacă se descompune intensitatea cîmpului într-o componentă radială E_{vr} şi în una meridională $E_{v\theta}$ perpendiculară pe E_{vr}, şi dacă θ e unghiul format de vectorii $\bar{p}$ şi $\bar{R}$, se obţine de mai sus

$$E_{vr} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2p\cos\theta}{R^3}\quad ;\quad E_{v\theta} = -\frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p\sin\theta}{R^3}$$

Fig. 23 a reprezintă liniile de cîmp ale cîmpului electrostatic al micului corp polarizat electric.

Aplicînd principiul superpoziţiei, se poate calcula potenţialul electrostatic în vid al unui sistem oarecare de corpuri polarizate electric. Dacă $\bar{P}$ e polarizaţia electrică, dacă $\bar{r}$ sînt puterile foiţelor electrice şi $\bar{p}_i$ sînt momentele electrice discrete ale sistemului de cor-

puri, se obţine:

$$(c)\quad V_{\bar{p}} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \bar{P}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,dv' + \int \bar{\pi}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,dA' + \sum_{k=1}^{m} \bar{p}_k\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R_k}\right]$$

Intensitatea corespunzătoare a cîmpului electric în vid rezultă imediat din relaţia

$$\bar{E}_{v\bar{p}} = -\,\mathrm{grad}\ V_{\bar{p}}$$

5.3. <u>Cîmpul electrostatic în vid</u>. Fie un sistem oarecare de corpuri imobile, conductoare, semiconductoare sau izolante, în regim electrostatic. Fie $q_i, \rho_v, \rho_s, \rho_l$, sarcinile lor adevărate punctuale, respectiv densităţile de volum, de suprafaţă şi de linie ale acestei sarcini. Fie $\bar{p}_i$, $\bar{P}$, $\bar{\pi}$ momentele electrice discrete ale sistemului de corpuri, polarizaţia electrică şi puterea foiţelor electrice ale corpurilor. Aplicînd principiul superpoziţiei, se poate stabili expresiunea potenţialului electrostatic în orice punct din spaţiu, în care nu se găsesc corpuri, ca sumă a expresiunilor (16) şi (c) ale potenţialelor electrostatice ale sistemului de corpuri, în ipoteza că acestea ar avea numai sarcini electrice adevărate, respectiv numai momente electrice :

$$(38)\quad V_v = \frac{\chi}{4}\left[\int\frac{\rho_v}{R}dv' + \int\frac{\rho_s}{R}dA' + \int\frac{\rho_l}{R}ds' + \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i} + \int \bar{P}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,dv' + \int\bar{\pi}\,\mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,dA' + \sum_{k=1}^{m}\bar{p}_k\,\mathrm{grad}'\frac{1}{R_k}\right]$$

Această expresiune generală se poate transforma în aşa fel, încît să apară sarcina electrică de polarizaţie în expresiunea potenţialului electrostatic. Aplicăm în acest scop, următoarea identitate din analiza vectorială (v.Anexa matematică, formula 45 f):

$$\mathrm{div}'\frac{\bar{P}}{R} = \bar{P}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,\mathrm{div}'\,\bar{P} = \bar{P}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R} - \frac{\rho_{pv}}{R}$$

Calculăm din această relaţie mărimea $\bar{P}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R}$,

o introducem în termenul din expresiunea potenţialului care conţine polarizaţie, şi obţinem:

$$\int \bar{p}\ \mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,dv' = \int \frac{\rho_{pv}}{R}\,dv' + \int \mathrm{div}'\,\frac{\bar{p}}{R}\,dv'$$

Extindem această integrală asupra spaţiului întreg (fiindcă numai elementele de volum în care $\bar{p}$ diferă de zero au contribuţie la integrală), aplicăm teorema lui Gauss şi Ostrogradski şi obţinem:

$$\int \bar{p}\ \mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dv' = \int \frac{\rho_{pv}}{R}\,dv' + \int_{S\infty} \frac{\bar{p}\,d\bar{A}}{R} = \int \frac{\rho_{pv}}{R}\,dv'$$

fiindcă pe suprafaţa de la infinit $\bar{P} = 0$ dacă întregul sistem de corpuri polarizate se găseşte la distanţă finită. Se arată analog că, dacă polarizaţia are divergenţă de suprafaţă, ea poate fi înlocuită, în calculul potenţialului, cu sarcinile de polarizaţie corespunzătoare, presupuse repartizate cu densitatea superficială ρ_{ps}. Introducînd deci densităţile de sarcini electrice libere $\rho_{1v} = \rho_v + \rho_{pv}$; $\rho_{1s} = \rho_s + \rho_{ps}$, se obţine şi următoarea expresiune generală a potenţialului electrostatic în vid:

$$(38\,a)\quad V_v = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho_{1v}}{R}\,dv' + \int \frac{\rho_{1s}}{R}\,dA' + \int \frac{\rho_1}{R}\,ds' + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{R_i} + \right.$$

$$\left. + \int \bar{\pi}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dA' + \sum_{k=1}^{m} \bar{p}_k\ \mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\right]$$

Intensitatea cîmpului electrostatic în vid are deci următoarea expresiune generală:

$$(38\,b)\quad \bar{E}_v = -\,\mathrm{grad}\,V_v = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho_{1v}\,\bar{R}}{R^3}\,dv' + \int \frac{\rho_{1s}\bar{R}}{R^3}\,dA' + \right.$$

$$\left. + \int \frac{\rho_1 \bar{R}}{R^3}\,ds' + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \bar{R}_i}{R_i^3} - \mathrm{grad}\int \bar{\pi}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dA' + \sum_{k=1}^{m} \left(3\,\frac{\{\bar{p}_k\ R_k\}}{R_k^5}\,\bar{R}_k - \frac{\bar{p}_k}{R_k^3}\right)\right]$$

Sarcinile electrice adevărate determină deci singure intensitatea cîmpului electric în vid cînd corpurile nu sînt polarizate electric. Aceasta e cazul conductoarelor. Cînd există în cîmp şi corpuri polarizate electric(dielectrici)

intensitatea cîmpului electric în vid e determinată de sarcinile electrice libere, conform unei formule în rest identice; numai partea cîmpului în vid corespunzătoare puterii şi momentelor electrice discrete trebuie indicată separat (ultimele sume din formula 38 b). Formulele (38) şi (39 a), şi deci (38 b), pot fi aplicate numai rareori direct în calculul intensităţii cîmpului electric în vid, fiindcă repartiţia sarcinilor adevărate, pe conductoare şi polarizaţia electrică temporară, şi deci sarcinile de polarizaţie electrică temporară, depind de însăşi starea care urmează să fie determinată pe baza acestui calcul.

Teorema lui Gauss referitoare la fluxul intensităţii cîmpului electrostatic în vid e valabilă în orice cîmp electrostatic, dacă se înlocuieşte sarcina adevărată din expresiunea ei, cu sarcina electrică liberă. Cînd suprafaţa prin care se calculează fluxul intensităţii cîmpului electric trece însă în întregime prin vid, suma sarcinilor electrice de polarisaţie din acea suprafaţă e nulă, conform relaţiei (36c). Deci şi în acest caz fluxul intensităţii cîmpului electric în vid, prin orice suprafaţă situată în întregime în vid, e proporţional cu sarcina adevărată din interiorul suprafeţei, conform relaţiei (12).

6.- Intensitatea cîmpului electric şi inducţia electrică.

6.1. Explorarea cîmpului electric în corpuri.

Vectorul cîmp electric într-un corp ar urma să fie definit prin cîtul $\frac{\bar{F}_q}{q}$ dintre forţa $\bar{F}_q$ care s-ar exercita în corp asupra unui mic conductor de probă isolat, şi sarcina lui adevărată q. În acest scop, ar trebui practicată în corp o cavitate vidă, pentru a introduce în ea conductorul de probă (fig.24). Cavitatea trebuie presupusă destul de mică, iar raportul dintre dimensiunile ei lineare şi dimensiunile lineare ale conductorului de probă trebuie presupus destul de mare, pentru ca mici variaţii ale poziţiei conductorului

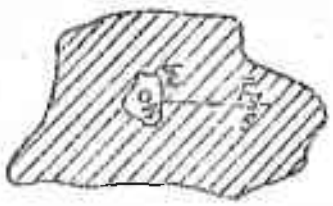


Fig. 24

Cavitate vidă, pentru explorarea cîmpului electric într-un corp.

în cavitate să nu producă perturbaţii sensibile.

Pentru ca, prin această definiţie, să se obţină în fiecare punct dintr-un corp un singur vector cîmp electric, ar trebui ca, la stare fizică dată, citul $\frac{\bar{F}_0}{q}$ să fie independent de forma şi de orientarea pe care o are cavitatea vidă, cînd dimensiunile lineare ale acesteia tind către zero. Numai prin experienţă se poate decide în această privinţă. Se constată că, în micile cavităţi vide, practicate în corpurile polarizate electric(şi numai în cavităţile din corpurile polarizate),citul dintre forţă şi sarcina electrică adevărată a unui mic conductor, asupra căruia se exercită forţa, depinde, în condiţiuni date,şi de forma şi de orientarea micii cavităţi vide în care se găseşte conductorul. Rezultă că materialul polarizat din imediata apropiere a cavităţii,chiar dacă nu e încărcat cu sarcină electrică adevărată, are o mare influenţă asupra vectorului cîmp electric din locul ocupat de corpul de probă din cavitate, şi deci asupra forţei care se exercită asupra lui. In cazul particular al cîmpurilor electrostatice, am şi arătat că intensitatea acestor cîmpuri e extrem de mare în imediata apropiere a corpurilor polarizate.

Acest fapt introduce în studiul stărilor electrice din corpuri o complicaţie care nu apare în studiul altor cîmpuri de forţe(de exemplu în studiul cîmpului de gravitaţie). In adevăr, să presupunem o stare electrică dată,într-un anumit moment şi într-un anumit punct dintr-un corp. La formă dată a cavităţii, ale cărei dimensiuni lineare tind către zero, citul $\frac{\bar{F}_0}{q}$ defineşte infinit de mulţi vectori cîmp electric "în corp", fiecare dintre aceştia corespunzînd cîte

unei orientări posibile a cavităţii, el defineşte şi infinit de multe mulţimi de astfel de vectori cîmp, fiecare mulţime corespunzînd cîte uneia dintre formele posibile ale acestor cavităţi (de exemplu: sferă, paralelipiped, canal, fantă, etc). Incercarea de a defini în acest fel un singur vector cîmp electric în corpuri dă deci greş, fiindcă ea nu conduce la un vector unic, ci la infinit de mulţi vectori. Rezultă că proprietăţile cîmpului electric din corpuri nu pot fi descrise complect cu ajutorul unui singur vector cîmp. Dacă s-ar folosi, ca încercare, numai vectorul cîmp electric din cavităţi vide sferice, nu s-ar putea determina, exclusiv cu ajutorul lui, de exemplu forţele care se exercită asupra unui mic conductor electrizat, introdus într-o fantă foarte plată, într-un mic cub vid practicat în corp, etc, fiindcă acestea diferă de forţa care s-ar exercita asupra corpului introdus în cavitatea sferică, în acelaşi loc şi în aceleaşi condiţiuni.

Facem calculul acestor vectori cîmp electric în cazul particular al regimului electrostatic, fiindcă în acest regim cunoaştem expresiunea generală (38) a potenţialului electrostatic în vid, şi deci a intensităţii cîmpului electric în vid. Folosim ca referinţă expresiunea formală a intensităţii $\bar{E}$ a cîmpului electrostatic, pe care am obţine-o aplicînd formula (38) şi punctelor din interiorul corpurilor, şi calculînd gradientul cu semn schimbat al potenţialului V_v, în ipoteza că nu s-ar practica nici o cavitate în corp. Calculăm apoi, în condiţiuni în rest egale, vectorul cîmp electric $\bar{E}'_\Sigma$ dintr-o cavitate vidă, de suprafaţă Σ (fig.24), în ipoteza că s-a scos materialul din cavitate, că adică s-a suprimat în acest fel, polarizaţia electrică din cavitate, pentru a putea introduce corpul de probă. Dacă v e întregul domeniu ocupat de polarizaţie înainte de practicarea cavităţii, dacă v_i şi v_e sînt părţile domeniului v ocupate de cavitate, respectiv de exteriorul ei, se obţine din (38) :

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{k}(\bar{E}-\bar{E}'_\Sigma)=-\operatorname{grad}\left[\iiint_v \bar{P}\operatorname{grad}'\frac{1}{R}\,dv'-\int_{v_e}\bar{P}\operatorname{grad}'\frac{1}{R}\,dv\right]=-\operatorname{grad}\int_{v_i}\bar{P}\operatorname{grad}'\frac{1}{R}\,dv'$$

Folosind identitatea

$$\operatorname{div}'\frac{\bar{P}}{R} = \bar{P}\,\operatorname{grad}'\frac{1}{R} + \frac{\operatorname{div}'\bar{P}}{R}$$

şi ţinînd seama de teorema lui Gauss şi Ostrogradski, se obţine:

$$\frac{4\pi\varepsilon_0}{\chi}(\bar{E} - \bar{E}'_\Sigma) = -\operatorname{grad}\int_{V'}\frac{\operatorname{div}'\bar{P}}{R}\,dv' + \operatorname{grad}\int_{V'}\operatorname{div}'\frac{\bar{P}}{R}\,dv' =$$

$$= -\operatorname{grad}\int_{V'}\frac{\operatorname{div}'\bar{P}}{R}\,dv' + \operatorname{grad}\int_{\Sigma}\left(\frac{\bar{P}d\bar{A}'}{R}\right)$$

adică efectuînd calculul în ultimul termen:

$$\bar{E}'_\Sigma = \bar{E} + \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint_\Sigma\frac{(\bar{P}d\bar{A}')\bar{R}}{R^3} + \operatorname{grad}\int_{V'}\frac{\operatorname{div}'\bar{P}}{R}\,dv'\right]$$

Cînd dimensiunile lineare ale cavităţii tind către zero, ultimul termen tinde către zero. Notînd $\lim_{\Sigma\to 0}\bar{E}'_\Sigma = \bar{E}_\Sigma$, obţinem expresiunea foarte importantă:

$$(38\ c)\qquad \bar{E}_\Sigma = \bar{E} + \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\Sigma\to 0}\int_\Sigma\frac{(\bar{P}d\bar{A}')\bar{R}}{R^3},$$

unde $\bar{P}$ e constant la efectuarea integralei, $\bar{R}$ e raza vectoare cu originea în elementele de arie $d\bar{A}$, ale suprafeţei Σ a cavităţii, şi cu extremitatea în punctul din cavitate la care se restrînge aceasta cînd se trece la limită. Se observă că numărătorul are ordinul de mărime R^3; Dacă se dă forma suprafeţei Σ, cîtul dintre numărător şi numitor nu depinde deci de dimensiunile lineare ale acesteia, adică E_Σ diferă de E dacă $\bar{P}$ local e diferit de zero. Se mai observă că această diferenţă provine din faptul că în imediata apropiere a corpurilor polarizate cîmpul electrostatic e foarte intens. De aceea cîmpul local al materialului polarizat, evacuat din cavitate, nu tinde către zero cînd dimensiunile lineare ale cavităţii tind către zero. Expresiunea $\bar{E}_\Sigma$ conţine deci o integrală de suprafaţă care nu tinde către zero cînd suprafaţa închisă, asupra căreia se extinde integrala, se restrînge asupra unui punct. Astfel de integrale se numesc integrale semiconvergente.

Din formula (38 c) rezultă că, în cavităţile din corpurile polarizate electric, vectorul cîmp electric în vid, şi deci forţa $\bar{F}_{q\Sigma} = q\bar{E}_\Sigma$ care se exercită asupra micilor cor-

puri încărcate cu sarcini adevărate q, e determinat abia în funcţiune de doi vectori cîmp; de exemplu $\bar{E}$ şi $\bar{F}$. Se mai observă că vectorul cîmp $\bar{E}_\Sigma$ din cavitatea de dimensiuni tinzînd către zero e funcţiune liniară de vectori $\bar{E}$ şi $\bar{F}$. Vectorii $\bar{E}$ şi $\bar{F}$ nu pot fi măsuraţi însă direct în general cu ajutorul micilor corpuri de probă. In adevăr pentru a efectua măsurarea într un punct din corp, trebuie practicată în corp o cavitate în care se introduce corpul de probă. Practicarea cavităţii poate deranja însă starea electrică din interiorul ei într-un mod care nu poate fi neglijat nici dacă dimensiunile cavităţii tind apoi spre zero. De aceea se poate procede cum urmează: Se determină experimental, prin formarea cîturilor $\frac{F_{q\Sigma}}{q}$, vectorii cîmp electric din vidul din două cavităţi diferite, cari dau rezultate diferite, iar aceşti doi vectori cîmp determină, conform relaţiei (38 c), vectorul cîmp electric în vidul din orice altă formă de cavitate. In principiu s-ar putea alege, pentru aceşti doi vectori cîmp oricare două forme de cavităţi, avînd orientări indicate după un criteriu aplicabil tuturor cazurilor. Dacă s-ar alege două cavităţi de forme inadecvate, s-ar opera însă cu două cîmpuri de vectori cu ajutorul cărora s-ar obţine o descriere greoaie a stărilor din corpuri. Pentru a obţine o descriere simplă a acestor stări, se operează prin consens general, începînd cu Maxwell, cu vectorii cîmp electric în vidul din următoarele două cavităţi. Un canal vid drept, foarte scurt şi extrem de strimt în raport cu lungimea sa cu axa paralelă cu polarizaţia locală (fig. 26 a), şi o fantă vidă, foarte mică şi extrem de plată în raport cu celelalte dimensiuni liniare ale ei, cu normala paralelă cu polarizaţia locală (fig. 26 b).

Calculul acestor vectori cîmp cu formula (38c) se efectuează simplu în cazul particular al cîmpurilor electrostatice, alegînd un canal cilindric circular şi o fantă de asemenea cilindrică circulară.

Efectuăm deci calculul pentru un cilindru mic, pentru ca p să poată fi considerat constant, şi apoi particularizăm pentru canal şi fantă - fie $\bar{u}_z$ versorul axei cilindrului

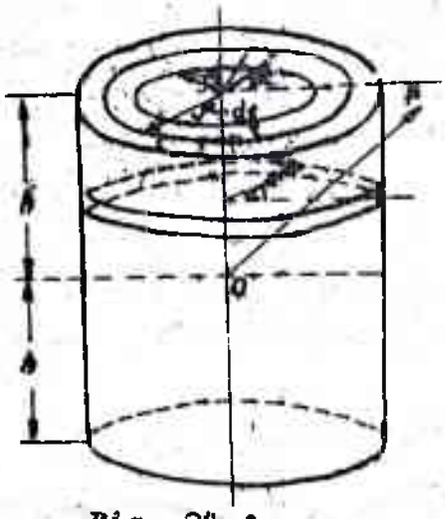


Fig. 24 a
Cavitate cilindrică

ρ şi 2 h raza şi înălţimea lui α ρ şi α coordonatele cilindrice ale unui punct dintr-un sistem de coordonate cu originea O în centrul cilindrului, cu axa z în axa cilindrului şi cu originea unghiurilor α în planul determinat de versorul $\bar{u}_z$ şi de polarizaţia locală $\bar{P}$ (fig 24 a).

Elementele de arie $d\bar{A}_s$ şi $d\bar{A}_i$ ale bazelor superioară şi inferioară sînt $d\bar{A}_s = -d\bar{A}_i = \bar{u}_z \rho\, d\alpha\, d\rho$, valoarea produsului scalar $\bar{P}\,d\bar{A}$ pe un element de arie presupus situat la unghiul α, este $\bar{P}\,d\bar{A} = P_z \rho\, d\alpha\, d\rho$, dacă P_z e componenta z a polarizaţiei, iar $R = \sqrt{\rho^2 + h^2}$. Elementele de arie $d\bar{A}_l$ ale suprafeţei laterale sunt $d\bar{A}_l = \bar{u}_\rho\, a\, d\alpha\, dz$, dacă $\bar{u}_\rho$ e versorul razelor ρ. Dacă se aleg două axe de coordonate ortogonale Ox şi Oy, în planul care trece prin O şi e paralel cu bazele, astfel încît Ox să coincidă cu proiecţia polarizaţiei $\bar{P}$ pe acest plan, rezultă deci : $dA_x = a \cos\alpha\, .d\alpha\, dz$; $dA_y = a \sin\alpha\, .\, d\alpha\, .\, dz$. Produsul scalar $\bar{P}d\bar{A}$, corespunzător elementului $d\bar{A}$ este $\bar{P}d\bar{A} = P_x a \cos\alpha .\, d\alpha .\, dz$, iar $R = \sqrt{a^2 + z^2}$. Componenta z a integralei din (38 c) devine deci, conţinînd de două ori integrala privitoare la baza de sus, pentru a ţine seama de integrala privitoare la baza de jos:

$$\bar{U}_z \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\bar{P}d\bar{A})\bar{R}}{R^3} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{hP_z\rho\, d\alpha\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} + \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \frac{zP_z a\cos\alpha\, d\alpha\, dz}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{\chi h}{\varepsilon_0}\int_0^{a} \frac{P_z\rho\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\chi P_z}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2/h^2+1}}\right).$$

Componenta y a integralei e nulă, iar componenta x e:

$$\bar{U}_x \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\bar{P}d\bar{A})\bar{R}}{R^3} = \frac{\chi}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\rho P_z \cos\alpha\, d\alpha\, d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} + \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \frac{P_x a^2\cos^2\alpha\, d\alpha\, dz}{(a^2+z^2)^{3/2}}\right] =$$

$$\frac{\chi P_x}{4\varepsilon_0}\, a^2 \int_{-h}^{h} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\chi P_x}{2\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{a^2/h^2+1}}$$

Dacă se notează cu γ unghiul format de axa cilindrului cu dreapta care unește centrul lui cu un punct al circumferenței unei baze, rezultă:

$$\cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$\bar{u}_x$ fiind versorul direcției componentei P_x a polarizației, urmează deci din (38 c), pentru cazul în care Σ e o suprafață cilindrică

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \frac{K}{\varepsilon_0}\bar{u}_z P_z (1-\cos\gamma) + \frac{K}{2\varepsilon_0}\bar{u}_x P_x \cos\gamma = \bar{E}_0 + \frac{K}{2\varepsilon_0}\bar{u}_z (\bar{P}\bar{u}_z)(2-3\cos\gamma) + \frac{K}{2\varepsilon_0}\bar{P}\cos\gamma$$

Pentru canalul foarte strîmt ($\lim \frac{a}{h} = 0$; $\cos\gamma = 1$; $\bar{u}_z = \bar{u}_y$) urmează:

$$(38\ d)\quad \bar{E}_{c\,y} = \bar{E}_0 + \frac{K}{2\varepsilon_0}\left[\bar{P} - \bar{u}_y\,(\bar{P}\,\bar{u}_y)\right]$$

și componenta în lungul axei y a canalului, a vectorului cîmp electric din el devine:

$$(38\ e)\quad \bar{u}_y \bar{E}_{c\,y} = \bar{u}_y \bar{E},$$

adică egală cu componenta respectivă a vectorului cîmp $\bar{E}$ (deși vectorii $\bar{E}_{c\,y}$ variază odată cu y). Integrala de linie a vectorului cîmp $\bar{E}$ de- a lungul unei linii oarecare e deci egală cu integrala de linie a vectorilor $\bar{E}_{c\,y}$ de-a-lungul aceleiași linii. Aceasta se numește teorema tensiunii electrice în cîmpul electrostatic:

$$(38\ f)\quad \int_c \bar{E}_{c\,y}\,d\bar{r} = \int_c \bar{E}\,d\bar{r}$$

Dacă axa canalului e paralelă cu $\bar{P}$, se obține

$$(38\ g)\quad \bar{E}_{cp} = \bar{E}$$

adică chiar vectorul cîmp de referință $\bar{E}$.

Pentru fantă, adică pentru discul foarte plat ($\lim \frac{h}{a} = 0$; $\cos\gamma = 0$; $\bar{u}_z = \bar{u}_y$) urmează:

$$(38\ h)\quad \bar{E}_{f\,y} = \bar{E}_0 + \frac{K}{\varepsilon_0}\,\bar{u}_y\,(\bar{P}\,\bar{u}_y)$$

şi componenta perpendiculară pe fantă a vectorului cîmp din el devine:

(38 i) $\bar{u}_{\nu}\,\bar{E}_{f\nu} = \bar{u}_{\nu}\left[\bar{E} + \frac{K}{\varepsilon_o}\bar{P}\right]$,

adică egală cu componenta respectivă a vectorului $E + \frac{k}{\varepsilon_o} P$ (deşi vectorii $\bar{E}_{f\nu}$ variază odată cu ν).

Fluxul vectorului cîmp $\bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o} P$ printr-o suprafaţă oarecare e deci egal cu fluxul vectorului $\bar{E}_{f\nu}$ prin aceiaşi suprafaţă. Aceasta se numeşte teorema fluxului electric în cîmpul electrostatic) .

(38 j) $$\int_S E_{f\nu}\, dA = \int_S (\bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o} \bar{P})\, d\bar{A}$$

Dacă normala pe fantă e paralelă cu $\bar{P}$, se obţine

(38 k) $$\bar{E}_{fp} = \bar{E} + \frac{K}{\varepsilon_o} \bar{P}$$

Vectorul $\bar{E}_{cp} = \bar{E}$ se numeşte intensitatea cîmpului electric, iar vectorul $\bar{E}_{fp} = \bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o} \bar{P}$, care diferă de $\bar{E}$ numai în cîmpurile polarizate, se numeşte intensitatea inducţie a cîmpului electric.

Integrala din expresiunea (38c) se poate evalua simplu, şi fără calcul direct în cazul canalului şi al fantei de direcţia polarizaţiei locale, utilizînd densităţile de suprafaţă ale sarcinilor electrice de polarizaţie electrică suprimată prin evacuarea materialului din cele două cavităţi. In cîmpul canalului, polarizaţia materialului evacuat (fig.26 a) are numai divergenţă de suprafaţă, şi anume pe feţele $d\bar{A}$ de la cele două capete ale canalului. Intensitatea cîmpului $\bar{E}_{cp}$ produs de sarcinile de polarizaţie corespunzătoare $(\bar{P}d\bar{A})$ şi $(-\bar{P}d\bar{A})$

$$\bar{E}'_{cp} = \frac{K}{4\pi\varepsilon_o} \bar{P}d\bar{A}\left(\frac{\bar{R}}{R^3} - \frac{\bar{R}'}{R'^3}\right) = \frac{2k}{4\pi\varepsilon_o} (\bar{P}d\bar{A})\,\bar{R}$$

Ea e nulă în centrul canalului fiindcă dimensiunile liniare ale feţelor $d\bar{A}$ sînt presupuse infinit mici în raport cu R. In cazul canalului vid, integrala din (38 c) e deci incidental nulă. Vectorul cîmp electric $\bar{E}$ din

şi componenta perpendiculară pe fantă a vectorului cîmp din el devine:

$$(38\ i)\quad \bar{u}_{\nu}\,\bar{E}_{f\nu} = \bar{u}_{\nu}\left[\bar{E} + \frac{K}{\varepsilon_o}\bar{P}\right],$$

adică egală cu componenta respectivă a vectorului $E + \frac{k}{\varepsilon_o} P$ (deşi vectorii $\bar{E}_{f\nu}$ variază odată cu ν).

Fluxul vectorului cîmp $\bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o} P$ printr-o suprafaţă oarecare e deci egal cu fluxul vectorului $\bar{E}_{f\nu}$ prin aceiaşi suprafaţă. Aceasta se numeşte teorema fluxului electric în cîmpul electrostatic) .

$$(38\ j)\qquad \int_S \bar{E}_{f\nu}\, \bar{d}A = \int_S \left(\bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o}\bar{P}\right) \bar{d}A$$

Dacă normala pe fantă e paralelă cu $\bar{P}$, se obţine

$$(38\ k)\qquad \bar{E}_{fp} = \bar{E} + \frac{K}{\varepsilon_o}\bar{P}$$

Vectorul $\bar{E}_{op} = \bar{E}$ se numeşte intensitatea cîmpului electric, iar vectorul $\bar{E}_{fp} = \bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o}\bar{P}$, care diferă de $\bar{E}$ numai în cîmpurile polarizate, se numeşte intensitatea inducţie a cîmpului electric.

Integrala din expresiunea (38c) se poate evalua simplu, şi fără calcul direct în cazul canalului şi al fantei de direcţia polarizaţiei locale, utilizînd densităţile de suprafaţă ale sarcinilor electrice de polarizaţie electrică suprimată prin evacuarea materialului din cele două cavităţi. In cîmpul canalului, polarizaţia materialului evacuat (fig.26 a) are numai divergenţă de suprafaţă, şi anume pe feţele $d\bar{A}$ de la cele două capete ale canalului. Intensitatea cîmpului $\bar{E}_{op}$ produs de sarcinile de polarizaţie corespunzătoare $(\bar{P}d\bar{A})$ şi $(-\bar{P}d\bar{A})$

$$\bar{E}'_{op} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\bar{P}d\bar{A}\left(\frac{\bar{R}}{R^3} - \frac{\bar{R}'}{R'^3}\right) = \frac{2k}{4\pi\varepsilon_o}(\bar{P}d\bar{A})\frac{\bar{R}}{R^3}$$

Ea e nulă în centrul canalului fiindcă
neare ale feţelor $d\bar{A}$ sînt presupu
port cu R. In cazul canalul
e deci incidental nu

canalul vid, paralel cu polarizaţia electrică locală, e deci egal cu vectorul de referinţă $\bar{E}$ care se poate deci măsura în acest canal:

$$\bar{E}_{cp} = \bar{E} \qquad (38\ g)$$

In cazul fantei polarizaţia materialului evacuat (fig.26 b) are iarăşi numai divergenţă de suprafaţă, pe feţele din cele două părţi ale fantei. Intensitatea cîmpului $\bar{E}'_{fp}$, produs de sarcinile de polarizaţie corespunzătoare, de densităţi superficiale $\sigma_{ps} = -P$ şi $-\sigma_{ps} = P$, se calculează cu formula (11) din cazul condensatorului plan:

$$E'_f = \frac{k}{\varepsilon_o}\sigma_{ps} = \frac{k}{\varepsilon_o} P$$

Ea are sensul opus sensului polarizaţiei electrice locale suprimate. Dacă în prezenţa polarizaţiei locale, vectorul cîmp de referinţă era E, în absenţa acestei polarizaţii, adică adică în fantă, vectorul cîmp electric în vid va fi deci

$$\bar{E}_{fp} = \bar{E} - \bar{E}'_f = \bar{E} + \frac{k}{\varepsilon_o}\bar{P} \qquad (38$$

Di[illegible]aţia (38 g) se deduce vectorul cîmp de ref[illegible]nţă $\bar{E}$ iar d[illegible] (38 d) şi (38 a) se deduce polarizaţia [illegible]ctrică locală $\bar{P} = \varepsilon_o[\bar{E}_f - \bar{E}_c]$, aşa încît se poate [illegible]alcula din (38 c) vect[illegible] cîmp electric din orice cavitate. Singura determinare pe car[illegible] introdus-o consistă în faptul că am utilizat direcţia polar[illegible]ei locale $\bar{P}$ înainte de a o cunoaşte. Pentru a ridica şi ace[illegible] nedeterminare, observăm că $\bar{E}_f - \bar{E}_c$ [illegible]e paralel cu $\bar{P}$, adică [illegible]buie să fie paralel cu direcţia comună a axei canalului şi a normalei pe fantă. Se alege deci canalul şi fanta în aşa fel, [illegible]ît să fie satisfăcută această condiţie, şi deci nu trebu[illegible]unoscută în [illegible]l direcţia polarizaţiei electrice loca[illegible] Calculele [illegible] sînt deduse numai pe[illegible] cazul [illegible] fiind că am utilizat formule [illegible]bile [illegible] formula (38 c) e val[illegible]lă [illegible] electrostatice. (Aceas[illegible] [illegible]ile electrice pro-

duse de corpurile cu momente electrice, nu există nici un alt cîmp electric care să crească atît de repede cînd ne apropiem de corpuri.)

Fiindcă vectorii cîmp $\bar{E}_{cp}$ şi $\bar{E}_{cp}$ se pot măsura direct, se enunţă adesea legile cîmpului electric în funcţiune de aceste cîmpuri, nu în funcţiune de cîmpul de polarizaţie şi în funcţiune de polarizaţia electrică. Rezumăm mai jos toate aceste rezultate şi generalizăm, pentrucă am făcut calculele numai pentru cazul cîmpurilor electrostatice. Pentru a putea generaliza, nu folosim relaţia (38 k) dintre $\bar{E}_{fp}$ şi $\bar{E}_{cp}$

6,2. <u>Intensitatea şi intensitatea- inducţie a cîmpului electric.</u> Se obţine o descriere simplă a stărilor electrice din corpuri, dacă se folosesc vectorii cîmp electric din următoarele două forme de cavităţi vide, presupuse practicate, pe rînd, în corpuri : Un canal vid, foarte scurt şi extrem de strîmt faţă de lungime, forma secţiunii lui fiind indiferentă, şi o fantă vidă, de arie foarte mică şi extrem de plată, forma ariei fantei fiind indiferentă (fiindcă în cazurile considerate, vectorii cîmp electric astfel definiţi nu depind de formele secţiunii canalului şi ariei fantei). În fiecare punct se presupune că axa canalului are aceiaşi direcţie ca normala pe fantă , iar direcţia comună privilegiată a acestor două elemente se alege astfel încît să fie direcţia diferenţei instantanee dintre forţele care s-ar exercita asupra aceluiaşi corp de probă, cu aceiaşi sarcină adevărată, în interiorul celor două cavităţi. Starea locală a cîmpului electric în corpuri se descrie deci cu ajutorul perechii formate din vectorul cîmp electric într-un canal vid, de direcţia privilegiată, instantaneu şi local, numit intensitatea locală a cîmpului electric, şi de vectorul cîmp electric într-o fantă vidă, presupusă normală pe canal, numit intensitatea- inducţie a cîmpului electric.

Intensitatea $\bar{E}$ a cîmpului electric într-un corp e o mărime de stare instantanee a cîmpului electric, egală

cu cîtul dintre forţa de natură electrică $\bar{F}_{cp}$ şi sarcina electrică adevărată q a unui mic corp de probă metalic, asupra căruia s-ar exercita forţa $\bar{F}_{cp}$, cînd corpul s-ar găsi în imobilitate relativă faţă de materialul din vecinătatea imediată, într-un canal vid, foarte scurt şi extrem de strîmt, a cărui axă are o direcţie privilegiată instantaneu şi local:

(38 l) $$\bar{E} = \frac{\bar{F}_{cp}}{q}$$

Intensitatea-inducţie $\bar{D}'$ a cîmpului electric într-un corp e o mărime de stare a cîmpului electric, egală cu cîtul dintre forţă de natură electrică $\bar{F}_{fp}$ şi sarcina electrică adevărată q a unui mic corp de probă metalic, asupra căruia s-ar exercita forţa $\bar{F}_{p}$ cînd corpul s-ar găsi, în imobilitate relativă faţă de materialul din vecinătate, într-o fantă vidă, foarte mică şi extrem de plată, a cărei normală are o direcţie privilegiată instantaneu şi local:

(38 m) $$\bar{D}' = \frac{\bar{F}_{fp}}{q}$$

Direcţia comună a axei canalului şi a normalei pe fantă trebuie aleasă astfel, încît să coincidă cu direcţia diferenţei instantanee $\bar{D}' - \bar{E}$. Această direcţie comună nu depinde numai de proprietăţile corpului în care ar trebui practicate cavităţile, ci şi de starea sa electrică, adică de cîmpul electric; pentru un acelaşi punct dintr-un corp, direcţia poate varia odată cu cîmpul. Experienţa arată că, aproape în toate corpurile isotrope, atît $\bar{E}$ cît şi $\bar{D}'$ au, în aceste condiţiuni, orientarea axei canalului, respectiv orientarea normalei pe fantă; în corpurile anisotrope, $\bar{E}$ şi $\bar{D}'$ nu sunt, în general, paraleli cu diferenţa $\bar{D}' - \bar{E}$. Intensitatea şi intensitatea- inducţie a cîmpului electric fiind ambii vectori cîmp electric în vid, determinaţi în anumite condiţiuni privilegite, au aceleaşi unităţi de măsură ca şi acesta.

Scanned with OKEN Scanner

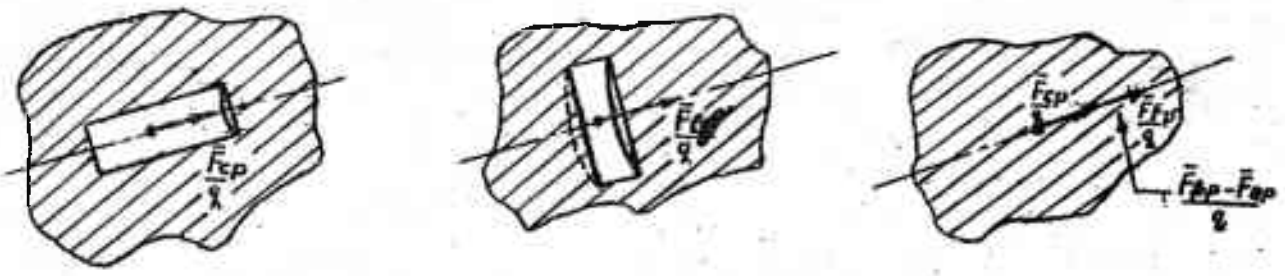


Fig. 25

Figuri pentru definiţia intensităţii cîmpului electric(a) şi a intensităţii- inducţie a cîmpului electric (b) în corpuri isotrope.

Fig. 25. reprezintă relaţiile pentru definiţia intensităţii şi intensităţii- inducţie în corpurile isotrope; fig. 26 reprezintă aceleaşi relaţii pentru corpurile anisotrope (cristaline).

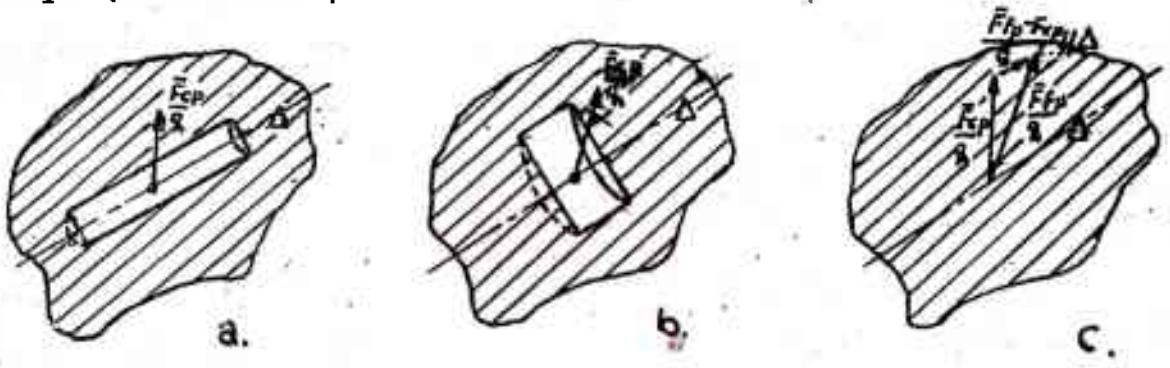


Fig. 26

Figuri pentru definiţia intensităţii(a) şi a intensităţii-inducţie(b) a cîmpului electric în corpuri anisotrope,în condiţiunile din fig c

6,3. Inducţia electrică .In general, forţa care se exercită între două mici conductoare încărcate cu unitatea de măsură a sarcinii electrice adevărate şi situate în vid, la o distanţă egală cu unitatea de lungime unul de altul, e numeric egală cu Δ_0, adică e egală cu de $\frac{\kappa}{4\pi}$ ori valoarea reciprocă a permitivităţii absolute ε_0 a vidului. Spre a compensa în ecuaţii această deosebire faţă de unitate, se operează adesea, nu cu intensitatea - inducţie $\bar{D}'$ a cîmpului electric, ci cu o mărime egală cu produsul dintre permitivitatea absolută ε_0 a vidului şi intensitatea- inducţie $\bar{D}'$ a cîmpului electric.

Această mărime $\bar{D}$ se numeşte inducţie electrică:

(38 n) $$\boxed{\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{D}'}$$

Unitatea ei de măsură e afectată de raţionalizare, fiindcă unitatea de măsură a permitivităţii vidului e afectată de această operaţiune; ea se numeşte coulomb steradian pe metru pătrat ($Cstr/m^2$) în sistemul de unităţi MKSC neraţionalizate -+ şi coulomb pe metru pătrat în sistemul de unităţi MKSC raţionalizate.

Există şi mijloace experimentale pentru definirea directă a inducţiei electrice în unităţi neraţionalizate, dar acestea se pot explica numai cu ajutorul legii fluxului electric.

Tuburile de linii de cîmp ale inducţiei electrice se numesc şi tuburi de flux electric.

7.- INTENSITATEA CIMPULUI ELECTRIC IMPRIMAT

Se arată experimental că, pentru ca un conductor omogen şi la temperatură uniformă să se găsească în regim electrostatic, trebuie ca intensitatea cîmpului electric să fie nulă în interiorul lui ($\bar{E}_c = 0$), iar intensitatea cîmpului exterior, în imediata apropiere a suprafeţei lui, să fie perpendiculară pe conductor (să aibă componentă tangenţială nulă la suprafaţa lui : $E_t = 0$), adică liniile de cîmp ale cîmpului electric trebuie să fie perpendiculare pe suprafaţa conductorului şi să nu pătrundă în interiorul lui:

(a) $$\bar{E}_c = 0 \; ; \quad \bar{E}_t = 0.$$

Se mai arată experimental că un conductor neomogen, sau unul care se găseşte la temperatură neuniformă nu se găseşte în regim electrostatic cînd intensitatea cîmpului electric e nulă în toate punctele din interiorul său. Pentru ca să se stabilească acest regim în astfel de conductoare, sau într-un sistem format din mai multe cond...

toare omogene şi în contact unele cu altele (care prezintă neomogenitate în straturile de la suprafeţele de contact), trebuie să fie satisfăcute următoarele condiţiuni: Intensitatea cîmpului electric să aibă în interiorul lor, în fiecare regiune de neomogeneitate, o anumită valoare locală dată $\bar{R}$, care depinde de natura şi de gradul neomogeneităţii : $\bar{E}_c = \bar{R}$; pentru interiorul conductoarelor neomogene sau la temperatură neuniformă, condiţiunea de regim electrostatic se obţine deci anulînd suma dintre intensitatea locală a cîmpului electric $\bar{E}_c$ şi dintre valoarea locală şi cu semn schimbat $\bar{E}_i = -\bar{R}$ a mărimii vectoriale $\bar{R}$, adică punînd condiţiunea $\bar{E}_c + \bar{E}_i = 0$. La suprafaţa acestor conductoare, condiţiunea de regim electrostatic se obţine punînd, în exteriorul lor, componenţa tangenţială $E_{t\Sigma}$ a intensităţii cîmpului electric egală cu componenta tangenţială $E_{tc\Sigma}$ a intensităţii cîmpului electric $\bar{E}_c$ din interiorul conductoarelor:

$$(39) \quad \bar{E}_c + \bar{E}_i = 0 \; ; \quad E_{t\Sigma} = E_{tc\Sigma}$$

Mărimea $\bar{E}_i$, astfel definită, se numeşte intensitatea cîmpului electric imprimat. Prin definiţie, ea are sens numai pentru interiorul conductoarelor.

Intensitatea cîmpului electric imprimat caracterizează comportarea conductoarelor şi cînd acestea nu se găsesc în regim electrostatic: Un conductor neomogen se comportă local, din punctul de vedere al curentului electric care trece prin el, ca un conductor omogen în care cîmpul electric ar avea intensitatea egală cu suma vectorială dintre intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ şi intensitatea cîmpului electric imprimat $\bar{E}_i$ din conductorul neomogen. Această sumă $\bar{E}_\ell$ se numeşte intensitatea cîmpului electric în sens larg:

$$(40) \quad \bar{E}_\ell = \bar{E} + \bar{E}_i$$

Ea este egală, în fiecare punct din conductor, cu excesul local al intensităţii cîmpului electric faţă de intensitatea cîmpului corespunzător regimului electrostatic.

Neomogeneităţile din conductoare, cari condiţio-

nează cîmpuri electrice imprimate, sunt de două feluri : Necmogeneităţi de constituţie chimică şi de concentraţie a soluţiilor conductoare, şi neomogeneităţi constituite de repartiţia neuniformă a temperaturii şi a acceleraţiei în conductoare. După locul pe care-l ocupă aceste neomogeneităţi se deosebesc două feluri de cîmpuri electrice imprimate. Unele sunt cîmpuri de interfeţe localizate în suprafaţa de contact dintre două conductoare, şi sunt condiţionate fie numai de diferenţa de constituţie chimică a acelor două conductoare în contact, fie şi de diferenţa, sau exclusiv de diferenţa, de temperatură dintre diferitele puncte ale suprafeţei sau ale suprafeţelor de contact. Altele sunt cîmpuri electrice imprimate spaţiale, a căror intensitate e repartizată continuu în întregul volum ocupat de conductor, şi e condiţionată fie de neuniformitatea constituţiei chimice, respectiv a concentraţiei, fie de neuniformitatea temperaturii sau de inegalitatea acceleraţiei diferitelor puncte în raport cu sistemele de referinţă inerţiale.

Cîmpurile electrice imprimate din suprafaţa de contact a două conductoare de prima clasă se numesc cîmpuri electrice imprimate voltaice; cele din suprafaţa de contact dintre un conductor de prima clasă şi unul de a doua clasă se numesc cîmpuri imprimate galvanice; cele din suprafeţele de contact de temperaturi neegale a două conductoare de prima clasă se numesc cîmpuri imprimate Seebeck; cele din interiorul unui electrolit sau din interiorul unei soluţii electrolitice, provenite din neuniformitatea constituţiei chimice, respectiv a concentraţiei, se numesc cîmpuri imprimate de concentraţie; cele din conductoarele de prima clasă provenite din neuniformitatea temperaturii se numesc cîmpuri imprimate thomsoniene, iar cele provenite din inegalitatea acceleraţiilor se numesc cîmpuri electrice imprimate, de natură mecanică.

Intensitatea cîmpurilor electrice imprimate depinde de neuniformitatea constituţiei chimice, respectiv a concentraţiei, ca şi a acceleraţiei şi temperaturii conduc-

Scanned with OKEN Scanner

coarelor. Legile respective nu fac toate parte din teoria propriu-zisă a fenomenelor electrice, fiindcă în stabilirea intensităţii cîmpului electric imprimat intervin fenomene care nu sunt de natură electrică. De aceia intensitatea cîmpului electric imprimat, care nu este o mărime de natura fizică a intensităţii cîmpului electric(fiindcă exprimă numai în termeni de teoria fenomenelor electrice efectul unor stări neelectrice), se consideră de obiceiu ca dat în studiul fenomenelor electrice. Există o singură lege care priveşte cîmpurile electrice imprimate şi care prezintă importanţă în studiul stărilor electrice: Legea cîmpurilor electrice imprimate. Celelalte legi cu ajutorul cărora se studează cîmpurile electrice imprimate sunt legile Termodinamicii sau ale Mecanicii.

8.- Sisteme de unităţi de măsură şi sisteme de dimensiuni

8.1. Ecuaţiile de definiţie a mărimilor fizice.

Am arătat în introducere că speciile de mărimi fizice se împart în mărimi primitive şi mărimi derivate şi că o specie de mărimi derivate se defineşte punînd valoarea mărimilor ei egală cu o anumită funcţiune de valorile mărimilor folosite în definiţie, sau de creşterile valorilor acestor mărimi. Ecuaţia pe care o constituie egalitatea dintre valoarea mărimilor unei specii derivate şi funcţiunea de valorile, sau de creşterile valorilor mărimilor altor specii, prin care se defineşte specia de mărimi derivate, am numit-o ecuaţia de definiţie a speciei mărimii derivate.

In ecuaţia de definiţie a unei mărimi derivate poate interveni şi o constantă în afară de mărimile fizice variabile cari intervin în definiţia ei. Viteza de exemplu, s-ar putea defini şi punînd o constantă de proporţionalitate C în membrul al doilea al ecuaţiei ei de definiţie. Constantele C din ecuaţiile de definiţie intervin ca parte în definiţiile mărimilor derivate respective. Dacă se aleg, odată pentru totdeauna, valorile acestor constante, adică dacă

valorile acestor constante nu se schimbă odată cu unităţile mărimilor folosite în definiţii, ele se numesc coeficienţi, iar ecuaţiile de definiţie respective se numesc formele de coerenţă ale acestor ecuaţii. Forma de coerenţă a ecuaţiei de definiţie a unei mărimi derivate determină atît unitatea ei de măsură, cît şi valoarea ei şi procedeul de măsură, în funcţiune de unităţile de măsură, de valorile sau de creşterile valorilor, şi în funcţiune de procedeele de măsură a mărimilor folosite în acea ecuaţie de definiţie. Unitatea de măsură a unităţii derivate, corespunzătoare unităţilor de măsură ale mărimilor din forma de coerenţă a ecuaţiei ei de definiţie, se numeşte unitatea ei coerentă cu unităţile de măsură ale acestor mărimi. Ea este acea pentru care funcţiunea din forma de coerenţă a ecuaţiei de definiţie are valoarea egală cu unitatea. De exemplu, unitatea de măsură a vitezei $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, e viteza pentru care valoarea derivatei din forma de coerenţă a ecuaţiei de definiţie e egală cu vectorul unitate care are orientarea vitezei ce urmează să fie măsurată; valoarea absolută a derivatei trebuie să fie deci egală cu unitatea. Valoarea mărimii derivate, în unităţi de măsură coerente, e însăşi valoarea funcţiunii din forma de coerenţă a ecuaţiei ei de definiţie.

Valoarea coeficientului din forma de coerenţă a ecuaţiei de definiţie trebuie aleasă pentru fiecare mărime derivată în parte. De obicsiu, i se atribuie valori simple sau importante: 1, $\frac{1}{2}$, 4π, etc. De exemplu, ecuaţia de definiţie a vitesei are coeficientul 1; ecuaţia de definiţie a energiei cinetice W_{cin} a unui punct material de masă m, în raport cu un sistem inerţial faţă de care punctul are viteza v, are coeficientul $\frac{1}{2}$:

$$(a) \qquad W_{cin} = \frac{1}{2} mv^2$$

Există mărimi primitive independente, cari pot fi măsurate în acelaşi unitate de măsură. Procedeul de măsură a acestor mărimi primitive cuprinde deci aceleaşi operaţii experimentale pentru determinarea valorilor lor; nu-

mai condiţiunile în cari se determină valorile lor diferă de la o mărime la alta. Intensitatea şi intensitatea- inducţie a cîmpului electric constituie, în Teoria macroscopică, un astfel de exemplu. Ambele se determină, pentru un acelaşi punct şi moment, prin aceleaşi operaţii experimentale şi prin formarea cîtului dintre forţa care se exercită asupra unui mic corp de probă, şi sarcina lui adevărată; numai condiţiunile în cari se măsoară forţa electrică sunt altele: corpul de probă e presupus situat într-un canal vid care are direcţia polarizaţiei electrice instantanee locale pentru determinarea intensităţii, şi e situat într-o fantă vidă, perpendiculară pe direcţia polarizaţiei electrice instantanee locale,pentru determinarea intensităţii - inducţie a cîmpului electric. Numărul de unităţi de măsură ale mărimilor primitive e deci mai mic decît numărul de mărimi primitive independente, dacă unele din acestea sunt măsurabile în aceiaşi unitate de măsură.

Din punctul de vedere al relaţiilor matematice folosite la introducerea mărimilor primitive, speciile acestora se împart în patru grupuri: Specii care nu au relaţie de definiţie; specii care au o relaţie parametrică de definiţie, în care intervine adică în mod neccesar şi o valoare arbitrară a unei mărimi dintr-o altă specie; specii care au relaţie neparametrică de definiţie, în care nu intervin adică valori arbitrare ale celorlalte specii de mărimi primitive, - şi specii care se introduc deodată împreună cu o altă specie primitivă, perechea de specii de mărimi avînd o singură relaţie neparametrică de definiţie, în care nu intervin valori arbitrare ale celorlalte specii primitive. Dăm mai jos exemple din fiecare grup.

Am arătat că lungimea, prima specie de mărimi primitive care se introduce în Fizică, nu poate fi definită folosind valorile altor specii primitive, oricît s-ar face apel la experienţă, pentru motivul că alte specii de mărimi primitive încă nu sunt definite. De aceia distanţa dintre două puncte se defineşte alegînd în concret unitatea de lungime (de exemplu metrul etalon dela Biroul internaţional de mă-

suri şi greutăţi) şi indicînd explicit procedeul de măsură, fără a folosi vreo relaţie matematică de definiţie. Pentru celelalte specii de mărimi primitive, sau pentru perechile formate din celelalte specii de mărimi primitive, se pot folosi însă relaţii matematice de definiţie, fiindcă s-a introdus în prealabil cel puţin lungimea şi mărimile derivate din ea, ca unghiul, aria, volumul, etc.

t/ Pentru a introduce specia de mărimi numite duratele dintre două evenimente, se poate folosi, de exemplu, diferenţa $\Delta\alpha$ dintre unghiurile, în raport cu un plan meridian pămîntesc, formate din razele vectoare dintre Pămînt şi poziţiile pe care le ocupă o aceiaşi stea, simultan cu cele două evenimente. Dacă $\Delta\alpha_1$ e diferenţa dintre unghiuri corespunzătoare unităţii de timp, şi $\Delta\alpha$ e diferenţa dintre unghiurile corespunzătoare timpului dintre cele două evenimente considerate, timpul se introduce prin relaţia:

$$(b) \qquad \frac{t}{t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha_1} ,$$

unde $t_1 = 1$.

Timpul face deci parte din grupul speciilor mărimilor primitive în a căror relaţie de definiţie intervine o valoare arbitrară ($\Delta\alpha_1$) a unei alte specii de mărimi(unghiul)

Masa inertă face parte din acelaşi grup de specii mărimi primitive. In adevăr alegem un mic corp de referinţă (de exemplu kilogramul dela Biroul internaţional de măsuri şi greutăţi). Fie v_1 şi v vitezele în raport cu un anumit sistem de referinţă inerţial, cu cari trebuie să proiectăm unul contra altuia, kilogramul etalon şi un alt corp, pentru ca acestea, ciocnindu-se şi cuplîndu-se la ciocnire, să rămînă în repaus. Masa inertă a celui de al doilea corp are o valoare m care se deduce din relaţia:

$$(c) \qquad \frac{m}{m_1} = \frac{v_1}{v}$$

unde $m_1 = 1$. Si în această relaţie de definiţie intervine deci o valoare arbitrară (v_1) a unei alte specii mărimi, introdusă în prealabil în Fizică.

Din cele patru specii de mărimi primitive introduse în studiul fenomenelor electrice, sarcina electrică adevărată şi intensitatea cîmpului electric se introduc deodată printr- o singură relaţie neparametrică:

$$(38\ 1) \qquad \bar{F}_{cp} = q\bar{E}$$

Perechea q, $\bar{E}$ face deci parte din cel de al patrulea grup de specii de mărimi primitive, fiindcă are o singură relaţie de definiţie în care nu intervin valori arbitrare.

Intensitatea- inducţie a cîmpului electric se introduce cu o relaţie de definiţie neparametrică proprie:

$$(38\ m) \qquad \bar{D}' = \frac{\bar{F}_{cp}}{q},$$

în care nu intervin adică valori arbitrare ale mărimilor şi deci face parte din cel de al treilea grup de specii de mărimi primitive. De asemenea momentul electric $\bar{p}$, care se introduce printr-o relaţie de definiţie neparametrică proprie (11) :

$$(11) \qquad \bar{G} = \bar{p} \times \bar{E}$$

şi printr- o consecinţă a acesteia (12), face parte din cel de al treilea grup, fiindcă în relaţiile (11) şi (12) nu intervin valori arbitrare ale mărimilor.

Impărţirea speciilor de mărimi primitive în patru grupuri, din punctul de vedere al relaţiilor lor de definiţie, prezintă importanţă pentru problema independenţei unităţilor de măsură ale speciilor de mărimi fizice.

8,2. <u>Numărul de unităţi de măsură independente.</u> Relaţiile de definiţie neparametrice ale speciilor de mărimi primitive au aceiaşi structură ca şi ecuaţiile de definiţie ale mărimilor derivate.

Dacă se foloseşte deci forma de coerenţă a acestor relaţii, rezultă din fiecare relaţie unitatea de măsură a cîte unei specii de mărimi primitive în funcţiune de unităţile alese arbitrar ale celorlalte. Relaţiile de definiţie parametrice (cum sunt relaţiile de definiţie a timpului

şi masei inerte), chiar dacă au forma de coerenţă, nu pot fi folosite însă pentru a determina unităţile acestor specii de mărimi în funcţiune de unităţile celorlalte specii, din cauza valorii arbitrare care intervine în ele.

In Mecanică şi în fenomenele electrice studiate pînă acum intervin şapte specii de mărimi primitive şi trei relaţii de definiţie neparametrice : relaţiile (38 l), (38 m) şi (11). Dacă se foloseşte formele de coerenţă ale acestor trei relaţii, rezultă că unităţile de măsură a trei specii de mărimi primitive sunt determinate în funcţiune de unităţile de măsură ale celorlalte patru specii, cari rămîn arbitrare.

Dacă fiecare nouă specie de mărimi primitive,pe care vom introduce-o în viitor în studiul fenomenelor electrice şi magnetice, va avea o relaţie neparametrică, de definiţie, rezultă că numărul total al unităţilor de măsură arbitrare ale speciilor de mărimi folosite în Mecanică şi Electromagnetism este patru. Cunoştinţele noastre actuale de Teoria electronilor ne permit, în adevăr, să dăm cîte o astfel de relaţie de definiţie pentru fiecare nouă specie de mărimi primitive. Teoria macroscopică permite să dăm însă numai un număr de astfel de relaţii de definiţie care e cu o unitate mai mic decît numărul de noi specii de mărimi primitive , pe care le vom introduce în viitor. De aceia, conform teoriei electronilor, unităţile de măsură a numai patru specii de mărimi primitive din Mecanică şi Electromagnetism sunt independente. Conform cunoştinţelor care existau înainte de constituirea Teoriei electronilor, acest număr era egal însă cu cinci. Acestora li se mai adaugă o specie de mărimi primitive termice(şi una pentru mărimile fotometrice).

8,3. <u>Mărimi fundamentale şi mărimi secundare</u>. Nu e totdeauna util ca speciile de mărimi ale căror unităţi de măsură sunt variate independent, să fie toate specii de mărimi primitive. Ele ar putea fi anumite specii de mărimi derivate. In acest caz forma de coerenţă a ecuaţiilor de definiţie ale acestor specii derivate ar determina unităţile de măsură ale anumitor specii primitive în funcţiune de unită-

tăţile de măsură ale speciilor cu unităţi de măsură variate independent. Speciile de mărimi ale căror unităţi de măsură se variază independent se numesc specii de mărimi fundamentale, pentru a putea fi deosebite de celelalte, fie fiindcă sunt mai puţine decît cele primitive, fie fiindcă ele ar putea fi specii de mărimi derivate.

Speciile ale căror unităţi de măsură depind(în virtutea formei de coerenţă a ecuaţiilor sau a relaţiilor de definiţie în cari intervin) de unităţile mărimilor fundamentale, se numesc specii de mărimi secundare. Numărul de specii de mărimi fundamentale e egal cu diferenţa dintre numărul de specii de mărimi primitive şi numărul de relaţii de definiţie neparametrice, indiferent dacă speciile fundamentale sunt primitive sau derivate.

8,4. Sisteme de unităţi de măsură coerente. Dacă se aleg, dintre speciile primitive şi derivate, toate speciile fundamentale, şi toate unităţile de măsură ale acestor specii de mărimi fundamentale, şi se determină, în funcţiune de ele, unităţile de măsură coerente cu ele ale tuturor speciilor de mărimi secundare, se obţine un sistem de unităţi de măsură coerente.Sistemul de unităţi de măsură coerente ale Mecanicii şi Teoriei macroscopice a electricităţii şi magnetismului avea deci cinci unităţi de măsură fundamentale, iar sistemul Mecanicii şi al Teoriei electronilor are patru unităţi de măsură fupdamentale. Fiindcă starea cunoştiinţelor din timpul în care s-a constituit Teoria macroscopică a fost depăşită, se folosesc actualmente numai sisteme de unităţi coerente cu patru unităţi fundamentale. Cele mai multe dintre acestea au trei unităţi fundamentale mecanice (lungimea, timpul şi masa inertă) şi o unitate fundamentală electromagnetică (sarcina electrică, sau o altă mărime); altele folosesc însă două unităţi de specii de mărimi mecanice şi două unităţi de specii de mărimi electromagnetice.

8,5. Măsurarea şi reperarea. Pentru ca o operaţie experimentală să fie considerată procedeu de măsură, trebuie ca operaţia să îndeplinească următoarea condiţie metrologică

principală:Raportul dintre valorile a două mărimi fizice de aceiaşi specie, măsurate cu acelaşi procedeu de măsură, dar date oricum(de ex. două lungimi, două sarcini electrice,etc) trebuie să fie independent de unitatea de măsură unică, folosită pentru măsurarea lor. Acest raport trebuie să fie deci un scalar invariant faţă de schimbarea unităţii de măsură. De exemplu,în cazul lungimii raportul dintre valorile lungimilor de 5 cm = o,o5 m şi de 3o cm = o,3 m este independent de faptul dacă lungimile se măsoară ambele în centimetri sau ambele în metri, fiindcă r= 5: 3o = o,o5 : o,3. Dacă nu e satisfăcută această condiţie principală, se spune că operaţia experimentală constituie un procedeu de reperare, nu un procedeu de măsură.

Ecuaţia, respectiv relaţia de definiţie a unei specii de mărimi secundare, trebuie să satisfacă deci condiţiunea ca raportul valorilor a două mărimi de acea specie, date oricum, să fie independent de unităţile de măsură alese pentru speciile folosite în ecuaţia de definiţie. Dacă nu ar putea fi satisfăcută această condiţie principală, nu am avea o/ specie de mărimi secundare măsurabile, fiindcă ea ar admite cel mult un procedeu de reperare, şi nu un procedeu de măsură.

Restricţia indicată impune anumite condiţiuni pe cari trebuie să le satisfacă ecuaţiile şi relaţiile de definiţie. In adevăr, cînd se schimbă unitatea de măsură a unei anumite mărimi date (de ex. a unei durate), trebuie ca valoarea ei să varieze astfel, încît raportul dintre valorile ei, în raport cu noua şi cu vechea unitate, să fie egal cu raportul dintre valorile vechi şi noui ei unităţi, ambele exprimate în raport cu o aceiaşi unitate de măsură.
Deci, să presupunem că procedeele de măsură a mărimilor folosite în definiţia unei specii secundare satisfac condiţiunea metrologică principală. Pentru ca această condiţiune să fie satisfăcută şi pentru mărimea secundară, valorile ei nu pot fi funcţiuni oarecari de valorile sau de creşterile valorilor mărimilor folosite în definiţie. Numai un anumit tip de funcţiuni satisface această condiţiune. In adevăr, fie p_1

p_2, ... p_n, valori, sau creşteri ale valorilor speciilor de mărimi folosite în ecuaţia de definiţie-şi anume valori scalare, vectoriale, etc. după natura acestor specii (dar pe cari nu le mai notăm cu bare, etc); fie m valoarea corespunzătoare a unei specii de mărimi derivate, şi fie

$$(e) \quad m = F(p_1, p_2, \ldots p_n)$$

ecuaţia, respectiv relaţia de definiţie a speciei secundare, în unitatea de măsură veche, corespunzătoare anumitor unităţi de măsură vechi ale speciilor folosite în definiţie.
Dacă se exprimă valorile speciilor din definiţie în unităţi de măsură noi, de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ori mai mici decît cele vechi, valoarea m a mărimii secundare, exprimată în noua ei unitate de măsură corespunzătoare, va fi $m' = f(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2, \ldots, \alpha_n p_n)$. Condiţiunea ca raportul valorilor a două mărimi date ale speciei secundare, de exemplu m şi m_A să fie independent de unitatea de măsură, se exprimă sub forma:

$$\frac{m'}{m'_A} = \frac{m}{m_A}$$

sau sub forma

$$\frac{m'}{m} = \frac{f(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2, \ldots, \alpha_n p_n)}{f(p_1 p_2 \ldots p_n)} = \frac{m'_A}{m_A} = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Aici φ e o funcţiune care nu depinde de valorile $p_1 p_2 \ldots p_n$, fiindcă în valoarea m dată, valoarea m_A e o valoare oarecare. Pentru ca raportul din cel de al doilea membru al ultimei relaţii să fie independent de valorile p_i, trebuie însă ca funcţiunea $f(p_1 p_2 \ldots p_n)$ să fie un produs de puteri a_i ale valorilor p_i, pentru ca puterile valorilor p_i din numărător să se reducă cu puterile valorilor p_i din numitor. Valoarea m poate fi deci numai de forma :

$$(41) \quad m = C p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

unde C e o constantă, iar produsele pot fi produse oarecari, definite în calculul cu scalari, cu vectori, etc. In adevăr în acest caz,

$$\frac{m'}{m} = \frac{C(\alpha_1 p_1)^{a_1}(\alpha_2 p_2)^{a_2}\ldots(\alpha_n p_n)^{a_n}}{C(p_1)^{a_1}(p_2)^{a_2}\ldots(p_n)^{a_n}} = \alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2}\ldots\alpha_n^{a_n},$$

Se poate demonstra şi exact că m poate avea numai forma (41)

De exemplu ecuaţia de definiţie a vitezei $\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}$ are forma (41), cu valorile $n = 2$; $C = 1$, $p_1 = d\bar{r}$ $a_1 = 1$; $p_2 = dt$; $a_2 = -1$.

Trebuie remarcat că forma (41) a funcţiunilor din ecuaţiile de definiţie a mărimilor derivate nu exclude termenii aditivi. Să presupunem că avem în (41) $n = 4$, şi că definim două mărimi derivate m_1 şi m_2, de formele :

$$m_1 = C_1 p_1^{a_1} p_2^{a_2-1} p_3 p_4^{a_4}; \quad m_2 = C_2 p_2 p_3^{a_3-1} p_4^{-a_4}$$

In acest caz, se poate defini o mărime derivată de forma

$$m = C' p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} + C'' m_1 m_2,$$

fiindcă în ultimul termen din membrul drept intervin valorile (sau creşterile) $p_1 p_2 p_3$ a trei mărimi ridicate la aceleaşi puteri ca în primul termen din membrul drept.

8,6. <u>Dimensiunile speciilor de mărimi fizice</u>. Dacă se schimbă unităţile de măsură ale speciilor fundamentale p_i, astfel încît raportul dintre vechile şi noile lor unităţi să fie r_i, raportul dintre noile şi vechile lor valori p_{iN} şi p_{iV} e, de asemenea, egal cu r_i:

$$(42) \quad r_i = \frac{p_{iN}}{p_{iV}}$$

In aceste condiţii, se schimbă şi unitatea de măsură a fiecărei specii secundare m, care rezultă din forma de coerenţă a ecuaţiei de definiţie, astfel încît raportul dintre vechea şi noua ei unitate, adică şi raportul dintre noua şi vechea ei valoare, este R :

$$(43) \quad R = \frac{m_{iN}}{m_{iV}}$$

Raportul R se poate calcula din forma de coerenţă a ecuaţiei de definiţie(41) a mărimii secundare. In adevăr :

$$m_{iv} = C p_{1v}^{a_1} p_{2v}^{a_2} \ldots p_{nv}^{a_n} \; ; \; m_{iN} = C p_{1N}^{a_1} p_{2N}^{a_2} \ldots p_{nN}^{a_n}$$

adică, prin împărţire membru cu membru:

$$(44) \quad R = r_1^{a_1} r_2^{a_2} \ldots r_n^{a_n}$$

Se spunea în trecut că specia secundară m are dimensiunea a_1 în raport cu specia fundamentală p_1, dimensiunea a_2 în raport cu specia fundamentală p_2, etc. In vechea accepţiune a termenului dimensiune, o specie are deci, în raport cu fiecare dintre speciile fundamentale, o dimensiune egală cu exponentul pe care-l are acea specie în ecuaţia de definiţie a speciei considerate.

De exemplu, aria are dimensiunea 2 în raport cu lungimea şi dimensiunile zero în raport cu toate celelalte specii fundamentale ; viteza are dimensiunea 1 în raport cu lungimea, dimensiunea - 1 în raport cu timpul şi dimensiunile zero în raport cu toate celelalte specii fundamentale.

In accepţiunea mai nouă a termenului, dimensiunea unei specii, în raport cu un sistem de specii fundamentale, e însuşi produsul rapoartelor r_i dintre noile şi vechile valori ale mărimilor speciilor fundamentale, ridicate la puterile a_i, la cari aceste mărimi intervin în ecuaţia de definiţie a speciei în funcţiune de mărimile speciilor fundamentale, - produs care e egal cu raportul R dintre noua şi vechea valoare a mărimii speciei considerate.

Dimensiunea e deci însuşi membrul al doilea al ecuaţiei(44). Ea e egală şi cu produsul valorilor pe cari vechile unităţi ale speciilor fundamentale le au în raport cu noile lor unităţi, ridicate la puterile la cari valorile mărimilor fundamentale intervin în ecuaţia de definiţie a speciei considerate, - produs care e egal cu valoarea vechii unităţi a speciei considerate, exprimată în raport cu noua ei unitate.

Există mărimi fizice de specii diferite, cari au în mod necesar aceleaşi dimensiuni, oricari ar fi speciile fundamentale folosite, şi anume mărimile ale căror valori se

definesc prin produse diferite ale valorilor (sau ale creşterilor valorilor)mărimilor aceleraşi specii fundamentale. Un exemplu de acest fel e constituit de lucrul mecanic şi de momentul static al unei forţe. Primul are o valoare egală cu produsul scalar al valorii forţei prin valoarea deplasării punctului ei material de aplicaţie, iar cel de al doilea are o valoare egală cu produsul vectorial al valorii forţei prin raza vectoare a punctului ei de aplicaţie, în raport cu un punct.

Dimensiunea unei specii fizice se indică prin simbolul literal al speciei, scris într-o croşetă; pentru speciile fundamentale se folosesc litere majuscule. Dimensiunea unei specii de mărimi fizice m se exprimă deci punînd numai simbolul ei, scris în croşetă : $[m]$, egal cu produsul simbolurilor $P_1, P_2 \ldots P_n$, ale speciilor fundamentale, ridicate la puterile a_i din ecuaţia de definiţie a speciei, scris în croşetă:

$$[m] = [P_1^{a_1} P_2^{a_2} \ldots P_n^{a_n}] \qquad (44\ a)$$

De exemplu, dimensiunea vitezei v în raport cu lungimea L şi timpul T are expresiunea :

$$[v] = [L\ T^{-1}]$$

8,7. Constantele universale. La unităţi de măsură date, nu există relaţii analitice între valorile speciilor de mărimi primitive. Cu toate acestea, experienţa verifică, oricînd şi oriunde anumite relaţii între valorile speciilor primitive; acestea nu sunt deci de natură analitică ci experimentală(sintetică). Cele mai generale forme ale acestor relaţii exprimă cum am arătat în introducere, legile fenomenelor fizice. Ele se pot exprima prin ecuaţii sau prin inecuaţii matematice între valorile mărimilor primitive.

Legile pot fi exprimate deci numai folosind, explicit sau implicit, speciile de mărimi primitive cu ajutorul cărora se descriu fenomenele Aceste specii trebuie cunoscute deci în prealabil, aşa încît legile, cari presupun speciile primitive cunoscute în prealabil, sunt inoperante în privinţa di-

terial:

$$\bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

unde $\bar{r}$ e raza vectoare a punctului material în raport cu originea sistemului de referinţă inerţial. Dimensiunea forţei în raport cu lungimea, timpul şi masa rezultă din această lege:

$$[F] = [LMT^{-2}]$$

Forţa intervine însă şi în legea gravitaţiei, care se enunţă abia după ce s-au introdus mărimile lungime timp, masă şi forţă: Forţa de gravitaţie $\bar{F}_{12}$ pe care un punct material de masă m_1 o exercită asupra unui punct material m_2, care are raza vectoare $\bar{r}$ în raportul cu punctul m_1 are expresiunea

$$\bar{F}_{12} = -F, \quad \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r},$$

mensiunilor acestor specii mărimi, sau în privinţa dimensiunilor speciilor derivate din acestea. In adevăr, să presupunem că ecuaţia care exprimă o lege conţine în cei doi membrii termeni ale căror valori nu rămîn neschimbate cînd se variază independent unităţile speciilor fundamentale cari intervin în acei membri. In acest caz, se consideră că ecuaţia defineşte o nouă mărime fizică invariabilă, numită constantă universală, care înmulţeşte unul dintre membri, şi a cărei valoare variază în aşa fel cînd se schimbă unităţile de măsură ale mărimilor fundamentale, încît ecuaţia să fie satisfăcută, oricum s-ar schimba aceste unităţi de măsură. Dacă ecuaţia care exprimă o lege rămîne valabilă, oricum s-ar schimba unităţile de măsură ale mărimilor fundamentale, se consideră că ecuaţia nu defineşte o constantă universală, ci un coeficient.

Să considerăm, de exemplu forma de coerenţă a legii fundamentale a Dinamicii, prin care se introduce în Fizică specia de mărimi numită forţă: Forţa $\bar{F}$ pe care un sistem fizic o exercită asupra unui punct material de masă m, care are viteza $\bar{v}$ în raport cu un sistem inerţial şi se găseşte sub acţiunea exclusivă a acelui sistem, e egală cu derivata în raport cu timpul a impulsului $m\bar{v}$ al punctului ma-

unde f_0 e un factor constant, la unităţi de măsură date pentru toate celelalte mărimi cari intervin în lege. Pentru a determina dimensiunea factorului f, calculăm acest factor în funcţiune de celelalte mărimi :

$$f_0 = \frac{r^2 F_{12}}{m_1 m_2}$$

şi introducem dimensiunile mărimilor din membrul drept:

$$[F_0] = \left[\frac{r^2 F_{12}}{m_1 m_2}\right] = \left[L^2 L M T^{-2} M^{-1} M^{-1}\right] = \left[L^3 M^{-1} T^{-2}\right]$$

Rezultă că mărimea F_0 nu este un coeficient numeric, ci o constantă universală (numită constantă de gravitaţie). Ea nu are dimensiunile forţei, deşi e numeric egală cu forţa de gravitaţie dintre două mici corpuri de mase egale cu unitatea, cari se găsesc în vid, la distanţa unitate unul de altul.

Considerăm şi legea de conservare a masei : Masa m, de densitate σ, dintr-o suprafaţă închisă Σ, scade în unitatea de timp cu o cantitate proporţională cu masa care iese în unitatea de timp din acea suprafaţă:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_\Sigma} \sigma \, dv = \lambda_0 \int_\Sigma \sigma \, \vec{v} \, d\vec{A}$$

unde λ_0 e o mărime constantă, la unităţi date ale tuturor celorlalte mărimi care intervin în lege. Pentru a determina dimensiunea mărimii λ_0 scriem legea sub forma

$$\lambda_0 = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_\Sigma} \sigma \, dv}{\int \sigma \, \vec{v} \, d\vec{A}}$$

şi introducem dimensiunile. Obţinem:

$$[\lambda_0] = \frac{[T^{-1} M L^{-3} L^3]}{[M L^{-3} L T^{-1} L^2]} = [L^0 M^0 T^0],$$

adică mărimea λ_0 nu e o constantă universală, ci un coeficient numeric (a cărui valoare e util să fie aleasă egală cu unitatea)

Considerăm şi expresiunea forţei coulombiene (7):

$$F_{12} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}$$

în care ε_0 e o mărime constantă, la unităţi date ale tuturor celorlalte mărimi cari intervin în expresiunea forţei. Pentru a determina dimensiunea mărimii ε_0 punem relaţia de mai sus sub forma :

$$\varepsilon_0 = \frac{k}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{F_{12} R_{12}^2}$$

şi, introducem dimensiunile mărimilor din membrul al doilea Obţinem:

$$[\varepsilon_0] = \frac{[Q^1 \; Q^2]}{[L^2 M^1 L^1 T^{-2}]} = [M^{-1} L^{-3} T^2 \; Q^2]$$

Permitivitatea ε_0 a vidului nu e deci un coeficient numeric fără dimensiune, ci e o constantă universală, a cărei dimensiune diferă de dimensiunea forţei.

8,8. <u>Sisteme de dimensiuni</u> Dacă se aleg dintre speciile de mărimi primitive şi derivate, speciile fundamentale, ale căror unităţi se variază independent, şi se exprimă dimensiunile celorlalte specii în funcţiune de dimensiunile acestora, se obţine un sistem de dimensiuni, coerent.

Inainte de constituirea Teoriei electronilor, sistemele coerente de dimensiuni aveau cinci specii (dimensiuni) fundamentale. Gauss a intemeiat sistematic un astfel de sistem de dimensiuni folosind ca specii fundamentale lungimea, timpul, masa inertă, permitivitatea absolută şi permitivitatea magnetică absolută a spaţiului (pe care vom introduce-o în studiul fenomenelor magnetice.).

După constituirea Teoriei electronilor, numărul de specii fundamentale ale sistemelor curente de dimensiuni a scăzut de la cinci la patru. Cele şapte sisteme de dimensiuni de oarecare răspîndire, cari au patru specii fundamentale, folosesc toate lungimea [L] şi timpul [T] drept două dintre speciile lor fundamentale. Patru dintre ele folosesc masa inertă [M] drept a treia specie fundamentală şi o specie de mărimi

electromagnetice drept a patra mărime, iar trei sisteme folosesc două specii de mărimi fundamentale electromagnetice.

Sistemul de dimensiuni electrostatic foloseşte ca specii fundamentale(afară de lungime[L] şi timp(T), masa inertă (M) şi permitivitatea $[\varepsilon_o]$; sistemul de dimensiuni electromagnetic foloseşte masa inertă (M) şi permeabilitatea (μ), pe care vom introduce-o în studiul fenomenelor magnetice; sistemul de dimensiuni al lui Brylinski foloseşte masa inertă (M) şi sarcina electrică (Q) ; sistemul lui Giorgi foloseşte masa inertă (M) şi rezistenţa electrică (R) , pe care vom introduce-o în studiul fenomenelor electrocinetice ; sistemul lui Maxwell foloseşte intensităţile cîmpurilor electrici (E) şi magnetic (H), pe care-l vom introduce în studiul fenomenelor magnetice; sistemul lui Mie foloseşte intensitatea curentului electric(I) şi tensiunea electrică (U), iar sistemul lui Kalantarov foloseşte sarcina electrică (Q) şi fluxul magnetic (Φ) (mărimile I, U şi Φ vor fi introduse mai tîrziu în studiul fenomenelor electrice şi magnetice).

Tabelul de mai jos cuprinde dimensiunile cîtorva specii de mărimi electrice în sistemele de dimensiuni ale lui Gauss şi electrostatic şi în sistemul lui Brylinski, verificabile cu ajutorul relaţiilor pe cari le-am stabilit mai sus.

DIMENSIUNILE CÎTORVA MĂRIMI ELECTRICE

Specia de mărimi	Simbol	Sistemul de dimensiuni Electrostatic şi Gauss	Brylinski
Sarcină electrică	Q	$(M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(Q)
Densitatea de volum a sarcinii	ρ_v	$(M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL^{-3})
Densitatea de suprafaţă a sarcinii	ρ_s	$(M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL^{-2})
Densitatea de linie a sarcinii	ρ_l	$(M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL^{-1})
Intensitatea cîmpului electric	E	$(M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	$(MLT^{-2}Q^{-1})$
Inducţie electrică	D	$(M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL^{-2})
Moment electric	P	$(M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL)
Polarizaţie electrică	P	$(M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL^{-2})
Puterea foliei electrice	$\mathcal{H}$	$(M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\varepsilon^{1/2})$	(QL^{-1})
Permitivitatea absolută	ε	(ε)	$(M^{-1}L^{-3}T^{2}Q^{2})$

Se observă că densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice, inducţia electrică şi polarizaţia electrică au aceleaşi dimensiuni în fiecare dintre aceste trei sisteme.

Aproape toate unităţile de măsură a speciilor de mărimi în sistemul de unităţi MKSC au nume şi simbol literal.

Dăm mai jos tabloul referitor la speciile de mărimi pe care le-am introdus în studiul fenomenelor electrice. Se observă că unităţile permitivităţii absolute a vidului şi inducţiei electrice sunt afectate de raţionalizare.

Specia de mărimi		Unitatea în unităţi MKSC nerationalizate		Unitatea în unităţi MKSC raţionalizate	
Numire	Simbol	Numire	Simbol	Numire	Simbol
Sarcină electrică	q	coulomb	C	coulomb	q
Densitatea de volum a sarcinii electrice		coulomb pe metru cub	C/m^3	coulomb pe metru cub	C/m^3
Densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice		coulomb pe metru pătrat	C/m^2	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Intensitatea cîmpului electric	E	volt pe metru	V/m	volt pe metru	V/m
Permitivitatea vidului		Farad steradian pe metru	Fstr/m	Farad pe metru	F/m
Inducţia electrică	D	coulomb steradian pe metru pătrat	$Cstr/m^2$	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Moment electric	p	metru coulomb	Cm	metru coulomb	Cm
Polarizaţie electrică	P	coulomb pe metru pătrat	C/m^2	coulomb pe metru pătrat	C/m^2
Puterea foiţei electrice	π	coulomb pe metru	C/m	coulomb pe metru	C/m

9. Legea legăturii dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în cîmpul electric.

9,1. Legea. Considerăm două corpuri identice, încărcate sau neîncărcate, şi în stări fizice identice, situate în două cîmpuri electrice identice, şi ne fixăm atenţiunea asupra unui punct din unul dintre corpuri şi asupra analogului său din celălalt corp. Presupunem că în jurul punctului din primul corp e evacuată partea conţinută în canalul folosit pentru a defini intensitatea cîmpului electric în acel punct, şi că în jurul punctului analog din cel de al doilea corp e evacuată partea conţinută în fanta folosită pentru a defini intensitatea-inducţie a cîmpului electric în acel punct. Am arătat în (38 k) şi (38 g) că în cîmpurile electrostatice există între mărimile $\bar{D}, \bar{E}$ şi $\bar{P}$ relaţia:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \chi \bar{P} \tag{45}$$

Experienţa arată că această relaţie e valabilă şi în cîmpurile care nu sunt electrostatice . In cuvinte: In orice moment şi în orice punct, inducţia electrică e egală cu suma dintre produsul permitivităţii absolute a vidului prin intensitatea locală instantanee a cîmpului electric; şi dintre produsul coeficientului de raţionalizare prin polarizaţia electrică locală instantanee a corpurilor(legea legăturii dintre inducţie electrică, intensitatea cîmpului electric şi polarizaţia electrică):

Rezultă că mărimile $\bar{D}'$ şi $\bar{E}$ dintr-un punct diferă una de alta numai în momentele în cari materialul din vecinătatea punctului e polarizat electric, şi că, deci, în vid $\bar{D}'_v = \bar{E}_v$ Mai rezultă că direcţia comună a axei canalului vid folosit pentru a defini intensitatea cîmpului electric şi a normalei pe fanta vidă, folosită pentru a defini intensitatea-inducţie a cîmpului electric e direcţia polarizaţiei electrice locale instantanee, atît în cîmpurile electrostatice, cît şi în cele neelectrostatice.

9,2. Relaţiile cu teoria electronilor. In teoria

macroscopică, relaţia dintre inducţia electrică, intensitatea cîmpului magnetic şi polarizaţia magnetică apare ca lege. In teoria electronilor, polarizaţia electrică se defineşte ca mărime derivată din sarcina electrică şi din mărimi geometrice, iar intensitatea inducţie a cîmpului electric, şi deci şi inducţia electrică, se defineşte ca mărime derivată din intensitatea cîmpului electric şi polarizaţia electrică, prin relaţia(45). In această teorie, relaţia (45) nu apare ca lege, ci ca relaţie de definiţie a mărimii $\bar{D}$; faptul că raportul dintre forţa care se exercită într-o anumită fantă asupra unui corp încărcat, şi sarcina acestui corp, e egal cu intensitatea - inducţie $\bar{D}'$ a cîmpului, rezultă ca o consecinţă. In teoria macroscopică, nu se dispune însă de mijloacele necesare pentru a face ca relaţia (45) să apară ca simplă relaţie de definiţie a unei mărimi derivate.

Se observă analogia cu relaţia (4oc) din Anexa matematică, dacă se înlocuieşte în acea relaţie $\bar{G}_{fp}$ cu $\bar{D}'$, $\bar{G}_{cp}$ cu $\bar{E}$ şi $\bar{P}$ cu $\frac{\chi}{4\pi}\bar{\rho}$ din cîmpul electric, se obţine relaţia (45).

Se mai observă că $\bar{E}$ poate fi paralel sau antiparalel cu $\bar{D}'$, sau poate avea o direcţie diferită de direcţia lui $\bar{D}'$.

1o.- Lema fluxului electric

1o,1. Teorema fluxului electric Dacă se variază direcţia normalei pe fantă, în care s-a definit $\bar{D}$, se obţine pentru fiecare nouă orientare ν a ei, cîte un alt vector cîmp electric $\bar{E}_{f\nu}$ diferit de $\bar{D}'$. Am demonstrat că în cîmpurile electrostatice, oricare ar fi orientarea ν, totdeauna proiecţia ortogonală a intensităţii - inducţie locală $\bar{D}'$ pe orientarea ν e egală cu proiecţia ortogonală a vectorului cîmp electric local $\bar{E}_{f\nu}$ pe orientarea ν. Dacă $\bar{u}_\nu$ e versorul orientării ν, această relaţie (v.formula 38 i) se poate pune sub forma

$$\bar{u}_\nu \bar{D}' = \bar{u}_\nu \bar{E}_{f\nu} \qquad (46)$$

Demonstraţia relaţiei (46) e făcută numai în cîmpurile electrostatice. Experienţa arată că ea e satisfăcută şi în cîmpurile neelectrostatice. Aceasta va rezulta din legile fenomenelor electrice şi magnetice, şi constituie teorema fluxului electric (v.Vol.II.pp.165 - 167).

Dacă versorul $\bar{u}_\nu$ indică, de exemplu, orientările normalelor pozitive ale elementelor de arie $d\bar{A}$ ale unei suprafeţe S care trece printr-un corp ($d\bar{A} = \bar{u}_\nu dA$) şi dacă s-a evacuat materialul dintr-o fantă foarte strîmtă care îmbracă acea suprafaţă, pentru a putea măsura de-a lungul ei vectorii cîmp electric $\bar{E}_{f\nu}$, fluxul acestui vector cîmp electric prin suprafaţa S (v.fig.28) se poate pune sub forma:

$$(46\ a)\qquad \int_S \bar{E}_{f\nu} d\bar{A} = \int_S E_{f\nu} \bar{u}_\nu dA = \int_S \bar{D}' \bar{u}_\nu dA = \int_S \bar{D}' \, d\bar{A}$$

adică e egal cu fluxul intensităţii- inducţie a cîmpului electric prin suprafaţa S

Din aceste motive, $\bar{D}'$ este un vector cîmp important pentru calculul fluxurilor vectorilor cîmp electric în fantele din corpuri. Se observă analogia dintre relaţia (46) şi relaţia (4o b) din Introducerea matematică, dacă se ţine seama de analogia dintre relaţia (4o c) din acea Introducere şi penultima relaţie(45)

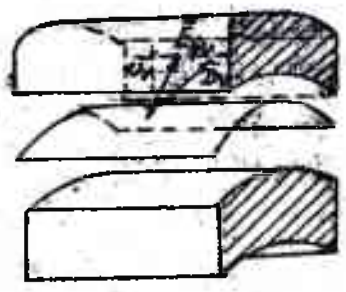


Fig.27
Figură pentru calculul integralei de suprafaţă a vectorului cîmp electric.

1o,2. Lema fluxului electric. Experienţa arată că toate cîmpurile electrice sunt produse fie de conductoarele sau de izolanţii, care au sarcini electrice adevărate, fie de corpurile polarizate electric, fie de cîmpurile magnetice variabile în timp.

Sarcina adevărată q a conductoarelor sau a dielectricilor dintr-o suprafaţă închisă Σ se poate măsura cu un cilindru Faraday şi un electrometru. Fluxul cîmpului electric în vid prin suprafaţa închisă Σ se poate măsura

În principiu, determinînd, cu un corp de probă, pe micile ei porţiuni de arie, intensitatea locală în vid a cîmpului electric $\bar{E}_v$ şi efectuînd suma care apare în expresiunea acestui flux $\Psi_{\bar{E}\Sigma} = \int_\Sigma \bar{E}_v d\bar{A}$. Cele două mărimi q_Σ şi $\Psi_{\bar{E}\Sigma}$ astfel obţinute pot fi comparate deci una cu alta.

În cazul particular al cîmpurilor electrice produse de corpurile încărcate cu sarcini adevărate sau polarizate electric, e valabilă teorema lui Gauss referitoare la fluxul electrostatic în vid (12 a). Ea arată că e valabilă totdeauna următoarea relaţie: În vid fluxul intensităţii cîmpului electric în vid $\Psi_{\bar{E}\Sigma}$, care trece printr-o suprafaţă închisă Σ situată în întregime în vid, , e proporţional în fiecare moment, cu suma $q_{\ell\Sigma}$ a sarcinilor electrice adevărate din interiorul ei, factorul de proporţionalitate fiind cîtul dintre coeficientul de raţionalizare $\varkappa$ (1 sau 4π) şi constanta universală pozitivă ε_0, care se numeşte permitivitatea (constanta dielectrică) absolută a vidului:

$$\text{(a)} \qquad \Psi_{\bar{E}\Sigma} = \frac{\varkappa}{\varepsilon_0} q_{\ell\Sigma}$$

Dacă suprafaţa închisă Σ, căreia i se aplică teorema, e situată parţial sau în întregime în dielectrici sau în conductoare, i se poate aplica relaţia referitoare la suprafaţa situată în vid, dacă se presupune că s-a îndepărtat materialul din imediata apropiere şi anume din fanta foarte plată care îmbracă suprafaţa. La această operaţie apar sarcini de polarizaţie noi pe pereţii fantei şi relaţia (36 c) rămîne valabilă. Conform relaţiei (45 a), fluxul vectorului cîmp electric $\bar{E}$ din această fantă e egal cu fluxul intensităţii - inducţie $\bar{D}'$ a cîmpului electric care, înmulţită cu permitivitatea absolută ε_0 a spaţiului, dă inducţia electrică $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{D}'$ a cîmpului. În corpuri se poate opera deci cu fluxul intensităţii - inducţie a cîmpului electric :

$$\Psi_{\bar{D}'\Sigma} = \int_\Sigma \bar{D}' \, d\bar{A}$$

şi teorema fluxului electric ia următoarea formă generală, valabilă atît în corpuri, cît şi în vid:

$$\text{(b)} \qquad \Psi_{\bar{D}'\Sigma} = \frac{\varkappa}{\varepsilon_0} q_\Sigma$$

Dacă se foloseşte fluxul electric Ψ_Σ, adică fluxul inducţiei electrice $\bar{D}$, în locul fluxului intensităţii-inducţie $\bar{D}'$ a cîmpului electric, se realizează avantajul că teorema fluxului electric se poate scrie sub forma:

$$\int_\Sigma \bar{D}\, d\bar{A} = \chi q_\Sigma \qquad (47)$$

în care nu intervine explicit permitivitatea absolută a vidului. Unitatea MKSC de flux electric se numeşte coulomb steradian în unităţi neraţionalizate şi coulomb în unităţi raţionalizate.

Experienţa verifică toate consecinţele acestei relaţii, nu numai în cîmpurile electrostatice, pentru care am stabilit-o, ci şi în cele staţionare şi în cele variabile, oricare ar fi viteza lor de variaţie. Fluxul inducţiei electrice care trece prin orice suprafaţă închisă e deci egal, în orice moment, cu produsul sarcinii electrice adevărate care se găseşte în acel moment în interiorul suprafeţei închise, prin coeficientul de raţionalizare χ (1 sau 4π); el nu depinde deci de sarcinile adevărate din exteriorul acelei suprafeţe (lema fluxului electric). In particular, fluxul inducţiei electrice are aceiaşi valoare prin toate secţiunile unui tub de linii de inducţie în care nu există sarcină adevărată.

Din această formă generală, integrală a legii, se pot obţine două forme diferenţiale, importante în aplicaţii.

Dacă sarcina adevărată e repartizată cu densitatea de volum ρ_v şi se aplică primului termen din lege teorema lui Gauss şi Ostrogradski, urmează:

$$\int_\Sigma \bar{D}\, d\bar{A} = \int_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{D}.\, dv = \int_{v_\Sigma} \chi \rho_v\, dv$$

sau fiindcă volumul v_Σ e arbitrar:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \chi \rho_v \qquad (47\ a)$$

adică : în orice moment divergenţa inducţiei electrice e egală cu produsul coeficientului de raţionalizare prin densitatea de volum locală a sarcinii electrice adevărate.

Dacă se foloseşte expresiunea divergenţei unui vector cîmp în coordonate cartesiene, trirectangulare, expresiunea diferenţială (47 a) a legii fluxului electric se poate pune şi sub forma :

$$(47\ b)\quad \frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z} = \varkappa \rho_v$$

în care ea apare ca ecuaţie cu derivate parţiale, liniară, neomogenă şi de ordinul întăiu, pe care o satisfac componentele Dx, Dy, Dz ale inducţiei electrice.

Dacă sarcina adevărată e repartizată cu densitatea de suprafaţă ρ_s şi se foloseşte expresiunea divergenţei de suprafaţă $\mathrm{div}_s \mathbf{D} = D_{na} + D_{nb}$, se obţine din (46)

$$(D_{na} + D_{nb})\, dA = \varkappa \rho_s\, dA,$$

sau, fiindcă porţiunea S din suprafaţa ocupată de sarcina adevărată cu densitate de suprafaţă e arbitrară:

$$(47\ c)\quad D_{na} + D_{nb} = \varkappa \rho_s$$

In orice moment divergenţa de suprafaţă a inducţiei electrice e egală cu produsul coeficientului de raţionalizare prin densitatea locală instantanee de suprafaţă a sarcinii electrice adevărate. Dacă $\rho_s = 0$ rezultă $D_{na} + D_{nb} = 0$ adică: componenta normală a inducţiei electrice trece continuu prin toate suprafeţele neîncărcate cu densitate de suprafaţă a sarcinii electrice adevărate.

Din legea fluxului electric rezultă că liniile-unitate ale cîmpului inducţiei electrice pot începe numai pe sarcinile adevărate pozitive şi se pot termina numai pe sarcinile adevărate negative.

Fiecare dintre formele legii fluxului electric se aplică în ambele sensuri, adică, dacă există sarcină adevărată în interiorul unei suprafeţe închise, trebuie ca un flux electric diferit de zero să traverseze suprafaţa, sau dacă se măsoară fluxul electric printr-o suprafaţă închisă şi se găseşte că el e diferit de zero, trebuie să existe sarcină adevărată în interiorul ei.

Scanned with OKEN Scanner

Sarcina adevărată din interiorul unei suprafeţe e excesul de sarcină adevărată de un nume faţă de cea de nume contrar. Fluxul electric printr-o suprafaţă închisă poate fi deci nul, deşi o regiune din interiorul ei are sarcină adevărată pozitivă, adică există în interiorul ei şi o regiune încărcată cu tot atîta sarcină adevărată negativă. Fluxul electric e diferit de zero numai prin suprafeţele închise cu exces de sarcină adevărată de un nume faţă de sarcina adevărată de nume contrar.

Dacă sarcina adevărată, considerată în expresiunea legii fluxului electric, este sarcina unor corpuri în mişcare, elementele de arie ale suprafeţei închise căreia i se aplică legea pot fi considerate antrenate de corpuri în mişcarea lor, care nu distruge continuitatea suprafeţei, în conformitate cu ipotezele teoriei macroscopice.

Din (47 a), (45) şi (36 a) urmează că divergenţa intensităţii cîmpului electric e proporţională cu densitatea de volum a sarcinii libere:

$$(48\ a) \qquad \operatorname{div} \bar{E} = \frac{\chi}{\varepsilon_0} \rho_{vl} \rho_{vl},$$

adică, în coordonate cartesiene trirectangulare:

$$(48\ b) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\chi}{\varepsilon_0} \rho_{vl} \rho_{vl}$$

Din (47 c), (45) şi (36 c) urmează că divergenţa de suprafaţă a intensităţii cîmpului electric e proporţională cu densitatea de suprafaţă a sarcinii electrice libere:

$$(48\ c) \qquad E_{na} + E_{nb} = \frac{\chi}{\varepsilon_0} \rho_{sl}$$

Sarcinile electrice de polarizaţie se caracterizează deci prin faptul că în funcţiune de ele se stabileşte un cîmp electric după aceiaşi lege ca şi pentru sarcinile adevărate în vid, de cari se deosebesc prin faptul că nu satisfac legea de conservare în raport cu intensitatea curentului de inducţie.

Forma (48) a legii fluxului electric arată că liniile unitate ale intensităţii cîmpului electric pot în-

cepe numai pe sarcinile libere pozitive şi se pot termina numai pe sarcinile libere negative. Aceste sarcini sunt deci "libere" pentru producerea fluxului intensităţii cîmpului electric.

Legea fluxului electric nu determină complect inducţia cîmpului electric produs de sarcinile adevărate şi de corpurile polarizate electric, fiindcă oricărui cîmp de inducţie care o satisface i se poate suprapune un cîmp de inducţie solenoidal fără ca legea să înceteze de a fi satisfăcută. La repartiţie dată a sarcinilor adevărate, inducţia electrică poate avea deci valori diferite într-un punct dat.

11.- LEGEA POLARIZATIEI ELECTRICE

Experienţa arată că în materialele isotrope care se găsesc la o anumită temperatură uniformă şi nu sunt supuse unor tensiuni mecanice, polarizaţia electrică temporară $\vec{P}_t$ e omoparalelă cu intensitatea locală a cîmpului electric, şi că în aceste materiale valorile absolute ale acestor două mărimi sunt proporţionale (cu excepţiunea unui grup foarte restrîns de materiale, de ex.titanatul de bariu, numite materiale feroelectrice). Factorul de proporţionalitate dintre polarizaţia electrică temporară şi intensitatea cîmpului electric e egal cu produsul permitivităţii absolute ε_0 a vidului printr-o mărime de material scalară pozitivă, fără dimensiuni, numită susceptibilitatea electrică a materialului isotrop.

$$(49)\qquad \boxed{\vec{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$$

Dacă se introduce în relaţia (45) valoarea(49) a lui $\vec{P}_t$, se obţine pentru mediile isotrope cari satisfac legea (49)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varkappa \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \varkappa \chi_e) \vec{E} + \varkappa \vec{P}_p$$

Dacă se operează cu mărimea

$$(50)\qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \varkappa \chi_e)$$

se obţine:

$$(51)\qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \varkappa \vec{P}_p$$

Mărimea de material supraunitară şi fără dimensiuni $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ se numeşte permitivitatea relativă a materialului, iar mărimea de material $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ se numeşte permitivitatea absolută a materialului. Susceptibilitatea electrică a anumitor materiale, şi deci permitivitatea lor, depinde şi de intensitatea cîmpului electric. In afară de cazuri excepţionale, în dielectrici isotropi $P_p = 0$.

In corpurile feroelectrice (sarea de Rochelle, tetrahidratul de potasiu, tartratul de sodiu, titanatul de bariu, etc), intensitatea cîmpului electric produce polarizaţie electrică $\bar{P}$ care depinde şi de succesiunea stărilor trecute ale intensităţii $\bar{E}$, iar la valori mari ale intensităţii cîmpului electric, aceste corpuri ajung la o polarizaţie numită polarizaţia de saturaţie, care nu mai este depăşită. Se spune că aceste corpuri prezintă isterezis electric. Ele nu satisfac legea de material.(49), decît la variaţii mici ale intensităţii cîmpului electric.

Experienţa arată că în substanţele anisotrope (în cristale) polarizaţia electrică temporară, nu e, în general, omoparalelă cu intensitatea locală a cîmpului electric. In cazurile cele mai generale, un cristal are numai trei direcţii triortogonale în cari ar trebui să fie dirijată intensitatea cîmpului electric, pentru ca polarizaţia electrică să fie omoparalelă cu ea; ele se numesc direcţiile principale ale susceptibilităţii electrice sau ale permitivităţii cristalului. Fie deci 1,2 şi 3 cele trei direcţii principale, şi χ_{e1}, χ_{e2} χ_{e3} cele trei valori corespunzătoare în general neegale, ale susceptibilităţii electrice. Dacă intensitatea E_1 a cîmpului electric ar avea direcţia 1, ea ar stabili o polarizaţie electrică temporară.

$$\bar{P}_1 = \varepsilon_0 \chi_{e1} \bar{E}_1$$

Dacă intensitatea cîmpului electric $\bar{E}_2$, respectiv $\bar{E}_3$, ar avea direcţiile 2, respectiv 3, ar stabili polarizaţiile electrice

$$\bar{P}_2 = \varepsilon_0 \chi_{e2} \bar{E}_2 \quad \text{respectiv} \quad \bar{P}_3 = \varepsilon_0 \chi_{e3} \bar{E}_3$$

Mărimile scalare $\chi_{e1}, \chi_{e2}, \chi_{e3}$, se numesc valorile principale ale susceptibilităţii electrice.

Cînd intensitatea $\bar{E}$ a cîmpului electric nu are nici una dintre direcţiile principale ale susceptibilităţii, ea trebuie descompusă în componente după aceste trei direcţii $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3$ şi fiecare dintre cele trei componente stabileşte o parte omoparalelă cu ea a polarizaţiei electrice temporare cu valoarea principală corespunzătoare a susceptibilităţii electrice şi deci polarizaţia electrică corespunzătoare $\bar{P}$ e:

$$\bar{P}_t = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = \varepsilon_o (\chi_{e1} \bar{E}_1 + \chi_{e2} \bar{E}_2 + \chi_{e3} \bar{E}_3).$$

Dacă se foloseşte un sistem de coordonate cartesiene triortogonale Oxyz, faţă de care direcţia principală K(K = 1, 2, 3) are cosinusurile directoare $\cos\alpha_{kx}$, $\cos\alpha_{ky}$, $\cos\alpha_{kz}$ se obţine deci din relaţia de mai sus, prin proiectare pe axa de coordonate Ox:

$$P_{tx} = \varepsilon_o (\chi_{e1} \cos\alpha_{1x} E_1 + \chi_{e2} \cos\alpha_{2x} E_2 + \chi_{e3} \cos\alpha_{3x} E_3)$$

De altă parte, rezultă din proiectarea membrilor relaţiei $\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y + \bar{E}_z$ pe cele trei direcţii principale ale susceptibilităţii electrice:

$$E_1 = E_x \cos\alpha_{1x} + E_y \cos\alpha_{1y} + E_z \cos\alpha_{1z};$$

$$E_2 = E_x \cos\alpha_{2x} + E_y \cos\alpha_{2y} + E_z \cos\alpha_{2z};$$

$$E_3 = E_x \cos\alpha_{3x} + E_y \cos\alpha_{3y} + E_z \cos\alpha_{3z}$$

Introducînd în ultima relaţie, se obţine:

$$P_{tx} = \varepsilon_o (\chi_{e1} \cos\alpha_{1x} \cos\alpha_{1x} + \chi_{e2} \cos\alpha_{2x} \cos\alpha_{2x} + \chi_{e3} \cos\alpha_{3x} \cos\alpha_{3x}) E_x$$
$$+ \varepsilon_o (\chi_{e1} \cos\alpha_{1x} \cos\alpha_{1y} + \chi_{e2} \cos\alpha_{2x} \cos\alpha_{2y} + \chi_{e3} \cos\alpha_{3x} \cos\alpha_{3y}) E_y$$
$$+ \varepsilon_o (\chi_{e1} \cos\alpha_{1x} \cos\alpha_{1z} + \chi_{e2} \cos\alpha_{2x} \cos\alpha_{2z} + \chi_{e3} \cos\alpha_{3x} \cos\alpha_{3z}) E_z$$

şi notînd cu χ_{exx}, χ_{exy} şi χ_{exz} mărimile din cele trei paranteze; se obţine prima dintre următoarele trei relaţii:

$$
\left.
\begin{aligned}
P_{tx} &= \varepsilon_o(\chi_{exx}E_x+\chi_{exy}E_y+\chi_{exz}E_z) \ ; \\
P_{ty} &= \varepsilon_o(\chi_{eyx}E_x+\chi_{eyy}E_y+\chi_{eyz}E_z) \ ; \\
P_{tz} &= \varepsilon_o(\chi_{ezx}E_x+\chi_{ezy}E_y+\chi_{ezz}E_z) \ ;
\end{aligned}
\right\} \quad (49\ a)
$$

cari reprezintă legea polarizaţiei electrice temporare a cristalelor.

Ultimele trei relaţii se obţin analog, prin proiectarea celor doi membrii din expresiunea vectorului P_t pe axele O_x şi O_y. Se mai observă că mărimile χ_{exx}, χ_{exy}, etc, satisfac relaţiile de simetrie:

$$\chi_{exy} = \chi_{eyx} \ ; \ \chi_{eyz} = \chi_{ezy} \ ; \ \chi_{exz} = \chi_{ezx} \qquad (49b)$$

fiindcă direcţiile 1,2 şi 3 sunt triortogonale.

Deci numai şase dintre aceste nouă mărimi sunt independente. Rezultă că pentru cunoaşterea proprietăţilor de polarizare electrică temporară ale cristalelor e nevoie, în cazul cel mai general, de cunoaşterea a 6 mărimi de material scalare $\chi_{exx}\ \chi_{exy}$, etc, cari se numesc **componentele scalare ale tensorului de ordinul al doilea al susceptibilităţii electrice.**

Dacă se operează cu mărimile de material

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_o(1 + \varkappa\chi_{exx}) \ ; \ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_o(1+\varkappa\chi_{eyy}) \ ; \ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_o(1+\varkappa\chi_{ezz})$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varkappa\varepsilon_o\chi_{exy} \ ; \ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \varkappa\varepsilon_o\chi_{eyz} \ ; \ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \varkappa\varepsilon_o\chi_{ezx}$$

se obţin şi următoarele expresiuni ale legii polarizaţiei electrice temporare a cristalelor:

$$
\begin{aligned}
D_{tx} &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{zx}E_z \\
D_{ty} &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z \\
D_{tz} &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z
\end{aligned}
\qquad (51\ a)
$$

Mărimile $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}$, etc se numesc componentele scalare ale tensorului de ordinul al doilea al permitivităţii cristalului, şi satisfac relaţiile de simetrie pe ceri le-

am indicat mai sus. Cazul materialelor isotrope se obţine punînd $\chi_{e1} = \chi_{e2} = \chi_{e3} = \chi_e$ şi deci:

$$\chi_{exx} = \chi_{eyy} = \chi_{ezz} = \chi_e \text{ şi } \chi_{exy} = \chi_{eyz} = \chi_{ezx} = 0$$

Experienţa arată că anumite cristale acentrice, ca turmalina şi cuarţul, prezintă, afară de polarizaţie electrică temporară, indusă în ele de intensitatea locală a cîmpului electric, o polarizaţie electrică independentă de această intensitate, numită polarizaţie permanentă, dependentă, numai de starea lor locală de tensiune mecanică (adică de tensiunile locale normale şi tangenţiale): polarizaţia permenentă piezoelectrică. Dependenţa ei de tensiuni e relativ complicată. Experienţa mai arată că anumite cristale acentrice, ca turmalina, prezintă şi o polarizaţie electrică permanentă dependentă de temperatura lor (presupusă uniformă, pentru ca neuniformitatea temperaturii să nu producă deformaţii şi tensiuni mecanice, cari ar da o polarizaţie piezoelectrică suprapusă): polarizaţia piroelectrică.

Experienţele pentru definirea momentului electric au fost presupuse făcute cu cristale piezo -sau piroelectrice, pentru că momentul lor poate fi orientat şi în direcţii diferite şi independente de direcţia intensităţii locale a cîmpului electric. De obiceiu vom presupune în aplicaţii că polarizaţia electrică permenentă e nulă.

Tablou de permitivităţi relative (valori de orientare)

Materialul	ε_r	Materialul	ε_2	Materialul	ε_2
Aer la 1 at	1,00059	Cuarţ	4,5	Parafină	2,3
Apă distilată	76	Durax	4	Pertinax	5,5
Bachelită	5,5	Gumă	3	Porţelan	5,8
Carton presat	4,5	Hasfelită	4	Sticlă	5,8-8
Ceresină	2	Izolaţie de hîrtie de cabluri	3,5	Uleiu de transformatoare	2,1
Chilimbar	3	Ebonită	5	Uleiu de ricin	4
				Untdelemn	3,4

12.- Teorema potențialului electrostatic

12.1. Teorema tensiunii electrice. Dacă se variază direcția axei canalului în care s-a definit $\bar{E}$, se obține, pentru fiecare nouă orientare ν a ei, câte un alt vector câmp $\bar{E}_{c\nu}$ diferit de $\bar{E}$ (m). Demonstrat că, în regim electrostatic, oricare ar fi orientarea ν, totdeauna proiecția ortogonală a lui $\bar{E}$ local pe orientarea ν e egală cu proiecția ortogonală a lui $\bar{E}_{c\nu}$ pe orientarea ν. Dacă $\bar{u}_\nu$ e versorul orientării ν, această relație se poate pune sub forma :

$$\bar{u}_\nu \bar{E} = \bar{u}_\nu \bar{E}_{c\nu} \qquad (52)$$

Relația (52) a fost demonstrată numai pentru cîmpurile electrostatice. Experiența arată că ea e valabilă în orice cîmpuri electrice. Aceasta rezultă și din legile fenomenelor electrice și magnetice, și constituie teorema tensiunii electrice (v.Vol.II,pp.165 - 167).

Dacă versorul $\bar{u}_\nu$ indică, de exemplu, orientările elementelor de arc $d\bar{r}$ ale unei curbe care trece printr un corp ($d\bar{r} = \bar{u}_\nu ds$) și dacă s-a evacuat materialul dintr un canal foarte strîmt care îmbracă acea curbă pentru a putea măsura dealungul ei vectorii cîmp electric $\bar{E}$, integrala de linie a acestui vector cîmp electric dealungul unei curbe C(Fig.28) între punctele P_1 și P_2, se poate pune sub forma:

$$\int_C \bar{E}_{c\nu}\, d\bar{r} = \int_C \bar{E}_{c\nu}\, \bar{u}_\nu ds = \int_C \bar{E}\, \bar{u}_\nu ds = \int_C \bar{E} d\bar{r}, \qquad (52\ a)$$

adică e egală cu integrala de-a lungul aceluiași drum, a intensității cîmpului electric, care se numește tensiune electrică (în sens restrîns).

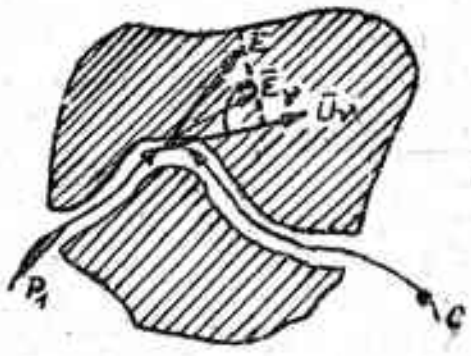


Fig.28
Calculul integralei de linie a vectorului cîmp electric $\bar{E}_\nu$

Lucrul mecanic $L_{CP_1P_2}$ efectuat de forţa electrică asupra unui mic conductor încărcat cu sarcină adevărată q, cînd acesta e purtat de-a lungul curbei C, din punctul P_1 pînă la punctul P_2, este deci:

$$L = \int_{P_1 C}^{P_2} q\,\bar{E}_c\,d\bar{r} = q \int_{P_1 C}^{P_2} \bar{E}\,d\bar{r}, \qquad (52\ b)$$

adică e egal cu produsul dintre sarcina electrică adevărată a corpului şi tensiunea electrică din lungul curbei.

Se observă analogia dintre relaţia (52) şi relaţia (39 b) din anexa matematică, dacă se fac corespondenţele $\bar{G}_{cy} \to \bar{E}_{cy}$, $\bar{G}_{cp} \to \bar{E}$, unde $\bar{G}_{cp}$ e dat de relaţia (39 c) din introducere.

12.2. Teorema potenţialului electrostatic. Se arată experimental că un cîmp electrostatic, odată stabilit se menţine fără a fi nevoie de vreun aport de energie din exterior. Din principiul de conservare a energiei rezultă deci următoarea proprietate: In cîmpurile electrostatice nu se poate obţine şi nici consuma lucru mecanic prin efectuarea unui ciclu de transformare reversibil. Dacă ciclul de transformare reversibil consistă în purtarea în curbă închisă a unui mic corp de probă încărcat foarte slab, pentru ca prezenţa lui să nu modifice sensibil cîmpul iniţial şi mişcarea corpului e destul înceată pentru ca fiecare dintre stările prin cari trece să poată fi considerată electrostatică, lucrul mecanic nul efectuat de forţa F care se exercită asupra micului corp de probă, la purtarea lui în curbă închisă P, are expresiunea:

$$L_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{F}\,d\bar{r} = q_a \oint_\Gamma \bar{E}_y d\bar{r} = q_a \oint \bar{E}_y\,d\bar{r}$$

Dacă linia închisă în lungul căreia se poartă corpul de probă, trece prin corpuri, trebuie practicat în ele un canal foarte strîmt prin care se poartă corpul. Ţinînd seama de relaţia (52), se obţine deci dealungul oricărei curbe închise, care se poate trasa, un cîmp:

$$L = q_a \oint \bar{E}\,d\bar{r} = 0$$

Fiindcă sarcina adevărată ρ_a e diferită de zero, rezultă că tensiunea electrică în sens restrîns adică integrala de linie a intensităţii cîmpului electric staţionar e nulă în lungul tuturor liniilor închise care se pot trasa în cîmp.

$$\oint \bar{E}\, d\bar{r} = 0 \qquad (53)$$

. Vom arăta mai tîrziu că această propoziţie rezultă şi din legea inducţiei electromagnetice ca teoremă generală valabilă în toate cîmpurile electrice staţionare în care nu există cîmpuri magnetice variabile în timp. Din relaţia de mai sus rezultă că în cîmpurile electrice staţionare nu există nici o linie de cîmp electric închisă.

12,3. Influenţa electrică şi ecranele electrice. Introducem un corp încărcat cu sarcina *adevărată* q într-o cavitate a unui conductor omogen, izolat şi în regim electrostatic fără a-l atinge de el.(Fig.29 b) Fluxul electric prin orice suprafaţă închisă din conductor e nul, fiindcă în conturul omogen $\bar{E} = 0$ cînd avem regim electrostatic.

Dacă suprafaţa închisă nu închide cavitatea, ea poate fi oricît de mică şi rezultă că în regim electrostatic, conform legii (48), nu există sarcină electrică liberă în conductoarele electrice omogene. Dacă aceste conductoare nu sunt polarizate neomogen, ele nu au nici sarcină de polarizaţie şi deci nici sarcină adevărată. Sarcina adevărată se poate găsi deci numai la suprafaţa conductoarelor în regim electrostatic. Pentru a ne informa despre sarcina adevărată de la suprafaţa cavităţii conductorului omogen, aplicăm legea (47) unei suprafeţe închise Σ care închide cavitatea şi pentru care trebuie să avem $\psi_\Sigma = 0$, fiindcă în conductor $\bar{E} = 0$. Urmează că şi sarcina adevărată totală q_Σ din interiorul suprafeţei Σ trebuie să fie nulă, adică trebuie să avem pe suprafaţa din spre cavitate a conductorului sarcina $-q$ pentru ca, împreună cu sarcina q a corpului din cavitate, să dea în interiorul suprafeţei sarcina adevărată $q_\Sigma = q_a + (-q) = 0$, cum cere legea (47). Dacă înainte de introducerea corpului încărcat în

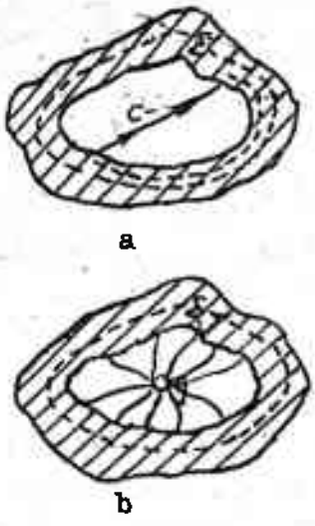


Fig. 29
Influenţa electrică

cavitate, conductorul ei era neutru, rezultă că pe suprafaţa exterioară a conductorului trebuie să avem sarcina q, pentru că, suma sarcinilor lui trebuie să rămînă nulă (fiind izolat, nu i s-a putut lua sau aduce sarcina electrică adevărată). Se spune că, sarcina q a corpului introdus în cavitate a separat pe conductor sarcinile electrice q_a şi $-q_a$ prin "influenţa electrică". Influenţa electrică există şi cînd corpul care influenţează nu e introdus într-o cavitate a corpului influenţat, ci se găseşte numai în apropierea lui. In acest caz sarcinile q' şi - q' separate prin influenţă, sunt mai mici în valoare absolută decît sarcina q a corpului care influenţează. Dacă unim conductorul influenţat cu un al doilea, foarte mare (exemplu cu pămîntul) o parte sau aproape toată sarcina conductorului influenţat care are acelaşi nume cu sarcina corpului care influenţează, trece asupra noului conductor (în cazul considerat, asupra pămîntului); întrerupînd apoi legătura conductoare dintre cele două corpuri, conductorul influenţat rămîne încărcat cu sarcină de nume contrar cu al sarcinii corpului care influenţează. Dacă sarcina aceasta e destul de mare, ea poate fi periculoasă pentru persoanele care ar sta pe pămînt şi ar atinge conductorul influenţat după ce s-a îndepărtat corpul care a influenţat. De aceia toate conductoarele unui laborator de înaltă tensiune electrică, pe cari le putem atinge, se pun în legătură conductoare cu pămînt (se "pun" la pămînt).

Dacă nu există polarizaţie permanentă şi sarcină electrică adevărată în cavitatea din interiorul unui conductor omogen (Fig.29 a) cîmpul electric din cavitate e nul. In adevăr, în acest caz dacă există linii de cîmp în cavitate, conform legii fluxului electric, ele nu pot nici

să înceapă şi nici să se termine în interiorul cavităţii, extremităţile acestor linii trebuie să se găsească deci pe suprafaţa din spre cavitate a corpului. Dacă C e o astfel de linie, se obţine însă, dealungul unei curbe închise care trece dealungul liniei C şi se închide prin conductor, în care nu există cîmp electric

$$\oint \bar{E}\ d\bar{r} = \int_C \bar{E}\ d\bar{r} \neq 0,$$

în contradicţie cu teorema (53). Rezultă că în interiorul cavităţii $\bar{E} = 0$, oricare ar fi cîmpul electrostatic din exteriorul conductorului. Aceasta are deci funcţiunea de ecran al cavităţii faţă de cîmpul electric exterior. Cînd există sarcină adevărată în cavitate (Fig.29 b), cîmpurile din cavitate şi din exterior sunt independente unul de altul.

12,4. <u>Cîmpul electric în imediata apropiere a unui conductor omogen, încărcat şi în regim electrostatic</u>. Intensitatea cîmpului electric din imediata apropiere a unui astfel de conductor e normală pe suprafaţa lui, iar intensitatea cîmpului electric în interiorul conductorului e nul. Aplicăm legea (47 c) unui cilindru plat ca în fig 3o, cu bazele de arie egală cu unitatea, observăm că fluxul inducţiei electrice prin aria unitate e egal cu componenta normală pe ea a inducţiei electrice şi cu sarcina adevărată a unităţii de arie, care e densitatea de suprafaţă σ_s a sarcinii adevărate, şi deducem:

$$\Psi_\Sigma = D_{ne} + D_{ni} = D_{ne} = \varkappa \sigma_s,$$ fiindcă $D_{ni} = 0$ în conductor.

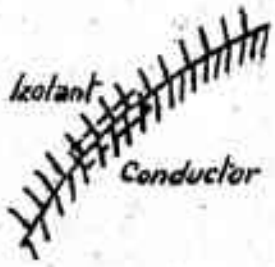


Fig. 3o
Cîmpul electric din apropierea unui conductor încărcat şi în regim electric.

De altă parte în conductorul omogen $\bar{E} = 0$. Deci, conform relaţiei (53 a):

$$\bar{E}_{te} - \bar{E}_{tc} = 0$$

pentru componenta tangenţială a intensităţii cîmpului electric. Cum $E'_{tc} = 0$, rezultă $E_{tc} = 0$

Deducem pentru intensitatea cîmpului electric din exterior, în imediata apropiere a conductorului:

$$E_e = E_{ne} = \frac{\chi}{\xi} \rho_s .$$

12,5. Rotorul şi teorema lui Stokes. Teorema potenţialului electrostatic se poate exprima şi prin ecuaţii locale cu derivate parţiale, care se obţin cu ajutorul rotorului vectorului cîmp al unui cîmp de vectori şi cu ajutorul teoremei lui Stokes.

Alegem curbe închise foarte mici pentru calculul integralei de linie a unui vector cîmp oarecare $\bar{G}$ şi împărţim circulaţia din lungul lor prin valoarea absolută a vectorului lor arie. Obţinem astfel circulaţia specifică, adică raportată la conturul unităţii (foarte mici) de vector arie. Trecem apoi la limită pentru curbe ale căror dimensiuni scad în toate direcţiile, aşa încît valoarea absolută a vectorului lor arie $\bar{A}_\nu$ tinde către zero-şi obţinem o valoare (scalară) de punct,a circulaţiei specifice, raportată la sensul ν al vectorului arie, asociat după regula burghiului drept sensului pozitiv al elementelor de linie $d\bar{r}$ de pe conturul Γ. Ea se numeşte valoarea scalară R_ν a rotorului vectorului cîmp în raport cu orientarea ν şi se notează cu simbolul $\mathrm{rot}_\nu \bar{G}$:

$$(a) \quad R_\nu = \mathrm{rot}_\nu \bar{G} = \lim_{A_\nu \to 0} \frac{\int_\Gamma \bar{G}\, d\bar{r}}{A_\nu}$$

Valoarea scalară $\mathrm{rot}_\nu \bar{G}$ variază cu ν; ea este însă componenta unui vector după orientarea ν, adică componenta corespunzătoare R_ν,a rotorului raportată la acea orientare, se obţine conform formulei următoare, care defineşte analitic vectorii,în funcţiune de valorile scalare R_x, R_y, R_z din acelaşi punct al rotorului în trei orientări trirectangulare cari formează un sistem drept de coordonate:

$$R_\nu = R_x \cos\alpha_{\nu x} + R_y \cos\alpha_{\nu y} + R_z \cos\alpha_{\nu z}$$

In adevăr, considerînd un tetraedru dreptunghic în P (Fig.4o din Anexă) şi observînd că circulaţia dealungul conturului Γ_ν al ariei A_ν e egală cu suma circulaţii-

lor de-a lungul contururilor Γ_x, Γ_y, Γ_z, ale ariilor A_x, A_y, A_z (fiindcă circulaţiile feţelor cari se întîlnesc pe muchiile tetraedrului cari nu mărginesc suprafaţa A_y se iau în sensuri contrare pe aceste muchii şi se anulează două cîte două), urmează:

$$\oint_{\Gamma_y} \bar{G}\, d\bar{r} = \oint_{\Gamma_x} \bar{G}\, d\bar{r} + \oint_{\Gamma_y} \bar{G} d\bar{r} + \oint_{\Gamma_z} \bar{G} d\bar{r}$$

Impărţind cei doi membri al acestei relaţii cu mărimea

$$A_y = \frac{A_x}{\cos\alpha_{yx}} = \frac{A_y}{\cos\alpha_{yy}} = \frac{A_z}{\cos\alpha_{yz}},$$

unde $\alpha_{yx}, \alpha_{yy}, \alpha_{yz}$ sunt unghiurile dintre normala pe dA_y şi normalele pe A_x, A_y, şi A_z, se obţine:

$$\frac{\oint_{\Gamma} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_y} = \frac{\oint_{\Gamma_x} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_x} \cos\alpha_{yx} + \frac{\oint_{\Gamma_y} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_y} \cos\alpha_{yy} + \frac{\oint_{\Gamma_z} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_z} \cos\alpha_{yz}$$

Dacă se trece la limită pentru $A_y \to 0$ şi deci $A_x \to 0$, $A_y \to 0$ şi $A_z \to 0$, se obţine relaţia (b), fiindcă prin definiţie:

$$R_y = \lim_{A_y \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_y}\ ;\ R_x = \lim_{A_y \to 0} \frac{\oint_{\Gamma_x} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_x}\ ;\ R_y = \lim_{A_y \to 0} \frac{\oint_{\Gamma_y} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_y}\ ;\ R_z = \lim_{A_z \to 0} \frac{\oint_{\Gamma_z} \bar{G} d\bar{r}}{A_z}.$$

Aceasta probează că R_y e componenta ortogonală a unui vector după orientarea y. Urmează că se poate determina, în fiecare punct din cîmp, o orientare de versor $\bar{u}_n$ a vectorului arie al unei curbe Γ, pentru care valoarea rotorului e maximă, şi că acest maxim e un vector, care se numeşte rotorul vectorului cîmp în punctul considerat şi se notează cu simbolul rot $\bar{G}$:

$$\text{(b)} \qquad \operatorname{rot} \bar{G} = \bar{u}_n \lim_{A \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{G}\, d\bar{r}}{A}$$

Regiunile unui cîmp de vectori în cari rot $\bar{G} = 0$ se numesc irotaţionale; cele în cari rot $\bar{G} \neq 0$ se numesc rotaţionale.

Pentru a determina expresiunea analitică a rotorului în coordonate cartesiene , considerăm componentele G_x, G_y şi G_z ale vectorului cîmp $\bar{G}$ în punctul P, de coordonate x,y,z (fig.24 a) şi un dreptunghiu de laturi Δ_y, Δ_z,

perpendicular pe axa Ox şi cu un vîrf în punctul P. Valoarea componentei z a vectorului cîmp pe latura verticală care nu trece prin P se obţine cu aproximaţie din valoarea ei în P, prin desvoltarea în serie Taylor a funcţiunii $G_z(x,y,z,)$ şi întreruperea desvoltării la termenul al doilea; ea are expresiunea:

$$G_z + \frac{\partial G_z}{\partial y} \Delta_y$$

iar valoarea componentei sale y pe latura orizontală care nu trece prin P se obţine analog, şi e:

$$G_y + \frac{\partial G_y}{\partial z} \Delta z$$

Calculînd circulaţia dealungul laturilor dreptunghiului, adică înmulţind pe G_z cu $(-\Delta z)$ şi prima expresiune de mai sus cu (Δz), pe G_y cu (Δy) şi ultima expresiune cu $(-\Delta y)$ adunînd, împărţind cu aria $\Delta y . \Delta z$ a dreptunghiului şi trecînd la limită cînd creşterile Δy şi Δz tind către zero, aproximaţiile tind către valorile exacte-şi se obţine componenţa x a rotorului în coordonate carteziene :

$$\operatorname{rot}_x \bar{G} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[-G_z \Delta z + \left(G_z + \frac{\partial G_z}{\partial y} \Delta y\right) + G_y \Delta y - \left(G_y + \frac{\partial G_y}{\partial z} \Delta z \right) \right] =$$

$$= \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}$$

Prin permutare ciclică a indicilor se obţin cele două componente, şi deci:

$$(c)\quad \operatorname{rot} \bar{G} = \bar{i}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix},$$

unde ultimul determinant e un simbol uşor de reţinut.

Dacă există într-un cîmp o suprafaţă pe care componenta tangenţială a vectorului cîmp e discontinuă, rotorul calculat din relaţia de mai sus e infinit pe acea suprafaţă. In acest caz, se calculează circulaţia dealungul unei curbe închise

format din două linii cari se aplică strîns şi corespund una alteia pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate, se împarte cu lungimea lor comună Δs, se trece la limită cînd lungimea Δs tinde către zero, şi se obţine rotorul de suprafaţă al vectorului cîmp, care se notează cu rot $_s \bar{F}$:

$$(d) \quad \text{rot}_s \bar{F} = \bar{u}_{n_{21}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{F_{t1} \Delta_s - F_{t2} \Delta_s}{\Delta s} = \bar{u}_{n_{21}} \times (\bar{F}_1 - \bar{F}_2)$$

unde $\bar{u}_{n_{21}}$ e versorul normal pe suprafaţa de discontinuitate dirijat din spre partea 2 spre partea 1, şi $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ sunt valorile vectorului cîmp de cele două părţi ale ei.

Conform teoremei lui Stokes, circulaţia vectorului cîmp al unui cîmp continuu de-a lungul oricărei curbe închise Γ e egală cu fluxul rotorului lui prin orice suprafaţă S_Γ, mărginită de curbă:

$$(e) \quad \oint_\Gamma \bar{G} \, d\bar{r} = \int_{S_\Gamma} \text{rot } \bar{G} \, d\bar{A}$$

In adevăr să împărţim suprafaţa S_Γ în elemente de arie $d\bar{A}$; să observăm că, după definiţia rotorului, rot $\bar{G} \, d\bar{A}$ e circulaţia vectorului cîmp de-a lungul conturului elementului de arie $d\bar{A}$ şi că, la adunarea circulaţiilor parţiale, corespunzătoare integralei din membrul drept al relaţiei lui Stokes, circulaţiile de-a lungul contururilor din interiorul curbei Γ se anulează două cîte două, fiindcă circulaţiile corespunzătoare celor două elemente de suprafaţă, cari se mărginesc pe curbele interioare, se iau în sensuri contrare de-a lungul aceleiaşi porţiuni de curbă (fig. 43 din Anexă), vectorul cîmp fiind presupus repartizat în spaţiu. Rămîne astfel suma de-a-lungul conturului exterior, ale cărui elemente de linie mărginesc cîte un singur element de suprafaţă, sumă scrisă în membrul stîng al expresiunii analitice a teoremei lui Stokes, care trebuia demonstrată.

Teorema lui Stokes transformă o integrală de linie într-o integrală de suprafaţă. Ea arată că fluxul rotorului unui cîmp de vectori e acelaşi prin toate suprafeţele cari au acelaşi contur.

Dacă se observă că oricare două dintre suprafeţele de acelaş contur formează o suprafaţă închisă şi se

ţine seama de convenţiunea generală pentru orientările elementelor de arie $d\bar{A}$ ale suprafeţelor deschise şi de contur dat, ca şi ale celor închise, se deduce că fluxul rotorului oricărui cîmp de vectori e nul prin orice suprafaţă închisă, că adică divergenţa rotorului oricărui cîmp de vectori e nulă:

$$(f) \qquad \text{div rot } \bar{E} = 0$$

relaţie care se poate demonstra şi cu ajutorul expresiunilor în coordonate ale divergenţei şi rotorului.

12,6. <u>Forma locală a teoremei potenţialului electrostatic.</u> Transformăm expresiunea (53) a teoremei potenţialului electrostatic cu ajutorul teoremei lui Stokes. Obţinem:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\, d\bar{r} = \int_{S_\Gamma} \text{rot } \bar{E}\, d\bar{A} = 0$$

Fiindcă în această relaţie suprafaţa S_Γ e arbitrară, relaţia poate fi satisfăcută numai dacă

$$(53\text{ a}) \qquad \text{rot } \bar{E} = 0$$

Rotorul intensităţii oricărui punct electrostatic e deci nul în orice punct al cîmpului. Această ecuaţie vectorială e echivalentă cu următoarele trei ecuaţii cu derivate parţiale, care se obţin utilizînd expresiunea rotorului în coordonate cartesiene:

$$(53\text{ a}) \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Cînd intensitatea cîmpului electric prezintă suprafeţe de discontinuitate în cîmp, se demonstrează analog că rotorul de suprafaţă al acestei intensităţi e nul în orice punct din cîmp:

$$(53\text{ b}) \qquad \text{rot}_s E = 0.$$

Această ecuaţie echivalează cu ecuaţia

$$(53\text{ b}') \qquad E_{t1} = E_{t2},$$

unde E_{t1} şi E_{t2} sunt componentele tangenţiale ale intensi-

tăţii cîmpului electric pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate. Componentele tangenţiale ale intensităţii cîmpului electric variază deci continuu la trecerea prin orice suprafaţă dintr-un cîmp electrostatic.

12.7. Potenţialul electrostatic. Din relaţia (53) rezultă că tensiunea electrică dintre două puncte oarecari ale unui cîmp electrostatic are aceiaşi valoare dealungul tuturor liniilor deschise dintre ele, dacă se conteazâ pe toate cu sensul pozitiv de la unul din puncte spre celălalt. Dacă V_o e valoarea arbitrară care se atribuie tensiunii electrice în punctul P_o valoarea $u = V$ a tensiunii în punctul P va fi, într-un astfel de cîmp :

$$(53\ c) \qquad V = \int_{P}^{P_o} \vec{E}\, d\vec{r} + V_o = V_o - \int_{P_o}^{P} \vec{E}\, d\vec{r}$$

unde integrarea se efectuează dealungul oricărei linii dintre P_o şi P_1 fiindcă se obţine aceiaşi valoare. Tensiunea electrică V, astfel exprimată, defineşte deci o funcţiune scalară de punct V, care se numeşte potenţialul electric scalar al cîmpului staţionar; acesta derivă deci dintr-un potenţial scalar.

Tensiunea electrică dintre două puncte oarecari P_1 şi P_2 ale unui cîmp electric staţionar e deci:

$$(53\ c') \quad u_{p1p2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_o} \vec{E}d\vec{r} + \int_{P_o}^{P_2} \vec{E}d\vec{r} = V_1 - V_2 ,$$

adică e egală cu diferenţa dintre potenţialele electrice scalare ale celor două puncte. Prin diferenţiere obţinem:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \text{grad } V\, d\vec{r} = -\vec{E}d\vec{r} = -E_x dx - E_y dy -$$

$$- E_z\, dz.$$

Rezultă că intensitatea oricărui cîmp electric staţionar e egală cu gradientul cu semn schimbat al potenţialului electric scalar al cîmpului :

$$(53d) \qquad \vec{E} = - \text{grad } V,$$

adică dacă se foloseşte expresiunea gradientului în coordonate cartesiene triortogonale x,y,z,:

$$(53\ e)\quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\ ;\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}\ ;\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

La repartiţie dată a potenţialului în cîmp, intensitatea cîmpului e deci univoc determinată.

Relaţia (39) referitoare la cîmpurile electrostatice se poate exprima deci sub forma: Potenţialul electrostatic are gradient diferit de zero numai în conductoarele neomogene sau cari se găsesc la temperatură neuniformă, în cari există cîmp electric imprimat; potenţialul este constant în toate conductoarele omogene şi la temperatură uniformă. Suprafaţa oricărui conductor din cîmpul electrostatic e deci o suprafaţă echipotenţială, şi în imediata apropiere a acestei suprefeţe intensitatea cîmpului electrostatic din exterior trebuie să fie normală pe suprafaţa conductorului. Densitatea de suprafaţă a sarcinii adevărate variază însă, în general pe suprafaţa unui conductor în regim electrostatic.

13. ECUATIILE LUI POISSON SI LAPLACE IN ELECTROSTATICA

13.1. Stabilirea ecuaţiei. In cîmpurile electrice staţionare şi deci în cîmpurile electrostatice, legea fluxului electric (47 a) şi teorema referitoare la existenţa potenţialului electric scalar (53 d) se pot strînge în următoarea teoremă, valabilă cînd nu există în cîmp dielectrici anisotropi, feroelectrici sau cu polarizaţie electrică permanentă:

$$(54)\quad \int_{\Sigma} \varepsilon\, \mathrm{grad}\ V\, d\bar{A} = \int_{\Sigma} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial s_n}\, d\, A = -\varkappa\, q_{\Sigma}$$

şi deci, sub forma diferenţială:

$$(54\ a)\quad \mathrm{div}\,(\varepsilon\, \mathrm{grad}\ V) = -\varkappa \rho_v$$

In fiecare punct divergenţa produsului gradientului potenţialului scalar prin permitivitate e deci proporţional şi de semn contrar cu densitatea de sarcină adevărată.

In particular, laplacianul potențialului e proporțional și de semn contrar cu cîtul densității de sarcină, prin permitivitatea absolută dacă aceasta e constantă: div grad $V = -\frac{\varkappa}{\varepsilon}\rho_v$; el nu e nul dacă intensitatea de sarcină adevărată e nulă: div grad $V = 0$.

Din (54) se obțin imediat forme particulare, valabile în diferite sisteme de coordonate. In coordonate cartesiene triortogonale x,y,z și pentru ε = const, se obține următoarea formă a ecuației lui Poisson:

$$(54\ b)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\varkappa}{\varepsilon}\rho_v$$

Aceasta ia forma ecuației lui Laplace în domeniile în cari nu există densitate de sarcină adevărată:

$$(54\ c)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

In vid ecuația lui Poisson (54 b) conține mărimea ε_o în locul mărimii ε.

Forma (47 c) a legii fluxului electric se poate transforma cum urmează:

$$(54\ d)\quad -(D_{n1} + D_{n2}) = -(\varepsilon_a E_{n1} + \varepsilon_b E_{n2}) = (\varepsilon_a \frac{\partial V}{\partial s_{n1}} + \varepsilon_b \frac{\partial V}{\partial s_{n2}}) = -\varkappa \rho_s$$

iar pentru suprafețele metalelor, cu normala exterioară de versor u_n, îndreptat spre un dielectric de permitivitate ε:

$$\frac{\partial V}{\partial s_n} = -\frac{\varkappa}{\varepsilon}\rho_s$$

Fiindcă intensitatea cîmpului electric în sens larg e nulă în conductoarele din cîmpul electrostatic și fiindcă tensiunea electrică (în sens restrîns) a oricărui cîmp electrostatic e nulă dealungul tuturor curbelor închise în cîmp, urmează că regimul electrostatic se poate stabili numai în conductoarele în cari tensiunea electromotoare a cîmpurilor electrice imprimate e nulă dealungul tuturor curbelor închise cari se pot trasa în acele conductoare. Vom arăta că în circuitele formate din legarea în serie a unor conductoare de

primul şi de al doilea ordin, în cazurile cele mai generale $\oint_{\Gamma} \bar{E}_i d\bar{r} \neq 0$; Urmează că, în astfel de circuite, nu se poate stabili, în aceste cazuri, un regim electrostatic.

13.2. Expresiunea potenţialului electrostatic.

Dacă ρ_i ρ_s şi ρ_l sunt densităţile de volum , de suprafaţă şi de linie ale sarcinii electrice adevărate în cîmpul electrostatic dintr-un mediu omogen şi isotrop, care are permitivitatea uniformă ε şi nu are polarizaţie permanentă, potenţialul electrostatic V are forma (16), în care mărimea ε_0 se înlocuieşte cu ε; cum rezultă din observaţia făcută după relaţia (54 c):

$$(55)\quad V = \frac{K}{4\pi\varepsilon}\left[\int \frac{\rho_v}{R} dv + \int \frac{\rho_s}{R} dA + \int \frac{\rho_l}{R} ds + \sum_{v=1}^{n} \frac{q_i}{R_i}\right]$$

Aici integralele se efectuează asupra volumelor, a suprafeţelor şi liniile cu densitate de sarcină iar suma se efectuează asupra punctelor cu sarcină punctuală.

Aplicaţie Cîmpul electrostatic dintre două plăci plane conductoare omogene, paralele, de arie foarte mare (teoretic infinită), încărcate cu densităţile superficiale ρ_s şi $-\rho_s$ de sarcină adevărată şi avînd între ele un dielectric omogen neutru, de permitivitate ε.

Cîmpul dintre cele două plăci e laplacian şi potenţialul său electrostatic satisface în coordonate carteziene ecuaţia (54 c). Dacă alegem sistemul cu axa x perpendiculară pe plăci potenţialul va depinde, din cauze de simetrie numai de x, şi ecuaţia se simplifică, devenind.

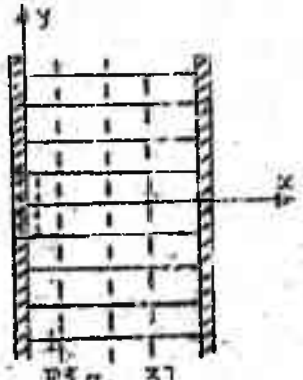


Fig. 31
Cîmpul electrostatic dintre două plăci paralele.

$$(a)\quad \frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

La suprafaţa interioară a plăcilor avem după (54 e):

$$(b)\quad E_n = \left(-\frac{dV}{dx}\right)_{x=0} = \frac{K}{\varepsilon}\rho_s$$

şi

$$E_n = \left(-\frac{dV}{dx}\right)_{x=\delta} = -\frac{K\rho_s}{\varepsilon}$$

dacă ρ_s şi $-\rho_s$ sunt densităţile constante de sarcină pe suprafeţele inferioare ale plăcilor 1 şi 2.

Urmează să determinăm pe V în funcţiune de x, astfel încît să satisfacă ecuaţia diferenţială (a) şi condiţiunile la limită (b) prin două integrări succesive în raport cu x, obţinem din ecuaţia diferenţială (a)

$$V = Ax + B,$$

unde A şi B sunt constantele de integrare. A se determina în condiţiunile la limită, iar B e arbitrar. Dacă alegem potenţialul plăcii 1 egal cu zero, obţinem B = 0. Dacă scriem condiţiunea la limită pentru placa 1, adică pentru x = 0, obţinem:

$$\left(-\frac{dV}{dx} \right)_{x=0} = -A = \frac{\varkappa}{\varepsilon} \rho_s$$

şi expresiunea de mai sus a potenţialului scalar devine:

$$V = -\frac{\varkappa \rho_s}{\varepsilon} x$$

Potenţialul scade deci linear cu x. Intensitatea cîmpului electric $\vec{E}$ e egală cu gradientul cu semn schimbat al potenţialului scalar, sau, folosind expresiunea gradientului în coordonate cartesiene trirectangulare:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\vec{i}\frac{dv}{dx} = +\vec{i}\frac{\varkappa}{\varepsilon}\rho_s$$

adică e constantă şi dirijată în sensul absciselor crescătoare dacă ρ_s e pozitiv. Liniile de cîmp sînt drepte perpendiculare pe plăci, şi suprafeţele de nivel sunt plane, paralele cu plăcile (Fig. 31). Dacă U e tensiunea sau diferenţa de potenţial dintre plăci, potenţialul plăcii a doua devine egal cu (-U); dacă g e distanţa dintre ele, rezultă:

$$V_x = d = -\frac{\varkappa \rho_s}{\varepsilon} g = -U$$

de unde obţinem densitatea de sarcină ρ_s în funcţiune de tensiunea dintre plăci

$$\rho_s = \frac{\varepsilon U}{\varkappa g}$$

Potenţialul scalar, intensitatea cîmpului şi inducţia electrică se pot pune sub următoarele forme:

b) $V = -\frac{U}{\varepsilon} x = -\frac{\varkappa \rho_s}{\varepsilon} x$;

(c) $\bar{E} = \bar{i} \frac{U}{\varepsilon} = \bar{i} \frac{\varkappa}{\varepsilon} \rho_s$;

(d) $\bar{D} = \varepsilon \bar{E} = \bar{i} \varkappa \rho_s$.

Intensitatea cîmpului electric dintre plăci poate fi determinată, mai simplu, cum urmează: Din cauze de simetrie, intensitatea cîmpului variază numai în lungul coordonatei x şi e perpendicular pe plăci, adică e paralel cu axa. In aceste condiţiuni am satisfăcut teorema potenţialului electrostatic, urmează să satisfacem şi legea fluxului electric. Pentru aceasta, alegem o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu cîmpul $\bar{E}$ şi de secţiune dreaptă egală cu unitatea situată cum arată fig.31. Sarcina din interiorul ei e ρ_s . Fluxul inducţiei electrice care o traversează e $\bar{D}$ prin secţiunea dreaptă din cîmp. Prin secţiunea dreaptă din placă, fluxul e nul, fiindcă în conductorul omogen cîmpul e nul, iar fluxul prin suprafaţa laterală e nul, fiindcă aceasta e paralelă cu liniile de cîmp. Rezultă astfel din (54 e):

$$(e) \quad \frac{D}{\varepsilon} = E = \frac{\varkappa}{\varepsilon} \rho_s ;$$

adică valoarea (c) a intensităţii cîmpului. Intensitatea cîmpului se poate obţine deci fie prin integrarea ecuaţiei lui Poisson, fie prin aplicarea judicioasă a legii fluxului electric şi a teoremei potenţialului electrostatic.

Dacă dimensiunile lineare ale plăcilor sînt mari faţă de distanţa lor, în porţiunea mijlocie cîmpul poate fi aproximat prin cîmpul uniform pe care l-am dedus în ipoteza că plăcile sînt infinit mari. In apropiere de marginile plăcilor, cîmpul diferă mult de cel uniform : avem efect de margine. Determinarea intensităţii cîmpului electric în apropiere de marginea plăcilor e o problemă dificilă. De multe ori e suficient să calculăm însă cu intensitatea cîmpului din regiunea în care e uniform.

Exemplu numeric: Două plăci circulare paralele, cu diametrul 2 R = 0,2 m, sînt aplicate pe un carton presat

de grosimea d = 1 mm = o,ool m. Să se calculeze sarcina cu care se încarcă şi intensitatea cîmpului electric dintre ele ştiind că tensiunea dintre ele o U = lo5 volţi(lo5 V).

Cîmpul dintre plăci e omogen şi intensitatea lui se obţine,după (c), împărţind tensiunea cu distanţa d:

$$\vec{E} = \vec{\imath}\ \frac{U}{d} = \vec{\imath}\ \frac{lo5}{o,ool} = \vec{\imath}\ lo5ooo \quad V/m$$

Permitivitatea relativă a cartonului presat (v tabloul), este: $\varepsilon_r = 4,5$. Densitatea de suprafaţă a sarcinii adevărate se calculează, folosind unităţi clasice neraţionalizate ($\chi = 4\pi$), din relaţia (e), în care $\varepsilon = \varepsilon_o\ \varepsilon_r = \varepsilon_r : (9.lo^9)$, şi deci:

$$\rho_s = \frac{\varepsilon E}{\chi} = \frac{4,5 \times lo5ooo}{4x3,14x9xlo^9} = 4,18.lo^{-6}\ C/m^2$$

şi sarcina adevărată a unei plăci e:

$$= \rho_s A = \rho_s\ \pi R^2 = 4,18.lo^{-6}\ 3,14.lo^{-2} C = 1,312.\delta^{-9} C = o,1312\ pC$$

Dacă am fi avut aer ($\varepsilon = 1$) între plăci, sarcina adevărată a unei plăci ar fi fost, la acelaşi tensiune între plăci, de $\varepsilon_r = 4,5$ ori mai mică.

14.- LEGEA CIMPURILOR ELECTRICE IMPRIMATE

14.1. Legea cîmpurilor electrice imprimate. Experienţa arată că toate cîmpurile electrice imprimate satisfac următoarea lege: tensiunea electrică a cîmpurilor electrice imprimate E_i e nulă dealungul tuturor curbelor închise cari trec numai prin conductoare de primul ordin, cari se găsesc la temperatură uniformă:

$$(56) \qquad \boxed{\oint_\Gamma \vec{E}_i\ d\vec{r} = 0\ ;}$$

ea poate diferi de zero numai de-a-lungul curbelor închise care trec fie prin conductoare la temperatură neuniformă, fie prin conductoare de al doilea ordin şi neomogene, fie printr-un conductor de al doilea ordin şi neomogen şi unul de primul ordin omogen, fie prin unul de al doilea ordin omogen şi prin

două de primul ordin, omogene:

$$(56\ a)\qquad \boxed{\oint_r \bar{E}_1\, d\bar{r} \neq 0}$$

14.2. Tensiunea electrică de contact. Considerăm două medii în contact: 1 şi 2; presupunem fie că ambele sînt izolante, fie că unul sau ambele sînt conductoare de primul ordin omogene sau neomogene, dar la temperatură uniformă, fie că unul sau ambele sunt conductoare de al doilea ordin, dar ambele omogene. In toate aceste cazuri, tensiunea electrică a cîmpurilor electrice imprimate, dacă acestea există, este nulă dealungul tuturor curbelor închise care se pot trasa în corpuri. Rezultă că tensiunea electrică imprimată, calculată transversal prin stratul de la suprafaţă de contact a celor două medii, între două puncte P_1 şi P_2 ale lor, şi din imediata apropiere a acelui strat (Fig 32), are deci aceiaşi valoare prin oricare din punctele suprafeţei de contact:

$$(a)\qquad U_{i12} = \int_{P_1}^{P'_2} \bar{E}_i\, d\bar{r}$$

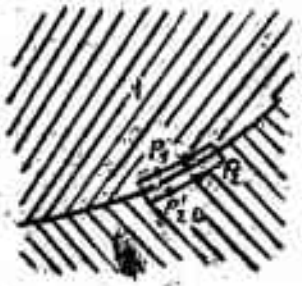


Fig. 32

unde P'_2 corespunde în mediul 2 punctului P' din mediul 1. Fiindcă $\bar{E}_i$ e independent de regim şi fiindcă în orice regim E din suprafaţa de constact a celor două medii poate diferi de $\bar{E}_i$ numai printr-un vector de valoare absolută finită urmează că şi tensiunea electrică în sens restrîns

$$(b)\qquad U_{12} = \int_{P_1}^{P'_2} \bar{E}\, d\bar{r} = -\,U_{i12}$$

are aceiaşi valoare prin toate punctele suprafeţei de constact. Ea se numeşte tensiunea electrică de contact U_{12} a celor două medii 1 şi 2, contată din spre mediul 1 spre mediul 2. Valoarea tensiunii de contact a două medii date nu se poate determina experimental fiindcă, dacă două medii omogene şi la temperatură uniformă sînt în contact numai între ele (adică nu sînt în contact şi cu un al treilea mediu, inclusiv

cu vidul)faptul că unul e la tensiune electrică mai înaltă decît celălalt nu poate fi pus în evidenţă prin mijloace macroscopice. Vom presupune, de obicaiu, că tensiunile de contact dintre metale şi dielectrici sînt nule. Am făcut această ipoteză de exemplu în aplicaţia din capitolul 12.Totuşi, tensiunile de contact sînt importante cînd se montează în circuit trei sau mai multe corpuri în contact.

14.3. Trei medii în serie. Dacă trei sau mai multe medii omogene şi la temperatură uniformă (inclusiv vidul) sînt montate în serie formînd un circuit (circuit voltaic) suma tensiunilor electrice de contact $U_{i,i+1}$ din suprafeţele de contact străbătute de o linie închisă în lungul circuitului (fig.53) e nulă dacă toate conductoarele circuitului sînt de primul ordin sau metalice (legea seriei electrochimice a tensiunilor de contact):

$$(56\ b)\quad U_e = U_{12} + U_{25} + U_{24} + \ldots U_{n-1,n} + U_{n1} = 0;$$

afară de cazurile particulare, această sumă diferă de zero dacă există în circuitul voltaic şi conductoare de al doilea ordin:

$$(56\ c)\quad U_e = U_{12} + U_{23} + U_{34} + \ldots U_{n-1\,n} + U_{n1} \neq 0.$$

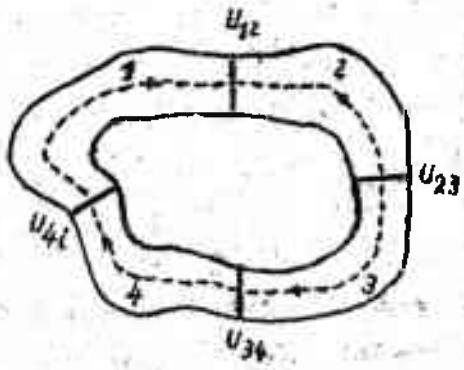


Fig. 33
Circuit voltaic

Dacă un circuit voltaic nu conţine conductoare de al doilea ordin şi nu se găseşte într-un cîmp electric stabilit din exterior legea (56) a seriei electrochimice arată că sistemul este în echilibru electrostatic,indiferent dacă e deschis, adică are în serie şi unul sau mai mulţi dielectrici (de ex. corpul 4 din fig.33), sau e închis, adică are în serie exclusiv conductoare.

Dacă un circuit voltaic conţine însă şi conductoare de al doilea ordin, nu este valabilă

legea seriei electrochimice, şi relaţia (56 a) dă o valoare diferită de zero a sumei tensiunilor de contact din lungul circuitului. Dacă circuitul e deschis adică are în serie şi unul sau mai mulţi dielectrici, el trebuie să se găsească în echilibru electrostatic, ceiace implică existenţa în dielectrici a unui cîmp electric a cărui tensiune să completeze la zero suma $U \neq 0$ a tensiunilor de contact. Dacă circuitul e închis, adică nu are în serie şi dielectrici, suma U din (56 a) se numeşte tensiunea electromotoare din lungul circuitului şi nu se poate stabili echilibru electrostatic, fiindcă acesta are tensiune electromotoare nulă: circuitul e parcurs de un curent electric.

14.4. Coloane voltaice şi coloane galvanice.

Dacă un circuit voltaic conţine mai multe conductoare în serie, fiecare grup de conductoare în serie din circuitul limitat la extremităţi de unul sau mai mulţi dielectrici, se numeşte coloană voltaică dacă are la extremităţi conductoare diferite (Fig. 34 a) şi coloană galvanică dacă are la extremităţi acelaşi conductor(fig.34 b). Soluţia electrolitică şi electrozii unui acumulator cu plumb, încărcat, constituie o coloană voltaică. Dacă se adaugă după fiecare electrod, cîte un fir de cupru, la capetele libere ale acestor două fire se termină o coloană galvanică. Suma tensiunilor de contact ale unui circuit format de o coloană voltaică deschisă se numeşte tensiune voltaică a coloanei (v.Fig.14 a).

$$(56\ d)\quad U_v = U_{41} + U_{12} + U_{23} + U_{34}$$

şi depinde şi de natura corpului (de ex.a dielectricului) dintre extremităţile ei. Suma tensiunilor de contact ale unui circuit format de o coloană galvanică deschisă se numeşte tensiune galvanică a coloanei (v.Fig.14 b).

$$(56\ e)\quad U_g = U_{41} + U_{12} + U_{23} + U_{21} + U_{14} =$$

$$= U_{12} + U_{24} + U_{31}\ ,\ \text{fiindcă}\ U_{41} + U_{14} = 0$$

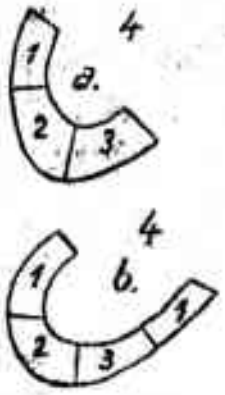


Fig. 34
a.Coloană voltaică
b.Coloană galvanică

şi nu depinde de natura corpului 4 dintre extremităţile ei.

14.5. Seria electrochimică

Din legea (56) aplicată unui circuit voltaic format din trei conductoare de primul ordin 1,2 şi 3, urmează:

$$U_{12} = U_{32} - U_{31}$$

adică tensiunea de contact U_{12} a conductoarelor 1 şi 2 e egală cu diferenţa altor două tensiuni de contact dintre care U_{32} nu depinde de conductorul 1 iar a doua (U_{31}) nu depinde de conductorul 2. Conductorul 3 fiind arbitrar şi influenţa lui eliminîndu-se din diferenţă (care dă mărimea U_{12}, independentă de el), urmează că această influenţă intervine în U_{32} şi U_{31} numai cu o aceiaşi constantă aditivă U_3, care se poate determina.

$$U_{32} = U_2 - U_3 \; ; \; U_{31} = -U_{13} = U_1 - U_3$$

şi deci:

$$(56\,F) \quad U_{12} = U_{32} - U_{31} = U_2 - U_1$$

unde mărimile U_2 şi U_1 sînt determinate numai pînă la o constantă aditivă arbitrară. Dacă această constantă se alege astfel, încît mărimile U_i ale tuturor conductoarelor să fie pozitive acestea se pot ordona într-o serie în ordinea crescătoare a mărimilor U_i, numită seria electrochimică a conductoarelor de primul ordin. Din această serie se poate determina sensul (semnul) tensiunii galvanice de contact dintre două conductoare, fiindcă, în contact cu un corp din faţa lui, are o tensiune electrică mai înaltă decît a acestuia, iar în contact cu unul din urma lui, are tensiunea mai joasă decît a acestuia.

Tensiunea voltaică a două conductoare de primul ordin, diferă, în general, de diferenţa lor de tensiune în seria electrochimică şi poate avea uneori şi sens (semn)

contrar acesteia. In adevăr din (56 d) şi din (56 F) urmează pentru corpurile 1,2 şi 4(adică în lipsa corpului 3 din fig 34 a şi 34 b):

$$U_v = U_{41}+U_{12}+U_{24} = U_{41}+U_2-U_1+U_{24} = (U_2 + U_{41}) - (U_1-U_{42}),$$

ceiace arată că ea diferă de tensiunea lor $U_2 - U_1$, în seria electrochimică şi anume dacă U_{41} diferă de U_{42}.

14.6. Seria electrochimică şi conductoarele de al doilea ordin. Printr-o coloană voltaică închisă care are şi conductoare de al doilea ordin, circulă, în general, în permanenţă, un curent electric. Acesta e însoţit de desvoltare de căldură. Aceasta arată că în coloană se produce o transformare de energie în energia interioară a conductoarelor, indiferent dacă starea electrică a coloanei e staţionară sau nestaţionară. Această energie trebuie să provină deci cel puţin în parte din alte forme, şi anume din energia chimică a conductoarelor, a căror prezenţă condiţionează curentul, adică a conductoarelor de al doilea ordin, în cari trebuie să se producă deci reacţii chimice. Definiţiile conductoarelor de al doilea ordin prin transformările chimice produse în ele cînd sînt parcurse de curent, respectiv prin faptul că introducerea lor în circuit voltaic suprimă valabilitatea legii(56), sînt deci echivalente.

15.- TEOREMELE GENERALE ALE ELECTROSTATICII

In Electrostatică se folosesc adesea anumite teoreme generale, care rezultă din legile şi din formele ei, şi care permit fie o privire generală asupra anumitor fenomene, fie efectuarea rapidă a unor calcule.

Din acestea, teoremele referitoare la refracţia liniilor de forţă, referitoare la superpoziţie, capacităţile electrostatice, energia electrostatică, forţele langrangiene şi densitatea de volum a forţei în cîmpul electrostatic sînt cele mai importante.

15.1. Teorema refracţiei liniilor de cîmp şi inducţia. Fie un cîmp electrostatic şi suprafaţa de separaţie a doi dielectrici isotropi, presupusă neîncărcată cu sarcină adevărată. Divergenţa de suprafaţă a inducţiei electrice e nulă la suprafaţa de separaţie, fiindcă aceasta nu are sarcină adevărată; componentele normale D_{n1} şi D_{n2} ale inducţiei, pe cele două feţe ale suprafeţei, contate pozitive cînd sînt îndreptate din spre suprafaţă spre cîmp satisfac adică următoarea relaţie: $D_{n1} + D_{n2} = 0$. Din aceasta şi din legea polarizaţiei electrice rezultă, cînd $P_F = 0$:

$$(a)\quad D_{n1} + D_{n2} = \varepsilon_1 E_{n1} + \varepsilon_2 E_{n2} = 0$$

cum se exemplifică în fig 35 b , 35 d. Dacă în relaţia (a) ambele componente normale sînt contate pozitive în sensul din spre mediul 1 spre mediul 2, trebuie schimbat semnul uneia dintre componente şi se obţine;

$$(b)\quad D_{n1} = D_{n2}\ ;\quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

Componentele normale ale intensităţii cîmpului electric au însă valori diferite pe cele două feţe ale suprafeţei

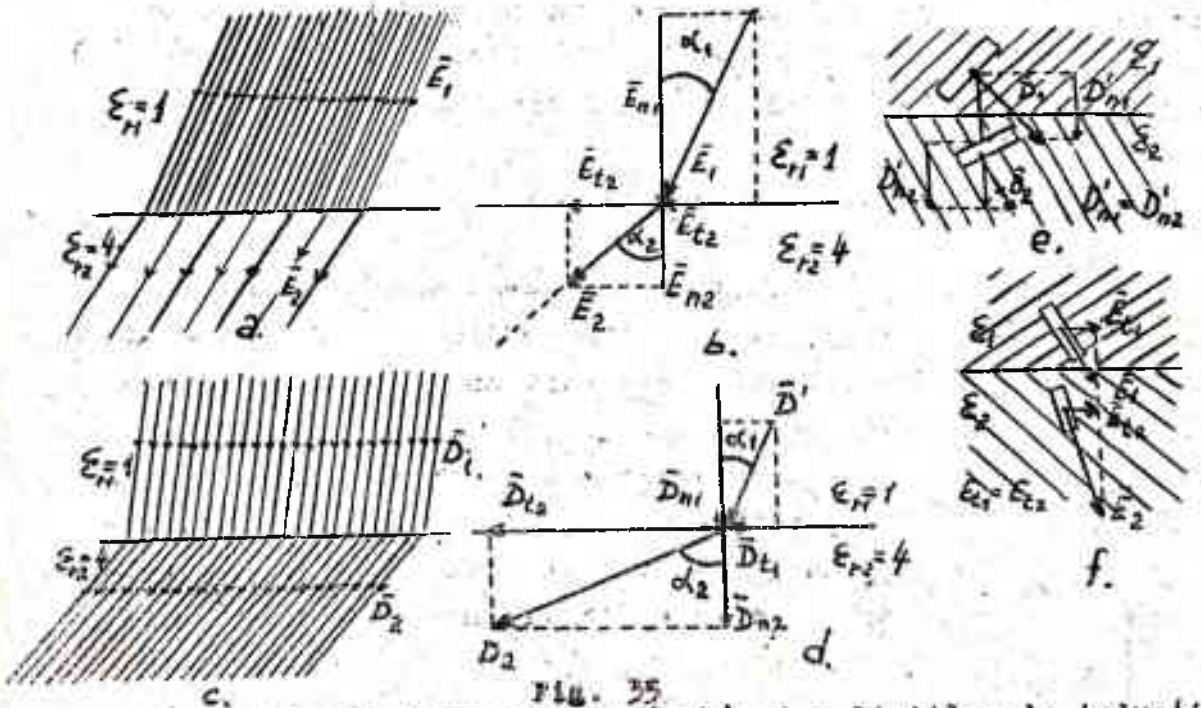


Fig. 35
Refracţia liniilor de cîmp(a,b) şi a liniilor de inducţie (c,d) ale unui cîmp electrostatic la suprafaţa de separaţie fără sarcină adevărată, a doi dielectrici isotropi.

fiindcă aceasta are sarcină electrică liberă.Conform celei de a doua forme diferenţiale a lemei potenţialului electrostatic, componentele tangenţiale E_{t1} şi E_{t2} ale intensităţii cîmpului pe cele două feţe ale suprafeţei, contate ambele pozitive în sensul în care e îndreptată una dintre ele, satisfac relaţia (b), din care rezultă:

$$(c) \qquad E_{t1} = E_{t2}$$

cum arată fig. 35 b,35 c.

Raportul dintre componentele tangenţială şi normală ale intensităţii cîmpului reprezintă, de fiecare parte a suprafeţei de separaţie, un cît egal cu tangenta trigonometrică a unghiului de incidenţă α_1, respectiv de refracţie α_2, formate de vectorul de intensitate a cîmpului $\bar{E}_1, \bar{E}_2$ (respectiv de vectorul de inducţie electrică $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$) cu normala locală a suprafeţei de separaţie (v fig.35 d).

Impărţind membru cu membru relaţiile (b) şi (c) rezultă:

$$(57) \qquad \frac{E_{t1}}{E_{n1}} : \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

Raportul tangentelor trigonometrice ale unghiurilor de incidenţă şi de refracţie a liniilor de cîmp sau de inducţie electrică,la suprafaţa de separaţie a doi dielectrici isotropi, e deci egal cu raportul permitivităţilor lor absolute sau relative.

La intrarea într-un mediu de permitivitate mai mare liniile de cîmp şi de inducţie se îndepărtează deci de normala de incidenţă (fig.35 a, 35 b), dacă liniile incidente nu au fost normale pe suprafaţa de incidenţă sau paralele cu ea, cînd liniile nu se refractă. Liniile de inducţie se indesesc deci în corpurile de permitivitate mai mare (fig. 35 a) şi se răresc în cele de permitivitate mai mică(fig.35 b).

15.2. <u>Teorema superpoziţiei</u> Fie n conductoare omogene cu dielectrici omogeni sau neomogeni şi de permitivitate independentă de cîmp între ele, conductoarele şi dielectricii avînd sarcini adevărate a căror sumă algebrică e nulă.

Se spune că, în aceste condiţiuni, se stabileşte un cîmp electrostatic complect: Dacă se trasează o suprafaţă închisă care închide sistemul de conductoare şi dielectrici, fluxul electric prin suprafaţă e nul, şi dacă aceasta e destul de mare şi depărtată de regiunile cu sarcini adevărate, intensitatea cîmpului electrostatic pe suprafaţă e nulă.

Fie $V_a(\bar{r})$ şi $V_b(\bar{r})$ potenţialele scalare ale cîmpurilor electrostatice în punctele de raze vectoare $\bar{r}$ şi corespunzătoare cazurilor în care sarcinile adevărate au valorile punctuale $q_{ia}(r_i)$ respectiv $q_{kb}(\bar{r}_k)$ şi densităţile de volum şi de suprafaţă $\rho_{va}(\bar{r})$ şi $\rho_{sa}(\bar{r})$, respectiv $\rho_{vb}(\bar{r})$ şi $\rho_{sb}(\bar{r})$. Conform teoremei superpoziţiei, potenţialul scalar $V(\bar{r})$ al cîmpului electrostatic în punctele de raze vectoare $\bar{r}$, corespunzător cazului în care sarcinile adevărate au valorile punctuale $q(\bar{r}) = q_a(\bar{r}) + q_b(\bar{r})$, şi densităţile $\rho_v(\bar{r}) = \rho_{va}(\bar{r}) + \rho_{vb}(\bar{r})$, $\rho_s(\bar{r}) = \rho_{sa}(\bar{r}) + \rho_{sb}(\bar{r})$, respectiv egale cu sumele valorilor corespunzătoare celor două cazuri, e egal cu suma potenţialelor electrostatice $V_a(r)$ şi $V_b(r)$ care corespund acestor două cazuri : $V(\bar{r}) = V_a(\bar{r}) + V_b(\bar{r})$.

Demonstrăm teorema pentru cazul că avem numai densitatea de volum ρ_v a sarcinilor adevărate, fiindcă celelalte cazuri rezultă din acesta drept cazuri limită. Potenţialul $V_a(\bar{r})$ e soluţia ecuaţiei generalizate al lui Poisson:

$$\operatorname{div}\left[\varepsilon \operatorname{grad} V_a(\bar{r})\right] = -K \rho_{va}(r)$$

care corespunde densităţii de sarcină $\rho_v(\bar{r})$ iar potenţialul $V_b(\bar{r})$ e soluţia ecuaţiei.

$$\operatorname{div}\left[\varepsilon \operatorname{grad} V_b(\bar{r})\right] = -K \rho_{vb}(\bar{r})$$

ambele repartiţii ale densităţilor de sarcini adevărate satisfăcînd condiţiunile regimului electrostatic. Adunînd membru cu membru cele două ecuaţii, obţinem:

$$\operatorname{div}\left\{\varepsilon \operatorname{grad}\left[V_a(\bar{r}) + V_b(\bar{r})\right]\right\} = -K\left[\rho_a(\bar{r}) + \rho_b(\bar{r})\right]$$

Rezultă că

$$(58) \qquad V(\bar{r}) = V_a(\bar{r}) + V_b(\bar{r})$$

e o soluţie generalizată a lui Poisson corespunzătoare densităţii de sarcină adevărată

(59) $\rho_v(\bar{r}) = \rho_{va}(\bar{r}) + \rho_{vb}(\bar{r})$

Soluţia $V(\bar{r})$ satisface însă şi condiţiunile regimului electrostatic, adică e soluţia problemei de electrostatică referitoare la densitatea $\rho_v(\bar{r})$ pentru că în fiecare dintre cîmpurile $V_a(\bar{r})$ şi $V_b(\bar{r})$ potenţialul este constant în interiorul fiecărui conductor, şi deci potenţialul $V(\bar{r}) = V_a(\bar{r}) + V_b(\bar{r})$ e, deasemenea constant în interiorul fiecărui conductor. Conform teoremelor unicităţii $V(\bar{r})$ e însă unica soluţie a problemei.

Teorema fiind valabilă pentru superpoziţia a două cîmpuri, e valabilă pentru superpoziţia oricîtor cîmpuri electrostatice - Ea derivă din faptul că legile şi lemele valabile în cîmpul electrostatic sînt toate lineare. Principiul superpoziţiei pe care l-am folosit la suprapunerea cîmpurilor coulombiene, e deci o consecinţă a legilor, lemelor şi teoremelor Electrostaticii. Teorema superpoziţiei permite ca din soluţii corespunzătoare unor cazuri simple să se obţină soluţii corespunzătoare unor cazuri mai complicate.

Fie un sistem de n conductoare omogene, înconjurate de dielectrici în cari se cunoaşte repartiţia sarcinilor adevărate. Fie q_1, $q_2 \cdots q_n$ sarcinile electrice adevărate ale celor n conducteare. Prima problemă fundamentală a Electrostaticii consistă în a determina repartiţia sarcinilor q_i pe conductoare, corespunzătoare regimului electrostatic, în care potenţialul are valorile constante, dar încă necunoscute V_i în cele n conductoare şi în a determina valoarea potenţialului electrostatic corespunzător, în fiecare punct din cîmp, şi deci şi valorile V_i pe conductoare. Intensitatea corespunzătoare a cîmpului electrostatic se calculează apoi din forma (53 d) a lemei potenţialului electrostatic, iar valorile polarizaţiei şi inducţiei, din formulele (49) şi (51) ale legii polarizaţiei electrice. In cea de a doua problemă fundamentală se dau valorile V_i şi se cer valorile q_i.

Nu există metode aplicabile tuturor cazurilor pentru rezolvarea celor două probleme fundamentale ale Elec-

staticii. Cu ajutorul teoremei superpoziţiei, aceste probleme se pot reduce însă la probleme mai simple.

In adevăr, să presupunem nule sarcinile adevărate din dielectrici ($\rho_v = 0$), şi să rezolvăm următoarele n probleme mai simple.

Determinăm potenţialele v_i care ar corespunde cazului că numai conductorul i are potenţialul $v_i = 1$ şi toate celelalte conductoare au potenţiale nule ($v_k = 0$; $k \neq i$) adică rezolvînd n probleme Dirichlet. Fiecare dintre aceste potenţiale satisface deci, în întregul spaţiu ecuaţia

$$\Delta v_i = 0$$

şi ia valorile 1, respectiv 0 pe conductoare; formăm apoi funcţiunea

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i V_i$$

care satisface deasemenea, conform teoremei superpoziţiei în întregul spaţiu, ecuaţia

$$\Delta V = 0$$

şi are pe conductoarele i valorile V_i

. Acest potenţial e soluţia căutată conform teoremei *unicităţii*

Din formula

$$\bar{E} = - \text{grad } V$$

se calculează intensitatea cîmpului electric, din formula

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$$

se calculează inducţia electrică, din formula

$$\rho_s = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \frac{\partial V}{\partial s_n}$$ la suprafaţa conductoarelor, iar din formulele

$$(59\ a)\quad q_i = -\frac{1}{\varkappa} \int_{\Sigma_i} \varepsilon \frac{\partial V}{\partial s_n} dA = -\frac{1}{\varkappa} \sum_{k=1}^{n} V_k \int_{\Sigma_i} \varepsilon \frac{\partial v_k}{\partial s_n} dA$$

se calculează sarcinile adevărate q_i, dacă se cunosc potenţialele V_k - sau potenţialele V_k, dacă se cunosc sarcinile adevărate q_i.

Teorema superpoziţiei se foloseşte şi în reducerea la probleme mai simple a altor probleme fundamentale ale Electrostaticii, de exemplu, în problema de a se determina cîmpul electrostatic care se stabileşte după ce s-a introdus un nou corp(de ex. un conductor) cu sarcină adevărată totală nulă, într-un cîmp electric iniţial, care era cunoscut.

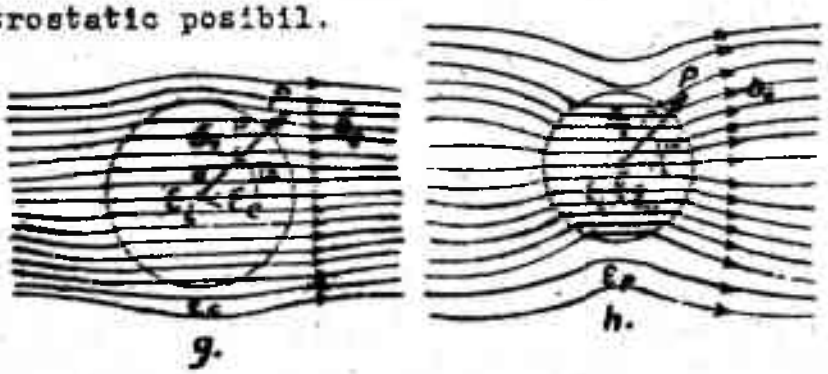
Problemele mai simple, care rămîn de rezolvat după aplicarea principiului superpoziţiei, cum sînt problemele de determinare a potenţialelor v_i din expresiunea de mai sus a potenţialului , se rezolvă prin metode speciale, aplicabile numai anumitor cazuri: metoda elementară, metoda imaginilor electrice, metoda inversiunii, metoda funcţiunilor analitice şi a reprezentării conforme,etc.

Aplicaţie. Ca exemplu de aplicaţie a teoremei superpoziţiei determinăm cîmpul electrostatic care se stabileşte dacă se introduce o sferă izolantă de rază a, cu permitivitatea ε, într-un mediu cu permitivitatea ε_e, în care se găsea un cîmp electrostatic uniform, de intensitate E_0, dirijat în sensul axei Ox : $\bar{E}_0 = + \bar{i}E_0$ (fig.35 g,35 h).

Potenţialul electrostatic al cîmpului iniţial într-un punct P e deci $V = -\bar{E}\,x = -E_0 r\cos\alpha$, dacă r şi α sînt coordonatele polare ale punctului P, α fiind unghiul dintre raza vectoare OP şi axa Ox. Se verifică uşor că şi potenţialul

$$V_s = -B\,\frac{\cos\alpha}{r^2}$$

satisface ecuaţia lui Laplace adică e potenţialul unui cîmp electrostatic posibil.



g. h.

Fig. 35
Sferă izolantă în cîmpul electrostatic iniţial omogen.

Deci şi o sumă de tipul

$$V = \left(Ar - \frac{B}{r^2} \right) \cos\alpha$$

reprezintă potenţialul unui cîmp electrostatic, obţinut prin superpoziţia cîmpurilor cu potenţialele $V_i = Ar\cos$ şi V_e

Încercăm să rezolvăm problema cu următoarele două expresiuni ale potenţialului în interiorul , respectiv în exteriorul sferei de permitivitate ε_1:

$$V_1 = \left(A_1 r - \frac{B_1}{r^2} \right) \cos\alpha \; ; \; V_e = \left(A_e r - \frac{B_e}{r^2} \right) \cos\alpha$$

Acestea vor fi soluţia problemei, dacă satisface condiţiunile la limită. Condiţiunile la suprafaţa sferei sînt continuitatea componentei tangenţiale a intensităţii cîmpului electric şi a componentei normale (radiale) a inducţiei electrice:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial V_e}{\partial \alpha} \; ; \quad \varepsilon_i \frac{\partial V_i}{\partial r} \quad \varepsilon_e \frac{\partial V_e}{\partial r}$$

Mai trebuie satisfăcute condiţiunile ca potenţialul în interiorul sferei (adică şi în centrul ei) să fie finit, ceiace dă $B_1 = 0$, iar la infinit, pentru $\lim r \to \infty$ şi $\alpha = 0$ să se obţină $E = E_0$, ceiace dă $A_e = -E_0$. Din condiţiunile de mai sus se obţin pentru A_1 şi B_e valori cari introduse în încercările de soluţie, dau:

$$V_1 = -E_0 \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_e} r\cos\alpha \; ; \; V_e = -E_0 \left(r - \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\alpha$$

Intensitatea e deci uniformă în interiorul sferei:

$$E_i = \frac{\partial V_i}{\partial (r\cos\alpha)} = E_0 \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}$$

mai mare decît intensitatea iniţială E dacă $\varepsilon_1 < \varepsilon_e$, putînd fi cel mult $E_1 = 1{,}5\, E$ cînd $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_e$. În exterior, intensitatea cîmpului e maximă în axa care trece prin centrul sferei în direcţia cîmpului iniţial ($\alpha = 0$), la suprafaţa sferei, unde:

$$E_e = -\left(\frac{\partial V_e}{\partial r} \right)_{\substack{\alpha=0 \\ r=a}} = E_0 \frac{3\varepsilon_i}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}$$

putînd deveni cel mult $E_e = 3 E_0$ cînd $\varepsilon_i \gg \varepsilon_e$.

15.3. Teorema capacităţii electrice. Fie două conductoare omogene încărcate cu sarcini adevărate egale şi de nume contrare şi între ele dielectrici isotropi omogeni sau neomogeni cari au o permitivitate independentă de intensitatea cîmpului electric şi nu au polarizaţie electrică permanentă ($\bar{P}_p = 0$). In aceste condiţiuni cîtul C totdeauna pozitiv al sarcinii adevărate q_1 a unuia dintre conductoare prin diferenţa de potenţial $V_1 - V_2$ dintre el şi cel de al doilea, e independentă de diferenţa de potenţial şi de sarcină adică depinde numai de poziţia relativă şi de dimensiunile conductoarelor (dar nu şi de natura lor) şi de repartiţia în cîmp a permitivităţii dielectricilor. Cîtul caracterizează deci complect capacitatea sistemului format din cele două conductoare şi din dielectricul dintre ele de a primi sarcini adevărate cînd diferenţa de potenţial dintre cele două conductoare e egală cu unitatea, şi se numeşte capacitatea electrostatică a perechii de conductoare cari au între ele dielectricii daţi:

$$(60) \qquad C = \frac{q_1}{V_1 - V_2}$$

In adevăr, fie $V'(\bar{r})$ potenţialul cîmpului electrostatic corespunzător densităţilor de sarcină adevărată $\rho_v(\bar{r})$ pe conductoare, şi fie V'_1 şi V'_2 valorile lui $V(\bar{r})$ pe conductoarele 1 şi 2; Fie $V''(\bar{r})$ potenţialul corespunzător densităţilor $\rho''_v(\bar{r})$ pe aceste conductoare şi V''_1, V''_2 valorile lui $V''(\bar{r})$ pe conductoarele 1 şi 2 care are valorile V_1 şi V_2 pe cele două conductoare.

Presupunem $\rho''_v(\bar{r}) = K \rho'_v(r)$. In aceste condiţiuni, dacă $\rho'_v(\bar{r})$ satisface condiţiunile echilibrului electrostatic şi k este un număr întreg, şi $\rho''v(\bar{r})$ satisface aceste condiţiuni fiindcă cîmpul corespunzător se obţine prin suprapunere a k cîmpuri corespunzătoare lui $\rho'v(\bar{r})$ Dacă

$$q'_1 = \int_{v_1} \rho'_v(\bar{r})\, dv$$

e sarcina conductorului 1, de volum v_1 şi suprafaţă Σ_1 corespunzătoare densităţii $\rho'_v(r)$ adică şi corespunzătoare potenţialelor V'_1 şi V'_2 rezultă:

$$q''_1 = \int \rho''_v(\bar{r})\, dv = k \int \rho'_v(\bar{r})\, dv = kq'_1$$

pentru sarcina corespunzătoare densității $\rho''_v(\bar{r})$, adică și corespunzătoare potențialelor $V''(\bar{r}) = kV'(\bar{r})$ și deci potențialelor $V''_1 = kV'_1$ și $V''_2 = kV'_2$ ale celor două conductoare.

$$C'' = \frac{q''_1}{V''_1 - V''_2} = \frac{kq'_1}{kV'_1 - kV'_2} = C'$$

e deci independent de numărul k. Dacă numărul K nu e întreg dar rațional : $k = \frac{m}{n}$, se ia ca bază câmpul electrostatic corespunzător densității de sarcină $\rho'''_v(\bar{r}) = \frac{1}{n}\rho''_v(\bar{r})$ și se construiesc din acesta, prin n respectiv prin m suprapuneri, câmpurile $\rho''_v(r)$, respectiv $\rho'''_v(r)$, și se obține analog:

$$C'' = \frac{q''_1}{V''_1 - V''_2} = \frac{mq'''_1}{mV'''_1 - mV'''_2} = C''' = \frac{nq'''_1}{nV'''_1 - nV'''_2} = \frac{q'_1}{V'_1 - V'_2} = C'$$

Cazul unui număr k irațional se obține printr-o trecere la limită și deci teorema e valabilă în toate cazurile.

Exemplu. Capacitatea electrică a unui condensator plan care are între armăturile încărcate cu sarcini adevărate egale și de nume contrare un dielectric isotrop și omogen cu permitivitatea ε, se calculează din următoarea expresiune, analoagă cu aceia din cazul condensatorului în vid:

$$V_x = -\frac{x\rho_s}{\varepsilon} x$$

pentru potențialul electrostatic la distanța x de armătura care are densitatea superficială de sarcină ρ_s. Avem

$$V_1 = V(o) = 0, \quad V_2 = V(g) = -\frac{x\rho_s}{\varepsilon} g$$

pentru armăturile x = 0 și x = g, și

$$q_1 = \rho_s \cdot A$$

pentru sarcina adevărată a armăturii x = 0 care are aria A. Rezultă pentru capacitate expresiunea:

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\rho_s A}{x\rho_s g} = \frac{\varepsilon A}{x\varepsilon}$$

Comparînd cu expresiunea capacităţii aceloraşi armături presupuse situate în vid

$$C_o = \frac{\varepsilon_0 A}{X g}$$

rezultă:

$$\frac{C}{C_o} = \varepsilon_r,$$

adică raportul celor două capacităţi e egal cu permitivitatea relativă a dielectricului omogen şi isotrop dintre armături. Se poate arăta că această relaţie e valabilă oricare ar fi forma condensatorului. Permitivitatea relativa a unui dielectric isotrop şi omogen e deci un număr egal cu raportul în care creşte capacitatea unui condensator dacă se introduce dielectricul respectiv între armăturile lui, presupuse că s-au găsit la început în vid.

15.4. Teoremele capacităţilor echivalente.

Teoremele se referă la capacitatea unui condensator care, dacă i s-ar pune armăturile sub diferenţa de potenţial electric sub care se găsesc armăturile extreme ale unui sister de condensatoare, s-ar încărca cu acelaşi sarcina adevărată cu care se încarcă sistemul de condensatoare. Considerăm capacitatea echivalentă a n condensatoare legate în serie şi a n condensatoare legate în paralel, iar apoi considerăm un caz mai general care prezintă importanţă pentru liniile electrice de înaltă tensiune.

Fie n condensatoare legate în serie. Presupunem neglijabile capacităţile dintre armăturile cari aparţin unor condensatoare diferite. Numim capacitate echivalentă a lor cîtul dintre sarcina pozitivă a uneia dintre armăturile extreme şi diferenţa de potenţial dintre această armătură şi cealaltă armătură extremă. Fie C_e capacitatea echivalentă, U diferenţa de potenţial sub care stă sistemul de condensatoare şi q sarcina armăturii extreme încărcată pozitiv. Prin influenţă, sarcina adevărată q pe armătura 1, provoacă pe armătura 1' sarcina (-q) şi deci, în virtutea conservării sarcinii adevărate sarcina (+q) pe armătura 2, etc. Pe armătura n' se va influenţa deci sarcina (-q).

Fie $U_1 \ldots U_n$ diferenţele de potenţial dintre armăturile condensatoarelor 1,2... n. Ele satisfac relaţia

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

Conform definiţiei capacităţii:

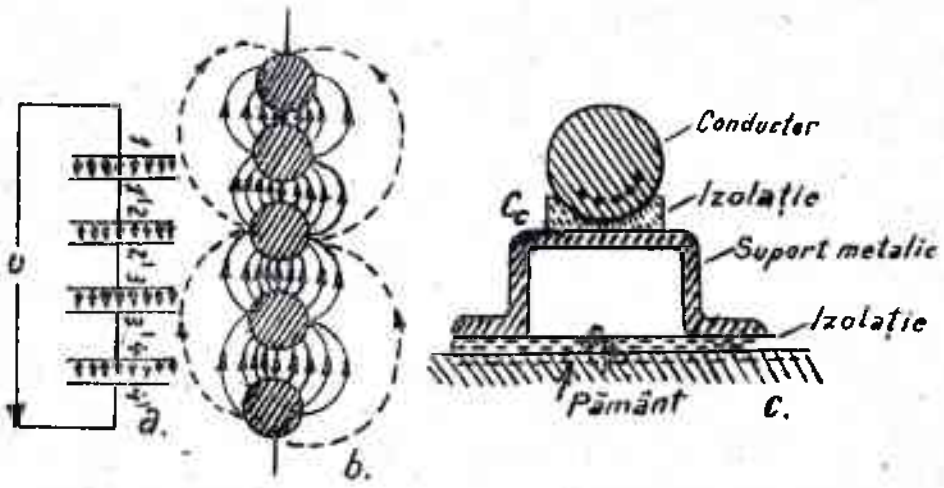


Fig. 36

Condensatoare electrice legate în serie.

$$C_s = \frac{q}{U} \quad ; \quad C_1 = \frac{q}{U_1}; \quad C_2 = \frac{q}{U_2} \quad ; \quad C_n = \frac{q}{U_n}$$

şi deci din prima relaţie

$$\frac{q}{C_s} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \ldots + \frac{q}{C_n}$$

adică:

$$(61) \qquad C_s = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}$$

Valoarea reciprocă a capacităţii a n condensatori în serie e deci egală cu suma valorilor reciproce ale capacităţilor condensatoarelor. Rezultă că valoarea capacităţii totale a lor e mai mică decît cea mai mică dintre capacităţile condensatoarelor. Din relaţiile $U_k = \frac{q}{C_k}$ mai rezultă că tensiunile mai înalte se repartizează pe condensatoare cari au capacitatea mai mică.

Un caz foarte frecvent de condensatoare în serie

e constituit de o conductă care se reazămă izolat pe un suport metalic, izolat şi el de pămîntul conductor(fig.36 c). In acest caz cîtul diferenţelor de potenţial U_p şi U_c dintre suport şi pămînt, respectiv suport şi conductă, e

$$\frac{U_p}{U_c} = \frac{C_c}{C_p} \text{ , unde}$$

C_p şi C_c sunt capacităţile respective ; Cu cît C_p e mai mic în raport cu C_c cu atît U_p e mai mare faţă de U_c. Suportul metalic al izolatorului unei conducte care are tensiunea U faţă de pămînt, are o tensiune faţă de pămînt U_p cu atît mai înaltă, cu cît e mai aproape de conductor (C_c mare) şi mai departe de pămînt (C_p mic). Atingerea unui astfel de suport poate fi deci periculoasă, dacă tensiunea U e destul de înaltă. De aceia suporţii metalici cari pot fi atinşi de personal se pun în legătură conductoare cu pămînt.

Relaţia de mai sus între capacităţi e valabilă numai cînd condensatoarele sînt complecte, cînd nu trec adică linii de cîmp direct între armături care aparţin unor condensatoare diferite. Ea nu e deci valabilă în cîmpul din fig.36 b.

In cazul a n condensatoare în paralel, fie q sarcina totală a armăturilor încărcate pozitiv şi U diferenţa de potenţial comună dintre armăturile condensatoarelor. Capacitatea lor echivalentă C_e este raportul dintre sarcina pozitivă totală şi diferenţa de potenţial.

Dacă $C_1, C_2, \ldots C_n$ sunt capacităţile condensatoarelor, avem:

$$C_1 = \frac{q_1}{U} \; ; \quad C_2 = \frac{q_2}{U} \; ; \quad C_3 = \frac{q_3}{U} \; ; \quad \ldots \; C_n = \frac{q_n}{U}$$

Fiindcă

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n,$$

unde $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ sînt sarcinile adevărate pozitive ale diferitelor condensatoare, rezultă:

$$C_e U = C_1 U + C_2 U + C_3 U + \ldots + C_n U$$

sau.

$$(62)\quad C_e = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$$

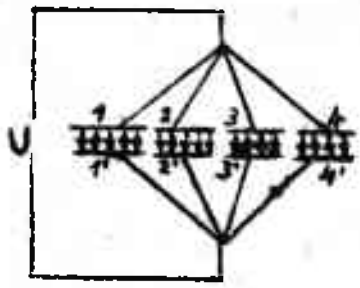


Fig. 37
Condensatoare electrice legate în paralel

Capacitatea echivalentă a n condensatoare legate în paralel e deci egală cu suma capacităţilor condensatoarelor, şi deci mai mare decît cea mai mare dintre aceste capacităţi. Relaţia e valabilă numai cînd condensatoarele sînt complete, cînd nu trec adică linii de cîmp direct între armături care aparţin unor condensatoare diferite.

Aplicaţie. Ca aplicaţie a teoremelor referitoare la condensatoarele legate în serie şi în paralel, determinăm repartiţia tensiunii pe elementele izolatoarelor catenare. Un izolator electric e un element de construcţie compus cel puţin în parte din solide izolante, care serveşte ca punct de rezemare sau de suspensie, pe un suport a unei conducte de linie electrică aeriană. Izolantul trebuie să reziste solicitării la rigiditate dielectrică, dată de tensiunea electrică dintre armăturile conductoare pe care le desparte şi între care există deci o anumită capacitate electrică. Pentru a izola tensiuni înalte, ar trebui să se folosească izolatoare mari, cu dimensiunile lineare aproximativ proporţionale cu tensiunea. Astfel ar fi însă nevoie de o greutate de izolant aproximativ proporţională cu puterea a treia a tensiunii de izolat. Pentru a se reduce această greutate, s-a încercat să se divizeze tensiunea, legînd în serie două izolatoare pentru tensiunea simplă. Aşteptările nu s-au realizat însă pe deplin, fiindcă tensiunea nu se repartizează în părţi egale pe elementele egale legate în serie, ale izolatoarelor catenare şi deci tensiunea izolabilă creşte mai puţin decît proporţional cu numărul de elemente. Prezintă deci interes studiul repartiţiei tensiunii pe elementele unui izolator catenar (fig 38)

Fie n numărul de elemente(Fig.38), numerotate

începînd cu elementul de lîngă braţul de suspensiune al suportului şi terminînd cu cel de lîngă conducta linie. Armăturile fiecărui element formează armăturile unui condensator de capacitate C; şi fiecare armătură are şi o capacitate c faţă de suportul metalic şi deci faţă de pămîntul care este în legătură conductoare cu suportul. Putem neglija, pentru simplificare, capacităţile armăturilor cari nu sînt vecine între ele şi faţă de conducta liniei. In aceste condiţiuni se poate determina repartiţia tensiunii pe elementele (condensatoarele) catenei din modelul indicat în figura 38.

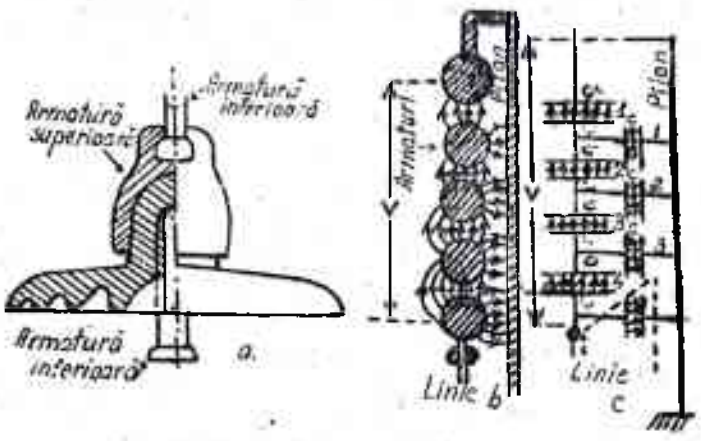


Fig.38

a.Element de izolator catenar, b.Model de lanţ de elemente de izolator catenar şi cîmpul său electrostatic. c.Model realizat din condensatoare.

Fie Q_k sarcina condensatorului k, de capacitate C, V_k şi $V_{(k-1)}$ tensiunile faţă de pămînt, sau faţă de suport, ale celor două armături ale lui, şi q_k sarcina condensatorului de capacitate c, dintre armătura de tensiune V_k şi suport. In fiecare moment sarcina condensatorului k e egală cu produsul capacităţii sale C prin tensiunea $(V_k - V_{(k-1)})$ dintre armături.

$$Q_k = C(V_k - V_{k-1})$$

şi analog

$$Q_{k+1} = C(V_{k+1} - V_k)$$

Sarcina totală a fiecărei armături fiind nulă în orice moment, fiindcă armăturile sînt izolate, rezultă diferenţa dintre sarcinile Q_{k+1} şi $Q_{(k)}$, care sînt reţinute respectiv de condensatoarele (k+1) şi k pe armătura k, trebuie să fie egală cu sarcina q_k de pe aceiaşi armătură,

reţinută de condensatorul dintre ea şi pilon, care e egală cu produsul capacităţii sale c prin tensiunea V_k dintre armătura k şi suport.

$$q_k = Q_{k+1} - Q_k = cV_k \qquad (1)$$

Inlocuind aici valorile de mai sus ale sarcinilor q_k şi $Q_{(k+1)}$ şi împărţind cu C obţinem:

$$\frac{c}{C} V_k = (V_{k+1} - V_k) - (V_k - V_{k-1})$$

Aceasta e o ecuaţie de diferenţe de ordinul al doilea, analoagă cu o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea, şi cu coeficienţi constanţi. Incercăm o soluţie de formă:

$$V_k = A \cdot e^{\alpha k}$$

şi determinăm constanta α aşa, încît ea să fie satisfăcută. Deducem

$$V_{k+1} = A \cdot e^{\alpha(k+1)} \; ; \quad V_{k-1} = A \cdot e^{\alpha(k-1)}$$

Inlocuind în ecuaţia cu diferenţe obţinem

$$\frac{c}{C} A e^{\alpha k} = A e^{\alpha(k+1)} - 2 A e^{\alpha k} + A e^{\alpha(k-1)}$$

Impartind cu 2 A $e^{\alpha k}$ şi extragînd radicalul

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{C}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^{\alpha} - 2 + e^{-\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})^2} = \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}$$

adică, notînd cu argsh funcţiunea inversă sinusului hiperbolic:

$$\alpha = 2 \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{C}}\right)$$

Pentru $c : C \leq 0{,}1$ putem folosi şi numai primul termen din desvoltarea în serie a sinusului hiperbolic, şi avem:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{c}{C}}$$

Daca notăm cu α valoarea pozitivă care rezultă de mai sus, obţinem soluţia

$$V_k = A_1 e^{\alpha k} + A_2 e^{-\alpha k}$$

unde A_1 şi A_2 sînt constante de integrare. Pentru a le

determină, observăm că tensiunea față de suport a armăturii zero e : $V_0 = 0$ și a armăturii n e egală cu tensiunea în serviciu a liniei : $V_n = U_s$ Punînd k = 0, obținem:

$$V_0 = A_1 + A_2 = 0;\ A_1 = -A_2\ ;\ V_k = 2A_1 \operatorname{sh}\alpha$$

Punînd k = n, obținem:

$$V_n = 2A_1 \operatorname{sh}\alpha n = U_s\ ;\quad A_1 = \frac{U_s}{2\operatorname{sh}\alpha n}\ ;\ V_k = U_s \frac{\operatorname{sh}\alpha k}{\operatorname{sh}\alpha n}$$

Pentru a avea tensiunile U_k repartizate pe diferite elemente ale izolatorului scriem:

$$U_k = V_k - V_{k-1} = U_s \frac{\operatorname{sh}\alpha k}{\operatorname{sh}\alpha n} - \frac{\operatorname{sh}\alpha(k-1)}{\operatorname{sh}\alpha n} = 2U_s \frac{\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}\alpha n} \operatorname{ch}\alpha\left(k-\frac{1}{2}\right)$$

unde ultima expresiune e obținută în virtutea formulei diferenței a două sinusuri hiperbolice:

$$\operatorname{sh}a - \operatorname{sh}b = 2\operatorname{sh}\frac{a-b}{2}\ \operatorname{ch}\frac{a+b}{2}$$

Tensiunea se repartizează deci neuniform pe elementele izolatorului catenar, tensiunea cea mai înaltă repartizîndu-se pe ultimul izolator, de lîngă conducta liniei adică pentru k = n.

Tensiunea se repartizează neuniform pe elementele izolatorului catenar fiindcă o parte din sarcinile armăturilor e reținută de capacitatea lor c față de pilon așa încît sarcinile condensatoarelor C scad cînd progresăm de la linie spre pilon și deci scade în aceeași măsură tensiunea lor. Figura 39 reprezintă relația pentru n = 10 și diferite valori ale raportului $\frac{c}{C}$. Se observă cît de mult sînt solicitate elementele de lîngă conducta liniei față de cele de lîngă suport.

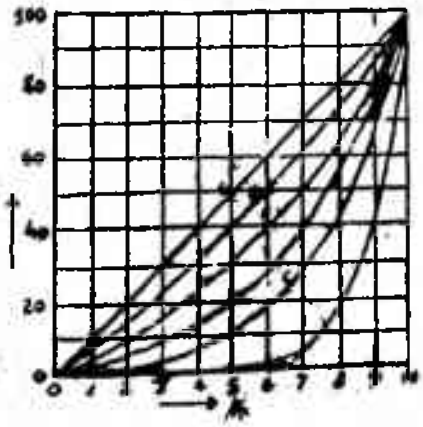


Fig. 39
Repartiția tensiunii electrice pe elementele unui izolator catenar.

Pentru a remedia acest neajuns, se poate monta, de exemplu, lîngă conducta liniei

n inel de gardă pentru ca armăturile condensatoarelor să
arbe- pe-lîngă capacitatea C şi pe lîngă capacitatea o faţă
de suport şi o capacitate sensibilă c' faţă de inel şi linie
(fig 40 a & b) Astfel se schimbă repartiţia tensiunii pe ele-
ment fiindcă şi capacităţile c' reţin sarcini care sînt de
numai contrare celor reţinute de capacităţile c; în adevăr dacă
e armatură a la tensiune mai înaltă decît suportul ea e în
acelaş moment de tensiune mai joasă decît linia - şi invers.
Dacă dispozitivul îmbunătăţeşte repartiţia tensiunii pe
elementele izolatorului. Noua repartiţie se poate obţine prin
un cal analog cu cel de mai sus, dacă presupunem capacităţile
K egale între ele

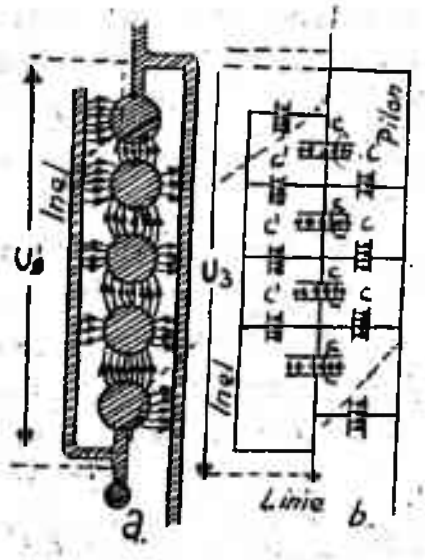


Fig 40

a Model de lanţ de ele-
mente de izolator cate-
nar şi cîmpul său elec-
tric b. Model realiza-
t din conductoare.

15.5. Teoremele lui Max-
well referitoare la capacităţile
electrostatice. Fie un cîmp elec-
trostatic complet, în dielectricul
fără sarcini adevărate, dintre n
conductoare omogene izolate încăr-
cate cu sarcinile adevărate $q_1, q_2 q_3$
$\ldots q_n$, a căror sumă e deci nulă

Fie V potenţialul electro-
static corespunzător sarcinilor
adevărate $q_1, q_2 \ldots q_n$ de sumă nulă
şi V_1, V_2 ... V_n valorile constan
te, corespunzătoare, ale potenţia
lelor celor n conductoare. Conform
teoremei superpoziţiei aplicată
problemelor fundamentale ale Elec-
trostaticii, rezultă că sarcinile
adevărate q_i sunt funcţiuni linea
re şi omogene de potenţialele V_k ale conductoarelor (v.59 a)

Dacă introducem în relaţia (59 a) $\gamma_{ik} = \int_{\Sigma_i} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial v_k}{\partial s_n} dA$

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} V_k \int_{\Sigma_i} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial v_k}{\partial s_n} dA,$$ notaţiile $\gamma_{ik} = \int_{\Sigma_i} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial v_k}{\partial s_n} dA$

pentru mărimile care depind numai de configuraţia geometrică
şi de permitivitate, obţinem deci din expresiunea (59 a) :

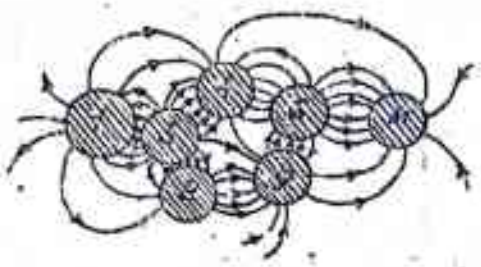


fig. 41
Sistem de n condensatoare și cîmpul lor electrostatic.

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \gamma_{11} V_1 + \gamma_{12} V_2 + \dots + \gamma_{1n} V_n \\
q_2 &= \gamma_{21} V_1 + \gamma_{22} V_2 + \dots + \gamma_{2n} V_n \\
&\vdots \\
q_n &= \gamma_{n1} V_1 + \gamma_{n2} V_2 + \dots + \gamma_{nn} V_n
\end{aligned}
\qquad (63)
$$

Mărimile γ_{ik} se numesc coeficienți de influență electrică și, în particular mărimile γ_{ii} se numesc coeficienți de capacitate electrică. Ele au în sistemul de unități MESC unitatea numită farad. – Mărimile γ_{ik} depind deci numai de dimensiunile conductoarelor, de poziția lor relativă și de permitivitățile dielectricilor din cîmp.

Cei n^2 coeficienți de influență γ_{ik} nu sînt toți independenți. In adevăr sarcinile adevărate depind numai de diferențele de potențial dintre conductoare, adică rămîn aceleași cînd se măresc cu aceeași valoare potențialele tuturor celor n conductoare. Aceasta nu e posibil decît dacă sînt satisfăcute relațiile

(63 a) $\gamma_{i1} + \gamma_{i2} + \dots + \gamma_{in} = 0 \; ; \; (i = 1, 2, \dots, n)$.

Condițiunea ca suma sarcinilor celor n conductoare să fie nulă, oricare ar fi valorile potențialelor, este

(63 b) $\gamma_{ik} + \gamma_{2k} + \dots + \gamma_{nk} = 0 \; ; \; (k = 1, 2, \dots, n)$.

Mărimile γ_{ik} mai satisfac următoarele relații de simetrie:

(63 c) $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$.

Aceste ultime relații se pot demonstra și direct. O demonstrație simplă va fi dată în capitolul referitor la energia cîmpurilor electrice.

Relațiile de simetrie $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ sînt identități pentru i=k și reprezintă deci C_n^2 – n ecuații, adică împreună cu (63a) și (63b), în total $C_n^2 + n = \frac{1}{2} n (n+1)$ ecuații,

Relații: $(C_n^2 - n) + n \cdot C_n$

Deci ecuații. indep. sînt $n^2 - C_n^2$

aşa încît numai $n^2 - \frac{1}{2} n (n+1) = \frac{1}{2} n (n-1)$ coeficienţi de influenţă sînt independenţi. Coeficienţii de capacitate γ_{ii} ai oricărui sistem de conductoare sînt pozitivi, şi toţi ceilalţi coeficienţi de influenţă sînt negativi. In adevăr, dacă se pun conductoarele sub potenţialul zero, afară de conductorul i, care e pus sub potenţialul pozitiv V_i, liniile cîmpului electric încep pe conductorul i şi se termină pe celelalte (n-1) conductoare, adică sarcina adevărată a conductorului e pozitivă şi sarcinile celelalte sînt negative. Relaţiile (63) devin

$$q_k = \gamma_{ki} V_i$$

fiindcă $V_i > 0$, $q_i > 0$ şi $q_k < 0$ pentru $k \neq i$, obţinem :

$$(63\,d) \quad \begin{cases} \gamma_{ii} > 0 ; \\ \gamma_{ik} < 0 . \qquad (i \neq k) \end{cases}$$

Conductorul are coeficientul de capacitate de un Farad, dacă se încarcă cu sarcina de un coulomb cînd e pus sub diferenţa de potenţial de un volt faţă de toate celelalte conductoare ale sistemului.

Fiindcă nu e practic să se calculeze cu valorile negative ale coeficienţilor de influenţă şi fiindcă numai diferenţele de potenţial intervin în fenomene, se foloseşte în aplicaţii o altă formă a relaţiilor (63). Relaţia (i) din (63) este

$$q_i = \gamma_{i1} V_1 + \gamma_{i2} V_2 + \dots + \gamma_{in} V_n$$

înmulţind relaţia (63 a) cu V_i şi notînd

$$c_{ik} = - \gamma_{ik} \quad (i \neq k)$$

se obţine

$$\gamma_{ii} V_i = (c_{i1} + c_{i2} \dots + c_{i,i-1} + c_{i,i-2} + c_{i,i+1} + \dots + c_{in}) V_i$$

Înlocuind această valoare a produsului $\gamma_{ii} V_i$ în relaţia de mai sus, se obţin pentru $i = 1,2,\dots,n$ relaţiile :

$$(64)\quad \begin{cases} q_1 = C_{12}(V_1-V_2)+C_{13}(V_1-V_2)+\ldots+C_{1n}(V_1-V_n) \ ; \\ q_2 = C_{21}(V_2-V_1)+C_{23}(V_2-V_3)+\ldots+C_{2n}(V_2-V_1) \ ; \\ \\ q_n = C_{n1}(V_n-V_1)+C_{n2}(V_n-V_2)+\ldots C_{nn-1}(V_n-V_{n-1}) \ . \end{cases}$$

Mărimile C_{ik} se numesc capacităţi parţiale, se măsoară în farazi şi sînt toate pozitive.

Relaţiile (63) şi (64) se numesc cea de a doua şi cea de a treia forma a ecuaţiilor de capacitate ale lui Maxwell.

Capacitatea parţială C_{ik} e egală cu sarcina care încarcă conductorul i cînd e pus sub unitatea de diferenţă de potenţial faţă de conductorul k, toate celelalte conductoare avînd potenţialul conductorului j.

Cînd se găsesc în cîmpul complect numai două conductoare ele constituie un condensator electric, formulele (64) devin

$$(64\ b)\quad \begin{aligned} q_1 &= C_{12}(V_1 - V_2) \\ q_2 &= C_{21}(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

capacitatea parţială $C_{12} = C_{21}$ e capacitatea electrică a condensatorului

Relaţiile (64) arată că sarcina q a unui conductor i al unui sistem de n conductoare e suma unor sarcini părţiale $C_{ik}(V_i - V_k)$ proporţionale cu diferenţele de potenţial $(V_i - V_k)$ dintre el şi celelalte conductoare ce şi cînd ar exista între el şi acele conductoare capacităţile $C_{ik}=C_{ki}$. Dacă s-ar lega între perechile care se pot forma cu n puncte care ar reprezenta conductoarele condensatoare care au capacităţile egale cu capacităţile parţiale C_{ik} şi s-ar stabili diferenţele de potenţial (V_i-V_k) între punctele perechilor (i,k) suma sarcinilor armăturilor de condensator legate la orice punct i e egală cu sarcina q_i a conductorului i din sistemul de conductoare. Între proprietăţile generale ale sistemului de conductoare echivalente şi ale cîmpului electrostatic ale sistemului de n conductoare există totuşi o deosebire esen

ţială. In sistemul de condensatoare, liniile de cîmp ale fluxului electric $\Psi_{ik} = \pi C_{ik}(V_i - V_k)$, corespunzător sarcinei „legale" între punctele i şi k trec direct între punctele i şi k (prin condensatorul dintre ele); în cîmpul electrostatic al sistemului de n conductoare, liniile de cîmp a părţii $\Psi_{ik} = \pi C_{ik}(V_i - V_k)$ din fluxul care pleacă de pe conductorul i nu trec direct între conductoarele i şi k. Analogia dintre cele două cazuri e numai o analogie globală.

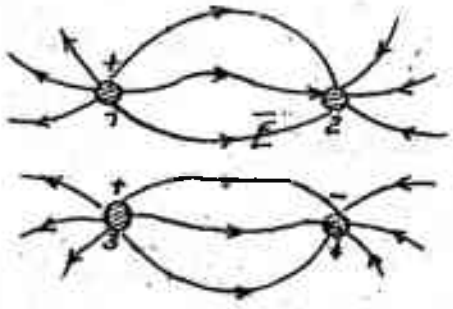


Fig.42
Liniile inducţiei electrice ale unui sistem de patru conducte rectilinii paralele.

Figura alăturată reprezintă cazul a patru conductoare într-un moment în care $V_1 = V_3$ şi $V_2 = V_4$. Deşi între conductoarele 2 şi 3 există diferenţa de potenţial $V_2 - V_3 = V_2 - V_1$, trec linii de inducţie electrică numai între conductoarele 2 şi 1, iar nu trece nici o linie între 2 şi 3. Dacă două conductoare au acelaşi potenţial, nu poate exista însă linii de inducţie directe între ele, nici în cîmp şi nici în modelul realizat de condensatoare.

La conductoarele date şi dielectric dat, forma liniilor de inducţie ale cîmpului electric e variabilă şi depinde de relaţiile dintre diferenţa de potenţial. Figura 43 de exemplu, reprezintă în secţiune liniile de inducţie pentru trei conducte cilindrice paralele şi paralele cu un plan conductor (linie trifazată şi cea mai înaltă pătură conducătoare a pămîntului). In prima figură $V_1 = V > 0$; $V_2 = V_3 = -\frac{V}{2}$; în cea de a doua figură $V_1 = -V_3 > 0$ şi $V_2 = 0$; în cea de a treia, $V_1 = V_2 > 0$ şi $V_3 = -2V$, iar în ultima $V_2 = -V_3 > 0$; $V_1 = 0$.

Dacă sarcinile adevărate ale conductoarelor unui sistem de n conductoare sînt conform relaţiei (63) funcţiuni lineare şi omogene de potenţiale conductoarelor şi potenţialele sînt funcţiuni lineare şi omogene de sarcini :

$$(65)\qquad \begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \ldots + p_{1n}q_n \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + \ldots + p_{2n}q_n \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n = p_{n1}q_1 + p_{n2}q_2 + \ldots + p_{nn}q_n \end{cases}$$

unde mărimile p_{ik} se numesc coeficienţii de potenţial ai sistemului de conductoare. Dacă notăm

$$(66\ a)\qquad p'_{ik} = p_{1k} - p_{ik}$$

şi scădem pe rînd membru cu membru, fiecare relaţie de mai sus din

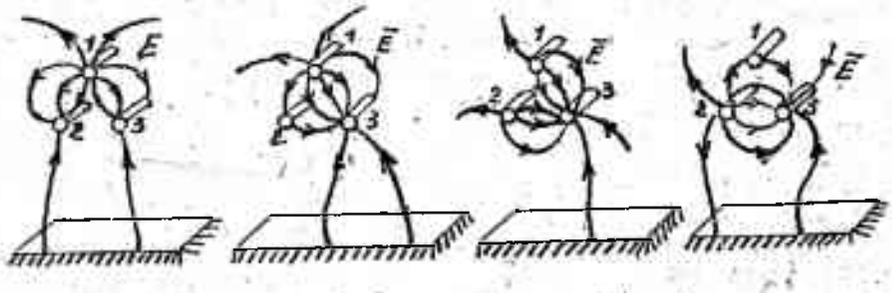


Fig.43

Cîmpul electric din jurul unei linii electrice aeriene trifazate.

prima dintre ele, obţinem următoarele (n-1) relaţii :

$$(66)\qquad \begin{cases} V_1 - V_2 = p'_{21}q_1 + p'_{22}q_2 + \ldots + p'_{2n}q_n \ ; \\ V_1 - V_3 = p'_{31}q_1 + p'_{32}q_2 + \ldots + p'_{3n}q_n \ ; \\ V_1 - V_n = p'_{n1}q_1 + p'_{n2}q_2 + \ldots + p'_{nn}q_n \ ; \end{cases}$$

în care intervin numai diferenţele de potenţial. Dacă adăugăm relaţia:

$$(66\ b)\qquad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 0$$

obţinem n relaţii din care putem calcula cele n sarcini adevărate q_k în funcţiune de cele (n-1) diferenţe de potenţial $(V_1 - V_k)$. Soluţia respectivă e reprezentată de relaţiile (64)

Relaţiile (66) se numesc prima formă a ecuaţiilor de capacitate ale lui Maxwell. Dacă se cunosc, pentru un sis-

ţială. In sistemul de condensatoare, liniile de cîmp ale fluxului electric $\Psi_{ik} = \pi C_{ik}(V_i - V_k)$, corespunzător sarcinei "legale" între punctele i şi k trec direct între punctele i şi k (prin condensatorul dintre ele); în cîmpul electrostatic al sistemului de n conductoare, liniile de cîmp a părţii $\Psi_{ik} = \pi C_{ik}(V_i - V_k)$ din fluxul care pleacă de pe conductorul i nu trec direct între conductoarele i şi k. Analogia dintre cele două cazuri e numai o analogie globală.

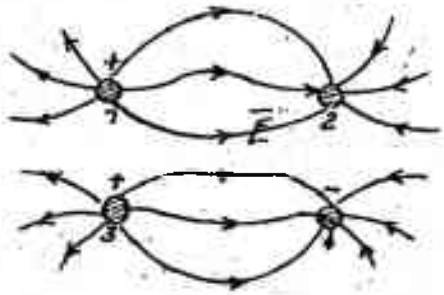


Fig.42
Liniile inducţiei electrice ale unui sistem de patru conducte rectilinii paralele.

Figura alăturată reprezintă cazul a patru conductoare într-un moment în care $V_1 = V_3$ şi $V_2 = V_4$. Deşi între conductoarele 2 şi 3 există diferenţa de potenţial $V_2 - V_3 = V_2 - V_1$, trec linii de inducţie electrică numai între conductoarele 2 şi 1, iar nu trece nici o linie între 2 şi 3. Dacă două conductoare au acelaşi potenţial, nu poate exista însă linii de inducţie directe între ele, nici în cîmp şi nici în modelul realizat de condensatoare.

La conductoarele date şi dielectric dat, forma liniilor de inducţie ale cîmpului electric e variabilă şi depinde de relaţiile dintre diferenţa de potenţial. Figura 43 de exemplu, reprezintă în secţiune liniile de inducţie pentru trei conducte cilindrice paralele şi paralele cu un plan conductor (linie trifazată şi cea mai înaltă pătură conducătoare a pămîntului). In prima figură $V_1 = V > 0$; $V_2 = V_3 = -\frac{V}{2}$; în cea de a doua figură $V_1 = -V_3 > 0$ şi $V_2 = 0$; în cea de a treia, $V_1 = V_2 > 0$ şi $V_3 = -2V$, iar în ultima $V_2 = -V_3 > 0$; $V_1 = 0$.

Dacă sarcinile adevărate ale conductoarelor unui sistem de n conductoare sînt conform relaţiei (63) funcţiuni lineare şi omogene de potenţiale conductoarelor şi potenţialele sînt funcţiuni lineare şi omogene de sarcini :

$$(65)\qquad \begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \ldots + p_{1n}q_n \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + \ldots + p_{2n}q_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n = p_{n1}q_1 + p_{n12}q_2 + \ldots + p_{nn}q_n \end{cases}$$

unde mărimile p_{ik} se numesc coeficienţii de potenţial ai sistemului de conductoare. Dacă notăm

$$(66\ a)\qquad p'_{ik} = p_{1k} - p_{ik}$$

şi scădem pe rînd membru cu membru, fiecare relaţie de mai sus din

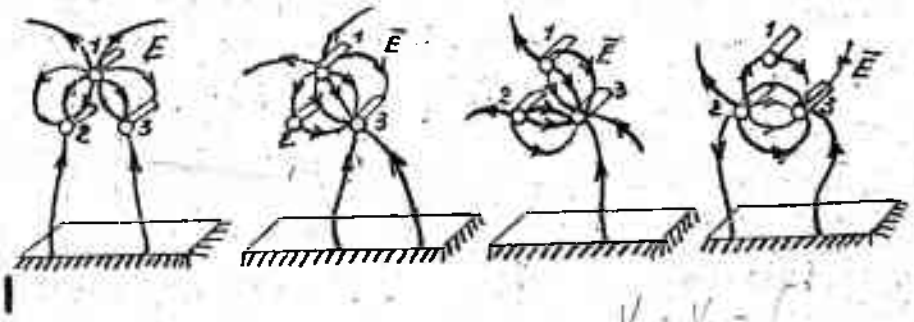


Fig.43

Cîmpul electric din jurul unei linii electrice aeriene trifazate.

prima dintre ele, obţinem următoarele (n-1) relaţii :

$$(66)\qquad \begin{cases} V_1 - V_2 = p'_{21}q_1 + p'_{22}q_2 + \ldots + p'_{2n}q_n \ ; \\ V_1 - V_3 = p'_{31}q_1 + p'_{32}q_2 + \ldots + p'_{3n}q_n \ ; \\ V_1 - V_n = p'_{n1}q_1 + p'_{n2}q_2 + \ldots + p'_{nn}q_n \ ; \end{cases}$$

în care intervin numai diferenţele de potenţial. Dacă adăugăm relaţia:

$$(66\ b)\qquad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 0$$

obţinem n relaţii din care putem calcula cele n sarcini adevărate q_k în funcţiune de cele (n-1) diferenţe de potenţial $(V_1 - V_k)$. Soluţia respectivă e reprezentată de relaţiile (64)

Relaţiile (66) se numesc prima formă a ecuaţiilor de capacitate ale lui Maxwell. Dacă se cunosc, pentru un sis-

ter de conductoare, mărimile C_{ik}, se pot calcula mărimile p'_{ik}, iar dacă se cunosc mărimile p'_{ik} se pot calcula mărimile C_{ik}.

Exemplu. Coeficienţii de influenţă şi capacităţile parţiale şi coeficienţii de potenţial a trei armături plane egale şi paralele, situate în vid (fig 44) Fie q_1, q_3 şi $q_2 = -q_1 = -q_3$ sarcinile adevărate ale armăturilor V_1 V_3 şi V_2 potenţialele lor şi $C_{12} = C_{21}, C_{13} = C_{31}$ $C_{23} = C_{31}$ capacităţile parţiale dintre ele. In cazul particular considerat perechile de armături 1,2 respectiv 2,3 formează cîte un condensator, iar între armăturile 1 şi 3 nu există linii de inducţie directe (dacă se neglijează efectul de margine), oricare ar fi diferenţa de potenţial dintre ele Fie

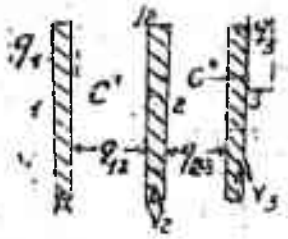


Fig.44
Sistem de trei plăci conductoare

$$C' = \frac{\varepsilon_A}{\pi g_{12}} \quad \text{şi} \quad C'' = \frac{\varepsilon_A}{\pi g_{23}}$$

capacităţile condensatoarelor dintre 1 şi 2 respectiv dintre 2 şi 3 Rezultă

$$q_1 = C' (V_1 - V_2)$$

$$q_3 = C'' (V_3 - V_2)$$

$$q_2 = -q_1 - q_3 = C' (V_2 - V_1) + C'' (V_2 - V_3).$$

Comparînd cu relaţia (63), deducem :

$$\gamma_{11} = C'; \quad -\gamma_{12} = C_{12} = C'; \quad \gamma_{13} = C_{13} = 0; \quad \gamma_{33} = C''$$

$$-\gamma_{31} = 0 = C_{31}; \quad \gamma_{32} = C_{32} = C''$$

$$\gamma_{22} = C' + C''; \quad \gamma_{21} = C_{21} = C'; \quad -\gamma_{23} = C_{23} = C''$$

Rezolvând ultimele ecuaţii în raport cu diferenţele de potenţial, se obţin ecuaţii din care rezultă coeficienţii de diferenţă de potenţial p'_{ik}. Se pot calcula simplu şi coeficienţii de potenţial.

Exemplu. Teoria generală a factorului de amplificare al tuburilor electronice. Considerăm sistemul de electrozi în vidul din balonul tubului (fig.45), cu un catod C, un anod A, şi m electrozi-grile $G_1, G_2, G_3 \ldots G_m$. Mărimea numită factorul de amplificare al tuburilor se calculează cu anumite aproximaţii în calculul cîmpului electric din tub. Tubul se înlocuieşte cu o diodă echivalentă, adică un tub fără grile avînd acelaşi catod şi cu anodul în suprafaţa ocupată de grile de comandă sau de control G_1 în tubul înlocuit şi se pune condiţiunea ca aceasta, pus sub o tensiune faţă de catod numită tensiunea echivalentă V_e a tubului electronic, să stabilească prin diodă un curent electric egal cu cel stabilit prin acţiunea combinată a tensiunilor grilelor V_G şi anodului V_a în tubul înlocuit. Tensiunile anodului şi grilei de comandă faţa de catod au o parte constantă şi partea alternativă (U_g) r

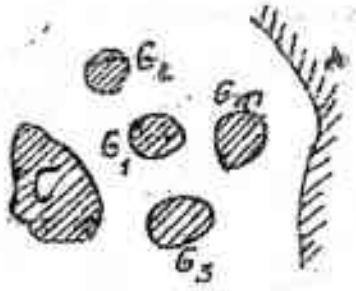


Fig.45
Sistem de electrozi de tub electronic

In aceste condiţiuni partea alternativă a tensiunii echivalente sau de comandă are o parte alternativă care e funcţiune liniară şi omogenă de U_g şi U_a

$$U_e = U_g + \frac{U_a}{\mu}$$

unde μ se numeşte factorul de amplificare al tubului electronic. Prima dintre aceste aproximaţii consistă în a calcula tensiunea echivalentă din condiţiunea ca ea, aplicată anodului de înlocuire a grilei de control din tub să influenţeze pe catodul diodei echivalente aceeaşi sarcină ca şi acţiunea combinată a tensiunilor grilelor şi anodului pe catodul tubului. Cînd se efectuează acest calcul, se neglijează şi influenţa sarcinii spaţiale din tub şi diodă şi deci trebuie rezolvată o problemă de Electrostatică

Fie-i sarcina influenţată pe catodul tubului e q_0

şi C_{1c}, C_{2c}, C_{3c},...C_{mc} şi C_{ac} sînt capacităţile parţiale dintre catod şi grilele G_1 G_2 G_3,...G_{n-i}, G_m, respectiv anod, la tensiunile V_g, V_{g2}, V_{g3},... V_{gm}, V_a. Faţă de catod relaţiile de capacitate ale lui Maxwell ne dau :

$$q_c = C_{1c}V_{g1} + C_{2c}V_{g2} + C_{3c}V_{g3} + \ldots + C_{mc}V_{gm} + C_{ac}V_a \qquad (a)$$

Dacă V_c este tensiunea echivalentă a tubului, adică tensiunea faţă de catod care e aplicată anodului diodei echivalente ce ar ocupa suprafaţa marcată în poliodă de grila de control (pe care o presupunem notată G_1), şi dacă C_{ac} e capacitatea dintre catod şi anodul diodei echivalente, se influenţează pe catodul ei aceeaşi sarcină q_c ca şi în tub, adică :

$$q_e = C_e \; V_e \qquad (b)$$

comparînd cu (a) şi punînd în primă aproximaţie $C_{ec} = C_{1c}$ obţinem :

$$V_e = V_{g1} + \frac{C_{2c}}{C_{1c}} V_{g2} + \frac{C_{3c}}{C_{1c}} V_{g3} + \ldots + \frac{C_{mc}}{C_{1c}} V_{gm} + \frac{C_{ac}}{C_{1c}} V_a \qquad (c)$$

Dacă notăm :

$$\frac{C_{1c}}{C_{2c}} = \mu_1 ; \quad \frac{C_{1c}}{C_{3c}} = \frac{C_{1c}}{C_{2c}} : \frac{C_{2c}}{C_{3c}} = \mu_1 \mu_2 ; \quad \frac{C_{1c}}{C_{mc}} = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m-1} ;$$

$$\frac{C_{1c}}{C_{ac}} = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m , \qquad (67\ a)$$

obţinem din (C) următoarea expresiune a tensiunii echivalente:

$$V_e = V_{g1} + \frac{V_{g2}}{\mu_1} + \frac{V_{g3}}{\mu_1 \mu_2} + \ldots + \frac{V_{gm}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{m-1}} + \frac{V_a}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m} \qquad (67\ b)$$

Dacă tensiunile grilelor sînt constante, afară de a grilei de control, care se presupune că are şi o parte alternativă ca şi cea anodică, se poate scrie :

$$v_c = V_c + u_e ; \quad v_{g1} = V_{g1} + u_g ; \quad v_{g2} = V_{g2} \ldots v_{gm} = V_{gm} ;$$

$$v_a = V_a + u_a \qquad (d)$$

Introducînd mai sus şi separînd părţile constante V de cele funcţiune de timp , se obţin următoarele două relaţii:

$$V_e = V_{g1} + \frac{V_{g2}}{\mu 1} + \frac{V_{g3}}{\mu 1 \mu 2} + \ldots + \frac{V_{gm}}{\mu 1 \mu 2 .. \mu_{m-1}} + \frac{V_a}{\mu 1 \mu 2 \ldots \mu_m} \qquad (e)$$

$$u_e = u_g + \frac{u_a}{\mu_1 \mu_2 .. \mu_m} \qquad (F)$$

Ultima relaţie arată că, în alternativ, factorul de amplificare al tubului cu m grile e egal cu factorul de amplificare al unei triode echivalente, care ar avea tensiunea echivalentă alternativă

$$\mu_e = \mu_g + \frac{\mu_a}{\mu}$$

unde μ e dat de relaţia

$$\mu = \mu_1 . \mu_2 . \mu_3 \ldots \mu_m \qquad (67)$$

Dacă

$$i = F (V_e)$$

e curentul prin dioda echivalentă, curentul prin tub va fi :

$$i = F \left[V_{g1} + \frac{V_{g2}}{\mu_1 \mu_2} + \ldots + \frac{V_{gm}}{\mu_1 \mu_2 \mu_{m-1}} + \frac{V_a}{\mu_1 \mu_2 .. \mu_m} \right]$$

15.6. <u>Capacităţile în serviciu</u>. Capacitatea în serviciu e o mărime care se foloseşte mai ales în studiul liniilor electrice (aeriene sau subterane). Liniile electrice funcţionează, de obicei, în unul din următoarele patru servicii, sau în condiţiuni echivalente cu suprapunerea unora din aceste servicii: Serviciul cu suma tensiunilor tuturor conductelor faţă de pămînt egală cu zero; serviciul cu toate conductele la aceeaşi tensiune faţă de pămînt; serviciul cu suma sarcinilor tuturor conductelor egală cu zero; serviciul cu aceeaşi sarcină pe fiecare conductă. Capacităţile în serviciul conductelor unei reţele se pot calcula pentru fiecare serviciu în parte, funcţiune de coeficienţii de potenţial sau de capaci-

tăţile parţiale.

Se numeşte capacitate în serviciu C_{sik} între două conductoare, într-un anumit serviciu al sistemului de conductoare cîtul sarcinii unuia dintre conductoare q_i prin diferenţa de potenţial $V_i - V_k$ dintre el şi cel de al doilea conductor, în serviciul considerat :

$$C_{sik} = \frac{q_i}{V_{is} - V_{ks}}$$

Pentru ca mărimea capacitate în serviciu să prezinte interes în studiul comportării unui sistem de conductoare, cum sînt conductele unei linii electrice, trebuie ca raportul prin care e definită această capacitate să fie independent de potenţialele celorlalte conductoare. Această condiţiune e satisfăcută, în general, numai cu anumite servicii particulare în care există anumite relaţii între potenţialele sau între sarcinile conductoarelor şi deci sistemul de conductoare prezintă anumite proprietăţi de simetrie. Numai în aceste cazuri se poate defini capacităţi în serviciu, constante. In cazul particular al unei linii electrice aeriene monofazate ale cărei conducte sînt izolate faţă de pămînt de exemplu sînt satisfăcute condiţiunile $q_1 = -q_2$ şi $q_0 = 0$ şi capacităţile în serviciu sînt constante, adică independente de tensiunile din tre conducte sau de tensiunea dintre conducte şi pămînt. Capacităţile în serviciu sînt egale cu capacităţile echivalente ale capacităţilor parţiale legate între cele două conductoare care au tensiune între ele, în serviciul respectiv. Cu notaţiile din figură se obţine deci

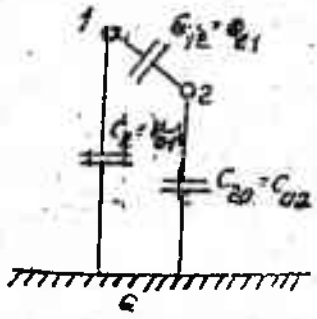


Fig.46

Figură pentru calculul capacităţilor în serviciu

$$(68)\quad C_{s12} = C_{12} + \frac{C_{1a}\,C_{2a}}{C_{1a} + C_{2a}} = C_{s20}$$

fiindcă între conductele 1 şi 2 sînt legate în paralel

capacitățile parțiale C_{12} și seria de capacități C_{10} și C_{20}. De asemenea, se obțin analog capacitățile în serviciu

$$(68\ a)\quad C_{s10} = C_{10} + \frac{C_{12}\,C_{20}}{C_{12}\quad C_{20}}\ ;\quad C_{s20} = C_{20} + \frac{C_{12}\cdot C_{20}}{C_{12} + C_{13}}$$

se obțin deci relațiile :

$$q_1 = C_{s12}(V_1 - V_2) = C_{s10}(V_1 - V_3);\ q_2 = C_{s21}\ (V_2 - V_1) =$$

$$= -\,q_1 = C_{s20}\ (V_2 - V_3)$$

din care se poate calcula diferența de potențial dintre fiecare conductă și pămînt, în funcțiune de diferența de potențial dintre cele două conducte.

15.7. Teorema ariilor corespondente. Sarcinile electrice adevărate ale celor două arii pe care un același tub de linii de inducție le determină pe două conducteare omogene în regim electrostatic, sînt egale și de nume contrare. In adevăr, fie A_1 și A_2 cele două arii și fie S suprafața laterală a tubului de linii de cîmp sau tubului de flux electric, determinată de liniile de inducție (fig.47). Suprafețele S_1, S_1 S_2 dintre care S_1 și S_2 se găsesc în cele două conductoare și se sprijină pe conturul ariilor A_1 și A_2, formează o suprafață închisă. Fluxul, prin această suprafață e nul; în adevăr inducția electrică e nulă în conductoare și deci fluxul e nul prin suprafețele S_1 și S_2; fluxul e nul și prin suprafața laterală a tubului de flux fiindcă componentele inducției electrice normale pe această suprafață sînt nule. Rezultă că suma sarcinilor electrice adevărate din interiorul suprafeței închise S_1, S_e, S_2 e nulă. Fiindcă sarcinile adevărate se găsesc numai la suprafața conductoarelor omogene (în regim electrostatic), adică numai pe ariile A_1 și A_2, rezultă că sarcinile acestor arii corespondente ale tu-

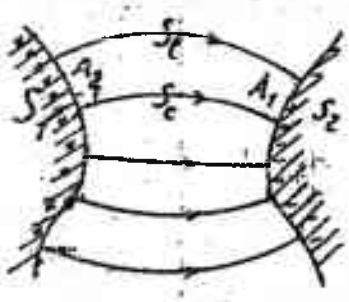


Fig.47

Figură pentru demonstrarea teoremei ariilor corespondente.

bului de forţă sînt egale şi de nume contrare. Teorema e valabilă pentru orice tub de flux electric, inclusiv pentru tuburile elementare.

15.8. Teorema energiei electrostatice. Presupunem că stabilim cum urmează sarcinile adevărate şi ne limităm la cazul $\bar{P}_p = C$: Mărim pretutindeni proporţional sarcinile, pînă la atingerea densităţii finale ρ. Fie F_ρ cu P subunitar situaţia într-un moment dat f fiind aceeaşi fracţiune pentru toate punctele din cîmp. Fie $d\rho$ ρdf surplusul de sarcină adus în cîmp în etapa corespunzătoare. Calculăm lucrul mecanic necesar pentru a aduce de la infinit sarcina $d^2\rho = d\rho dv = \rho df dv$ în elemenul de volum dv. Aducerea se face avînd în fiecare punct intensitatea $\bar{E}f$, dacă $\bar{E}$ este intensitatea finală. Practicăm un canal în care vectorul cîmp electric în vid este $\bar{E}$, f dacă $\bar{E}_v$ e vectorul cîmp electric în vid în canalul presupus practicat cînd cîmpul a ajuns în situaţia finală. Avem conform teoremei tensiunii electrice:

$$\int_c \bar{E}_v \, d\bar{r} = \int_c \bar{S} \, d\bar{r}$$

Mărimea lui ρ în toate punctele cîmpului cu $d\rho = \rho df$, se obţine efectuînd lucrul mecanic necesar pentru a aduce sarcina $\rho df dv$ de la infinit la punctul P:

$$dL = \int_v d^2L = \int_v \int_{p_\infty}^{p} d^2\bar{F}_i \, d\bar{r} = -\int_v d^2\bar{F}_p \, d\bar{r} = -\int_v \rho \, df \, dv \int_{p_\infty}^{p} \bar{E}_q \, d\bar{r} =$$

$$= -\int_v \rho f \, df \, dv \int_{p_\infty}^{p} \bar{E} \, d\bar{r} = \int \rho f \, df \, dv \cdot V$$

Energia cîmpului se obţine integrînd între limitele f = 0 şi f = 1

$$W_e = \int_{f=0}^{1} f df \int \rho V dv = \frac{1}{2} \int \rho V dv, \qquad (69)$$

Ca şi în cazul cîmpurilor coulombiene în vid. Pentru energia unui condensator se obţine deci din nou o expresiune ca (23 a).

Folosim formula $\operatorname{div}(V\bar{D}) = V \operatorname{div} \bar{D} + \bar{D} \operatorname{grad} V =$
$= V\rho V - \bar{D}\bar{E}$ şi transformăm într-o altă integrală de volum:

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho V dv = \int \frac{\bar{D}\bar{E}}{2} dv + \int_v \frac{\operatorname{div}(V\bar{D}) dv}{2} = \int \frac{\bar{D}\bar{E}}{2} dv + \int_\Sigma \frac{V\bar{D}d\bar{A}}{2}$$

Alegînd suprafaţa închisă Σ de forma sferică şi făcînd ca

raza sferei Σ să tindă către infinit V tinde ca $\frac{1}{R}$ către zero, iar D ca $\frac{1}{R^2}$, pe cînd $\int dA$ tinde numai ca R^2 către infinit, aşa încît ultima integrală e nulă, şi deci obţinem următoarea expresiune importantă a energiei electrostatice:

$$W_e = \int \frac{\bar{D}\bar{E}}{2\varkappa} dv \qquad (7o)$$

Fie W_2 energia electrică a cîmpului electrostatic $\bar{E}\bar{D}$ a unei repartiţii date de sarcini adevărate şi W'_e e energia electrică a oricărui cîmp neelectrostatic $\bar{E}'$, $\bar{D}'$ cu aceeaşi repartiţie a sarcinilor adevărate în dielectrici şi cu aceeaşi sarcină adevărată totală pe fiecare din conductoarele din cîmp. In aceste condiţiuni, energia corespunzătoare cîmpului electrostatic este mai mică decît energia corespunzătoare oricăruia din cîmpurile $\bar{E}$; $\bar{D}$! In adevăr dacă $\bar{E}''$ şi D'' este cîmpul electric care are intensitatea şi inducţiile respectiv egale cu diferenţa dintre intensităţile şi inducţiile cîmpurilor electrice $\bar{E}'\bar{D}'$ şi $\bar{E},\bar{D}$ adică dacă $\bar{E}''= \bar{E}'-\bar{E}$; $\bar{D}'' = \bar{D}' - \bar{D}$ energia corespunzătoare cîmpului $\bar{E}'$, $\bar{D}'$ este:

$$W'_e=\int \frac{(\bar{E}+\bar{E}'')(\bar{D}+\bar{D}'')}{2\varkappa} dv = \int \frac{\bar{E}\bar{D} + \bar{E}''\bar{D}''}{2\varkappa} dv + \int \frac{\bar{E}\bar{D}''+\bar{E}''\bar{D}}{2\varkappa} dv = W_2+W''_2 + \int \frac{2\, ED''}{2\varkappa} dv$$

adică W''_e este energia corespunzătoare cîmpului $\bar{E}'',\bar{D}''$, în mod necesar pozitivă, fiindcă $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$. Ultima integrală este însă nulă. In adevăr intensitatea cîmpului electrostatic derivă dintr-un potenţial scalar $\bar{E} = -$ grad V, iar $\bar{D}''$ este un cîmp de vectori a cărui divergenţă e nulă în dielectrici div $\bar{D}'' = 0$, fiindcă $\bar{E}'\bar{D}'$ corespunde aceleeaşi repartiţii în dielectrici a sarcinii adevărate ca şi $\bar{E},\bar{D}$. Deci:

$$W'_e = W_e + W''_e - \frac{1}{\varkappa}\int \bar{D}''\text{grad } V\, dv = W_e + W''_e + \frac{1}{\varkappa}\int V \text{div}\bar{D}''dv - \frac{1}{\varkappa}\int \text{div}(V\bar{D}'')dv = W_e + W''_e - \frac{1}{\varkappa}\int V\bar{D}''\, dA$$

Transformarea din ultimii doi membri e valabilă numai în domeniile în care V şi $\bar{D}''$ variază continuu.

De aceea trebuie ca suprafeţele de discontinuitate ale cîmpu-ce lui care separă dielectricii sau dielectricii de conductoare să fie contate în ultima integrală în frontiera domeniului de continuitate a cîmpului electric şi anume fiecare suprafaţă de două ori, pentru cele două feţe din spre mediile pe care le separă. Fiindcă divergenţa de suprafaţă $D''_{n1} + D''_{n2}$ a vectorului D'' este nulă în dielectrici, suprafeţele de separaţie ale dielectricilor dau o contribuţie nulă în ultima integrală. Fiindcă D'' e nul în conductoare rămîne numai integrala referitoare la feţele din spre dielectrici ale suprafeţelor de separaţie dintre conductoare şi dielectrici, şi anume cu semnul schimbat, pentru ca D'' să fie contat pozitiv cînd D'' e dirijat spre interiorul dielectricilor; în aceste integrale, V_i e constant pentru fiecare suprafaţă de conductor în parte. Suprafaţa de la infinit dă, de asemenea, o contribuţie nulă în ultima integrală. Se obţine astfel:

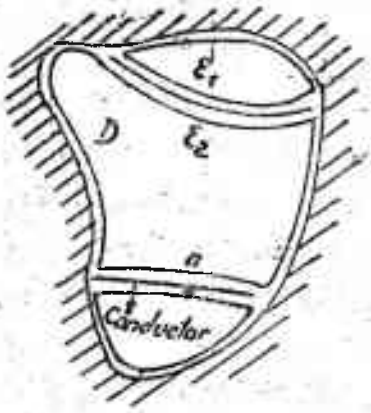


Fig.48

Figură pentru demonstrarea teoremei minimului de energie a cîmpului electrostatic.

$$W'_e = W_e + W''_e - \sum_i \frac{V_i}{\kappa} \int \bar{D}'' \, d\bar{A} =$$

$$= W_e + W''_e - \sum_i \frac{V_i}{\kappa} \int_{\Sigma} \operatorname{div}_e \bar{D}'' \, dA = W_e + W''_e$$

fiindcă integralele de suprafaţă ale divergenţei de suprafaţă a inducţiei $\bar{D}'' = \bar{D}' - \bar{D}$ sînt nule pentru suprafeţele conductoarelor, fiindcă inducţiile $\bar{D}'$ şi $\bar{D}$ corespund aceloraşi sarcini totale adevărate pe conductoare. Fiindcă W''_e este pozitiv, rezultă $W_e < W'_e$, adică : Energia W_e care corespunde cîmpului electrostatic, reprezintă minimul energiilor corespunzătoare cîmpurilor electrice compatibile cu o aceeaşi repartiţie a sarcinilor electrice adevărate în dielectrici şi cu aceleaşi sarcini adevărate pe toate conductoarele de cîmp.

Aplicaţie. Demonstrăm că între coeficienţii de influenţă electrică ai unui sistem de n conductoare există

relaţiile de simetrie

$$\gamma_{em} = \gamma_{me} \qquad (63\ c)$$

Transformăm expresiunea energiei electrostatice a sistemului ţinînd seama de a doua formă a ecuaţiilor de capacitate ale lui Maxwell

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \cdot V_k$$

Obţinem

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} V_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} V_i V_k$$

Derivînd energia W în raport cu $V_k = V_l$ şi $V_i = V_m$ obţinem

$$\frac{\partial W_e}{\partial V_l} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} V_i \quad \text{şi analog} \quad \frac{\partial W_e}{\partial V_m} = \frac{1}{2} \sum \gamma_{km} V_k$$

Prin cîte o nouă derivare rezultă

$$\frac{\partial^2 W_e}{\partial V_l \partial V_m} = \frac{1}{2} \gamma_{ml} ; \qquad \frac{\partial^2 W_e}{\partial V_m \partial V_l} = \frac{1}{2} \gamma_{lm}$$

Fiindcă rezultatul nu depinde de ordinea în care se derivă, rezultă $\gamma_{lm} = \gamma_{ml}$.

Aplicaţie. Repartiţia energiei electrice pe n condensatoare. Fie $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ capacităţile condensatoarelor în serie şi $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ sarcinile armăturilor lor. Armăturile i, i' fiind izolate, avem :

$$q_1 = q'_1 = q_2 = -q'_2 = \ldots = q_n = -q'_n = q$$

Energia celor n condensatoare e :

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2} + \ldots + \frac{1}{2} \frac{q_n^2}{C_n} = \frac{q^2}{2} \frac{1}{C_1} + \frac{q^2}{2} \frac{1}{C_2} \ldots \frac{q^2}{2} C_n$$

Fiindcă q e acelaşi pentru toate condensatoarele, urmează că energia se repartizează pe condensatoarele în serie în raport invers cu capacităţile lor.

In cazul condensatoarelor în derivaţie:

$$W = \frac{1}{2} U_1 q_1 + \frac{1}{2} U_2 q_2 = \frac{1}{2} U_3 q_3 + \ldots + \frac{1}{2} U_n q_n$$

sau cum $q_k = C_k U$:

$$W = \frac{1}{2} C_1 U + \frac{1}{2} C_2 U + \ldots + \frac{1}{2} C_n U$$

Deducem că, la condensatoarele în paralel, energia se repartizează pe condensatoare proporţional cu capacităţile lor, fiindcă diferenţele de potenţial U dintre armăturile lor sînt egale.

15.9. Teoremele forţelor generalizate. Pentru a determina univoc poziţia unui solid, e nevoie să se indice în general, un anumit număr de mărimi scalare. Acest număr se numeşte numărul de grade de libertate al solidului. Pentru a indica de exemplu univoc poziţia unui punct material e nevoie de indicarea celor trei coordonate ale lui (de ex. x,y,z), şi deci punctul material are trei grade de libertate. Pentru a indica univoc poziţia unui solid liber, e nevoie de exemplu de cele trei coordonate ale centrului său de greutate, şi de indicarea direcţiilor a două drepte ale solidului; indicarea direcţiei uneia din drepte se poate face prin indicarea a două unghiuri pe care le formează cu două din axele unui sistem de coordonate, iar indicarea direcţiei celeilalte drepte, care formează un unghiu cunoscut cu prima dreaptă nu mai reclamă decît indicarea unui singur unghiu, pe care-l formează cu una din axele sistemului de coordonate; solidul liber are deci şase grade de libertate (trei coordonate şi trei unghiuri). Dacă solidul poate culisa pe o axă fixă şi se poate roti în jurul ei, el are numai două grade de libertate: unul pentru poziţia pe dreaptă a unui punct dat al solidului şi unul pentru unghiul de rotaţie în jurul dreptei. Dacă solidul poate numai să se rotească în jurul unei axe fixe, el are un singur grad de liberate, iar dacă se poate roti în jurul unui punct fix, ca într-o articulaţie cardanică, el are trei grade de libertate.

Dacă avem deci un sistem de solide, cum sînt conductoarele dintr-un cîmp electrostatic, vom avea nevoie de indicarea valorilor atîtor mărimi scalare, cît e suma numerelor de grade de libertate ale acelor solide. Pentru un sistem dat, aceste mărimi scalare pot fi coordonate cartesiene unghiuri, etc. sau în parte coordonate cartesiene şi în parte unghiuri, etc. Aceste mărimi se numesc coordonatele generalizate ale sistemului. Fie deci ξ_1 cele n coordonate generalizate ale sistemului de conductoare. Cînd acestea variază cu $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \ldots \delta\xi_n$, fiindcă se variază poziţia sistemului de conductoare forţele şi momentele cari se exercită asupra conductoarelor efactuează un anumit lucru mecanic δL. Dacă una din coordonatele generalizate e o deplasare, de ex. $\delta\xi_i$, şi dacă F_i e proiecţia pe $\delta\xi_i$ a forţei care se exercită asupra punctului care se deplasează cu $\delta\xi_i$, lucrul mecanic corespunzător e $\delta L_i = F_i \delta\xi_i$. Dacă $\delta\xi_k$ este un unghiu şi M_k e componenta corespunzătoare a momentului forţelor, lucrul mecanic corespunzător e $dL_k = M_k \delta\xi_k$. In general dacă

$$(a) \quad \delta L = X_1 \delta\xi_1 + X_2 \delta\xi_2 + \ldots + X_s \delta\xi_s$$

este lucrul mecanic elementar, care se efectuează asupra sistemului cînd coordonatele generalizate variază cu $d\xi_1, d\xi_2, \ldots d\xi_s$, mărimile $X_1, X_2 \ldots X_s$ care pot depinde de coordonatele generalizate şi de timp, se numesc forţele generalizate cari se exercită asupra sistemului de puncte materiale. Dacă ξ_i este o coordonată cartesiană, forţa generalizată X_i este deci componenta cartesiană corespunzătoare unei forţe care se exercită asupra sistemului de puncte materiale; dacă ξ_k este un unghiu, forţa generalizată este componenţa unui moment static după axa de rotaţie corespunzătoare unghiului ξ_k, etc.

Dacă $\xi_i (i = 1,2 \ldots s)$ sunt deci coordonatele generalizate cari determină complect configuraţia sistemului de n conductoare cari se găsesc într-un cîmp electrostatic, şi dacă $X_i (i = 1,2 \ldots s)$ sînt forţele generalizate care se exercită asupra lor, la o deplasare virtuală (foarte încetă)

se efectuează lucrul mecanic elementar (a) care este egal cu scăderea corespunzătoare a energiei electrice W_e a cîmpului electrostatic, presupus izolat:

$$\sum_{i=1}^{s} X_i \delta \xi_i = - \delta W_e$$

unde W_e are una din expresiunile echivalente:

$$(69\ b)\quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} q_\ell V_\ell = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, q_{a\ell}\, q_{ak} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik} V_\ell\, V_k$$

Pentru calculul variaţiei energiei, deplasarea virtuală trebuie să fie efectnată la sarcini adevărate ale conductoarelor menţinute constante (izolînd conductoarele), pentru ca sistemul să nu primească energie din exterior şi să nu cedeze energie. In acest caz:

$$\sum_{1=1}^{s} X_i\, \delta \xi_i = - \delta\, (W_e)_q = - \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial We}{\partial \xi_i} \right)_q \cdot \delta \xi_i -$$

adică, fiindcă variaţiile $\partial \xi_i$ sînt arbitrare.

$$(71)\quad X_i = - \left(\frac{\partial We}{\partial \xi_i} \right)_q \quad (i = 1,2 \ldots s)$$

unde indicele q arată că derivatele parţiale se calculează menţinînd constante sarcinile adevărate ale conductoarelor (prima teoremă a forţelor generalizate). Forţele generalizate sau lagrangiene tind deci să mişte astfel conductoarele, încît la sarcini adevărate constante, energia cîmpului electrostatic să descrească.

Expresiunea forţelor generalizate se poate obţine şi efectuînd o deplasare virtuală menţinînd constante potenţialele conductoarelor. Fie $V' = V + \delta V_q$ potenţialele după deplasarea la sarcini constante $q' = q$ şi $q'' = q + \delta q$ sarcinile după deplasarea la potenţiale constante $V'' = V$.

$V'' = V$

Fiindcă potenţialele sînt funcţiuni liniare şi omogene de sarcini, rezultă din teoremele lui Maxwell referitoare la capacităţile electrostatice relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} q'_k V''_k = \sum_{k=1}^{n} q''_k V'_k$$

şi deci, în cazul considerat:

$$\sum_{k=1}^{n} q_k V_k = \sum_{k=1}^{n} (q_k + \delta q_{kv})\ (V_k + \delta V_{kq})$$

adică

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} q_k \delta V_{kq} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} V_k \delta q_{kv}$$

dacă variaţiile δV_{kq} şi δq_{kv} tind către zero.

Prima sumă reprezintă variaţia $\delta_q W_e$ a energiei la sarcini adevărate constante, iar a doua reprezintă variaţia căutată $\delta_v W_e$ a energiei la potenţiale constante, şi deci

$$\left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_i} \right)_q = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_i} \right)_v$$

Din expresiunea forţelor lagrangiene se obţine deci:

$$(72) \qquad X_i = \left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_i} \right)_v ,$$

unde indicele V arată că derivatele parţiale se calculează menţinînd constante potenţialele conductoarelor (cea de a doua teoremă a forţelor generalizate). Forţele generalizate lagrangiene tind deci să mişte astfel conductoarele, încît la potenţialele constante, energia electrică a cîmpului electrostatic să crească.

Avantajul teoremelor forţelor lagrangiene constă şi în faptul că dau pentru aceste forţe expresiuni ce constituie de obicei, aproximaţii mai bune decît aproximaţiile cîmpurilor folosite pentru calculul energiei electrice.

Aplicaţie. Calculăm forţa cu care e atras, paralel cu armăturile dreptunghiulare ale unui condensator plan

un paralelipiped de dielectric cu permitivitatea relativă ε_r, care are grosimea egală cu distanţa g între armături şi ocupă într-o direcţie, numai parţial locul de sub ele (fig.49 a)

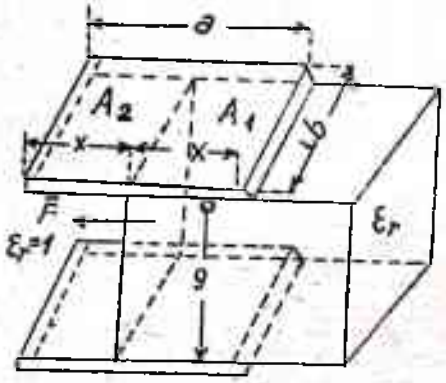


Fig. 49 a

Forţa care se exercită asupra dielectricului într-un condensator plan

Fie b lăţimea plăcilor, ocupată în întregime de paralelipipedul de dielectric, x partea din lungimea lor a ocupată de el, şi a- x partea ocupată de aer (sau de vid). In această situaţie, capacitatea condensatorului e egală cu capacitatea echivalentă a două condensatoare plane cu distanţa g între armături, legate în paralel, dintre cari unul are aria plăcilor b(a-x) şi permitivitatea $\varepsilon\varepsilon_r = \varepsilon_o$, iar cel de al doilea are aria plăcilor bx şi permitivitatea $\varepsilon_o\varepsilon_r$ a dielectricului dintre armături.

Deci:

$$C = \frac{\varepsilon_o b(a-x)}{\varkappa g} + \frac{\varepsilon_o\varepsilon_r bx}{\varkappa g}$$

Forţa se calculează luînd derivata cu semn schimbat a energiei electrice a condensatorului în raport cu x, la sarcini q şi - q constante pe armături:

$$F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\varepsilon_o\frac{b(a-x)+\varepsilon_r bx}{\varkappa g}\right] = \frac{q^2}{2C^2}b\frac{\varepsilon_o(r-1)}{\varkappa g} =$$

$$= \frac{U^2}{2}b\frac{\varepsilon_o(\varepsilon_r-1)}{\varkappa g}$$

Aplicaţie. Calculăm forţa de atracţiune între armăturile unui electrometru cu armături cilindrice coaxiale, de raze R_i şi R_e şi avînd între ele un dielectric (aer) cu permitivitatea ε_r (ε_r = 1). Fie x adîncimea pînă la care se găseşte cilindrul interior în cilindrul exterior. In această situaţie capacitatea condensatorului cilindric al electrome-

trului e

$$C = \frac{2\pi}{\varkappa} \quad \frac{\varepsilon_x}{\ell n \frac{R_e}{R_i}}$$

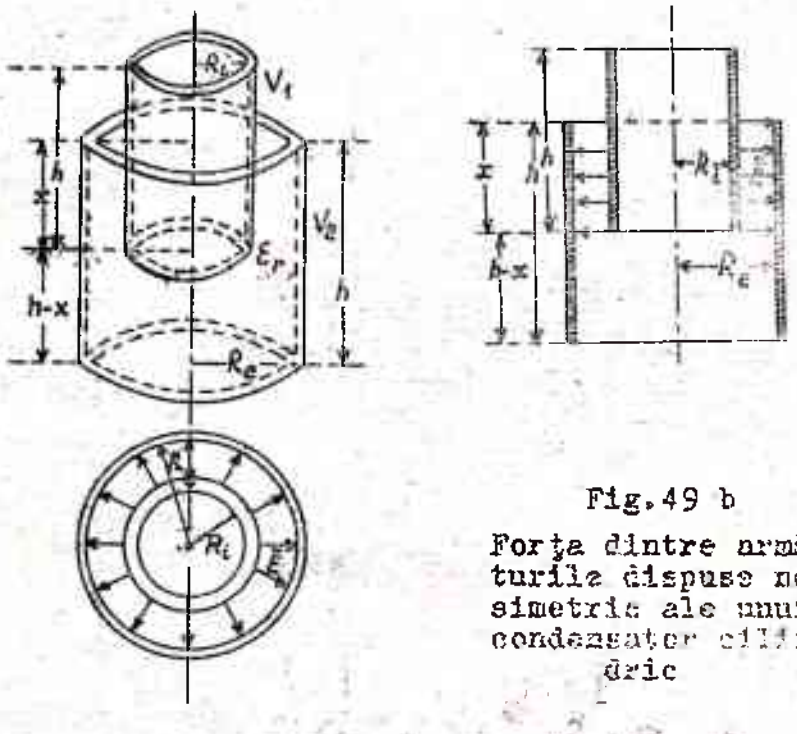


Fig.49 b

Forţa dintre armăturile dispuse nesimetric ale unui condensator cilindric

Aplicînd cea de a doua formă a teoremei forţelor lagrangiene, obţinem pentru forţa axială verticală, care se exercită în jos asupra cilindrului interior şi în sus asupra cilindrului exterior:

$$F = \frac{U^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} =$$

$$= \frac{U^2}{2C^2} \frac{2\pi}{\varkappa} \frac{\varepsilon}{\ell n \frac{R_e}{R_i}} = \frac{U^2}{2C^2} \frac{2\pi}{\varkappa} \frac{\varepsilon}{\ell n \frac{R_e}{R_i}}$$

In aceste două exemple rezultă deci expresiuni ale forţelor lengrangiene aplicabile în calcule deşi energia electrică a fost calculată cu capacitatea dedusă neglijînd efectul de margine, adică neglijînd componentele cîmpului electric care ar putea da forţele de calculat.

15.1o. Presiunea electrostatică. In vid, în imediata apropiere a suprafeţei unui conductor omogen şi în regim electrostatic, intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$ e normală pe suprafaţă şi proporţională cu densitatea superficială locală a sarcinii electrice adevărate pe conductor (v.formula 12 a):

$$(12\ a) \qquad E_v = \frac{\varkappa}{\varepsilon_o} \rho_s$$

Densitatea de energie corespunzătoare e deci:

$$W_e = \frac{\varepsilon_o E_v^2}{2\varkappa} = \frac{\varkappa}{2\varepsilon_o} \rho_s^2 = \frac{1}{2} \rho_s E_v$$

Forţa dF_i care se exercită asupra elementului de arie dA al suprafeţei conductorului se obţine egalînd lucrul mecanic elementar $dF_i \, \delta s_i$ pe care-l efectuează cînd elementul de arie dA e deplasat cu δs_i, cu scăderea corespunzătoare $w_e dv = w_e \, dA \, \delta s_i \cos \alpha$ a energiei, unde α e unghiul dintre δs_i şi normala pe dA, fiindcă în restul cîmpului w_e rămîne neschimbat (fig.15 1):

$$dF_i \, \delta s_i = w_e \, dA \, \delta s_i \cos \alpha$$

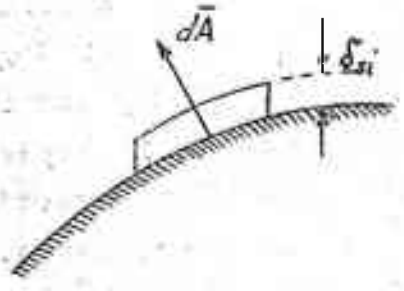


Fig.15 1

Fiindcă δs_i e arbitrar, rezultă

$$dF_i = w_e dA \cos \alpha = \frac{1}{2} \int_s E_v \, dA \cos \alpha$$

Rezultă că dF_i e maxim cînd $\alpha = 0$, adică forţa e normală pe elementul de arie dA şi că e dirijată dinspre corp spre vid, oricare ar fi semnul densităţii locale de sarcină adevărată. Forţa tinde deci să mărească volumul conductorului asupra căruia se exercită.

Limita cîtului dintre forţa normală $dF_n = \frac{1}{2} \int_s E_v dA$ şi elementul de arie corespunzător, adică forţa raportată la unitatea de arie, se numeşte presiune electrostatică. Ea are expresiunea

$$p = \frac{dFn}{dA} = \frac{1}{2} \int_s E_v = \frac{\varepsilon_0}{2K} \int_s^2$$

adică e proporţională cu pătratul densităţii locale de sarcină electrică.

15.11. <u>Teoreme densităţii de volum a forţei în cîmpul electrostatic</u>. Densitatea de volum $\bar{f}$ a forţei care se exercită în cîmpul electrostatic asupra materiei se calculează după metoda următoare din expresiunea energiei electrice: Lucrul mecanic virtual, efectuat din densitatea de forţă la o deplasare virtuală foarte mică, se egalează cu scăderea corespunzătoare a energiei electrostatice. Dacă $\delta \bar{r}$ sînt deplasările virtuale ale elementelor de volum dv, forţele $\bar{f} dv$, care se exercită asupra lor efectuează lucrul mecanic virtual:

$$\delta L = \int_v (\bar{f} \, \delta \bar{r}) \, dv$$

Variaţia corespunzătoare a energiei electrice, care are densitatea de volum (23) se calculează admiţînd că sarcina adevă-

rată e repartizată numai cu densitate de volum (adică tratînd densităţile de suprafaţă şi de linie şi sarcinile adevărate punctuale drept cazuri limită ale densităţii de volum). Mărimile $\bar{E}$ şi $\bar{D}$ care determină densitatea de volum ρ a sarcinii adevărate şi de permitivitatea ε a corpurilor, dacă nu se găsesc în cîmp corpuri cu polarizaţie electrică permanentă. In acest caz, la care ne limităm, densitatea de energie variază numai fiindcă la deplasarea virtuală considerată variază local ρ cu $\delta\rho$ în sistemul de referinţă inerţial în care se calculează lucrul virtual δL, iar ε variază local, în acelaşi sistem de referinţă cu $\delta\varepsilon$. Densitatea de sarcină adevărată variază local cu $\delta\rho$ atît fiindcă se deplasează corpurile, cît şi fiindcă poziţiei schimbate a corpurilor, îi corespunde o densitate de sarcină schimbată pe conductoare. Schimbării repartiţiei sarcinii adevărate pe conductoare îi corespunde însă o variaţie a energiei, care e neglijabilă în raport cu variaţia ei corespunzătoare schimbării repartiţiei sarcinii adevărate care s-ar produce dacă sarcina adevărată ar fi considerată că aderă la materie, inclusiv la conductoare. In adevăr după teorema stabilită mai sus sub b, la sarcina adevărată totală dată a conductoarelor şi la poziţia dată a acestora, energia liberă corespunzătoare echilibrului electrostatic e minimă - şi, după deplasarea virtuală, sistemul se găseşte în apropierea unei stări de echilibru electrostatic. Variaţia densităţii de energie electrică se poate calcula deci şi cu variaţia locală $\delta\rho$ a densităţii de sarcină adevărată considerată ca este ataşată la materie, ca şi permitivitatea şi deci

$$\delta\frac{\bar{E}\bar{D}}{2}\varkappa = \frac{1}{2}\varkappa\left[\left(\frac{\partial(\bar{E}\bar{D})}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\bar{E}\bar{D}}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon\right)\right]$$

iar relaţia din care se calculează densitatea de forţă este:

$$(a)\quad \delta L = \int_v (\bar{f}\,\delta\bar{r})\,dv = -\frac{1}{2}\varkappa\int_v\left[\frac{\partial(\bar{E}\bar{D})}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial(\bar{E}\bar{D})}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon\right]dv.$$

x densitatea de energie sînt determinate însă univoc de

Transformînd membrul al doilea al acestei ecuaţii, astfel încît să apară sub forma de integrală de volum efectuată asupra unui produs scalar în care unul din factori e deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$ a elementului de volum al doilea factor din produsul scalar reprezintă o densitate de forţă compatibilă cu principiul conservării energiei. La efectuarea acestei transformări trebuie să se deosebească încă variaţiile "substanţiale" $\delta_s f$ ale mărimilor scalare f care exprimă proprietăţi ataşate de materie, de variaţiile locale sau "parţiale" δf ale lor (vezi Introducerea matematică). Variaţia substanţială reprezintă diferenţa dintre valoarea pe care o are f într-un anumit punct din materie după efectuarea deplasării virtuale şi dintre valoarea pe care o avea f în acelaşi punct material înainte de efectuarea acestei deplasări. Variaţia locală δf reprezintă diferenţa dintre valoarea pe care o are f în punctul din materie care se găseşte într-un anumit punct al sistemului de referinţă folosit după efectuarea deplasării virtuale, şi dintre valoarea pe care o avea în punctul din materie, care se găsea în acelaşi punct al sistemului de referinţă înainte de efectuarea deplasării virtuale. Variaţia $\delta_s f$ e deci suma dintre δf şi variaţia mărimii f care corespunde exclusiv deplasării virtuale, adică faptului că f este şi funcţiune de poziţie. Într-un sistem de coordonate triortogonale x,y,z :

$$(b)\qquad \delta_s f = \delta f + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = \delta f + \delta\bar{r}\,\mathrm{grad}f$$

unde δx, δy, şi δz sînt componentele deplasării virtuale δr ale elementului de volum dv căruia îi este ataşată mărimea F. Se calculează uşor variaţia locală a densităţii de volum a unei mărimi scalare care satisface o lege de conservare (de exemplu variaţia locală a densităţii de masă, fiindcă masa satisface legea de conservare a masei, sau variaţia locală a densităţii de sarcină electrică adevărată fiindcă această sarcină satisface legea de conservare a sarcinii adevărate). Dacă o astfel de mărime circulă în cîmp la o deplasare virtuală "cantitatea" de mărime care iese în unitatea de timp printr-o suprafaţă Σ_1

egală cu integrala de suprafaţă a produsului densităţii γ a mărimii prin deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$ trebuie să fie egală cu scăderea corespunzătoare a "cantităţii" C_Σ de mărime care se găseşte în interiorul suprafeţei, adică egală cu integrala de volum, referitoare la volumul din interiorul suprafeţei a variaţiei cu un semn schimbat a densităţii γ a mărimii.

$$\delta C_\Sigma = -\int_{V_\Sigma} \delta\gamma \, dv = \int_\Sigma \gamma \delta\bar{r} \, d\bar{A} = \int_{V_\Sigma} \operatorname{div}(\gamma \delta\bar{r}) \, dv$$

adică, fiindcă suprafaţa închisă e arbitrară:

$$(c) \quad \delta\gamma = -\operatorname{div}(\gamma \delta\bar{r})$$

Această relaţie e valabilă pentru densitatea de sarcină ρ şi pentru densitatea de masă τ, $\delta\rho = -\operatorname{div}(\rho\delta\bar{r})$. Ea permite să se calculeze $\delta\rho$ din relaţia (a), dar nu permite să se calculeze $\delta\varepsilon$, fiindcă permitivitatea nu satisface o lege de conservare. Variaţia locală $\delta\varepsilon$ a permitivităţii ar putea fi calculată din (b), dacă variaţia substanţială a permitivităţii ar fi nulă ($\delta_s\varepsilon = 0$). Există multe materiale - şi în special cele solide a căror permitivitate e practic constantă, independent de variaţiile densităţii lor de masă. Permitivitatea fluidelor depinde însă de densitatea lor de masă. Pentru a calcula deci variaţia locală în timp a permitivităţii, vom presupune că s-a determinat pe cale experimentală dependenţa ei de densitatea de masă a mediului. Permitivitatea depinde şi de temperatură, dar presupunem că deplasarea virtuală considerată se efectuează isoterm. Se obţine astfel din relaţia (b), aplicînd-o permitivităţii şi densităţii de masă

$$\delta\varepsilon + \delta\bar{r} \operatorname{grad}\varepsilon = \delta_\tau\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{d\tau}\delta_s\tau = \frac{d\varepsilon}{d\tau}(\delta\tau + \delta\bar{r} \operatorname{grad}\tau) =$$

$$= \frac{d\varepsilon}{d\tau}\left[\delta\bar{r} \operatorname{grad}\tau - \operatorname{div}(\tau\delta\bar{r})\right] = -\frac{d\varepsilon}{d\tau}\tau \operatorname{div}\delta\bar{r}$$

şi deci

$$(d) \quad \delta\varepsilon = -\delta\bar{r} \operatorname{grad}\varepsilon - \tau\frac{d\varepsilon}{d\tau}\operatorname{div}\delta\bar{r}$$

Pentru a calcula şi derivatele densităţii de energie electrică în raportul cu ρ şi în raport cu ε, care intervin în relaţia (a) ne limităm la dielectrici isotropi. Obţinem astfel:

$$(e)\quad \frac{\partial(\bar{E}\bar{D})}{\partial\rho} = \frac{\partial(\varepsilon\bar{E}^2)}{\partial\rho} = \varepsilon 2\bar{E}\frac{\partial\bar{E}}{\partial\rho} = 2\bar{E}\frac{\partial\bar{D}}{\partial\rho}$$

şi

$$(f)\quad \frac{\partial(\bar{E}\bar{D})}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\bar{D}^2}{\varepsilon}\right) = -\frac{\bar{D}^2}{\varepsilon^2} + \frac{2\bar{D}}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{D}}{\partial\varepsilon} = -\bar{E}^2 + 2\bar{E}\frac{\partial\bar{D}}{\partial\varepsilon}$$

Introducînd în (a) expresiunile (e), (d) şi (f) ale variaţiunilor lor şi ale derivatelor parţiale se obţine:

$$\int \bar{f}\delta\bar{r}\,dv = -\frac{1}{K}\int \bar{E}\frac{\partial\bar{D}}{\partial\rho}\cdot\delta\rho\,dv - \frac{1}{2K}\int(\delta\bar{r}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \zeta\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\mathrm{div}\,\delta\bar{r})\bar{E}^2dv -$$
$$-\frac{1}{K}\int \bar{E}\frac{\partial\bar{D}}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon\,dv$$

Dacă se notează cu $\delta_\rho\bar{D}$ şi cu $\delta_\varepsilon\bar{D}$ variaţiile inducţiei cînd variază numai ρ respectiv numai ε adică:

$$\delta_\rho\bar{D} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial\rho}\delta\rho \quad ; \quad \delta_\varepsilon\bar{D} = \frac{\partial\bar{D}}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon$$

se obţine

$$(g)\quad \int \bar{f}\,\delta\bar{r}\,dv = -\frac{1}{K}\int(\bar{E}\,\delta_\rho\bar{D})\,dv -$$
$$-\frac{1}{2K}\int(\delta\bar{r}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \zeta\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\,\mathrm{div}\,\delta\bar{r})\,\bar{E}^2dv - \frac{1}{K}\int(\bar{E}\,\delta_\varepsilon\bar{D})\,dv$$

Membru al doilea al acestei relaţii trebuie transformat ca să apară sub fiecare din simbolurile de integrare produsul scalar al unei mărimi prin deplasarea virtuală $\delta\bar{r}$, care intervine şi în membrul întîi.

Primul termen din membrul al doilea se transformă folosind legea existenţei potenţialului electrostatic, forma diferenţială a legii fluxului electric şi teorema lui Gauss-Ostrogradski. Se obţine astfel:

$$\frac{1}{K}\int(\bar{E}\,\delta_\rho\bar{D})\,dv = -\frac{1}{K}\int\delta\rho\,\bar{D}\,\mathrm{grad}\,V\,dv = -\frac{1}{K}\int\mathrm{div}(V\delta_\rho\bar{D})dv +$$
$$+\frac{1}{K}\int V\,\mathrm{div}\,(\delta_\rho\bar{D})\,dv = -\frac{1}{K}\int_{\Sigma_\infty} V\delta_\rho\bar{D}\,d\bar{A} + \int(V\delta_\rho\rho)dv$$

Prima integrală din ultimul membru extinsă asupra suprafeţei dela infinit e nulă, fiindcă produsul $V\delta\rho\ \bar{D}$ tinde către zero mai repede decît cum tinde către zero valoarea reciprocă a pătratului razei R a acestei suprafeţe, presupusă în formă de sferă cînd raza ei tinde către infinit. Ţinînd deci seama de relaţia (c), se obţine:

$$\frac{1}{K}\int(\bar{E}\,\delta\rho\,\bar{D})\,dv = -\int V\,\mathrm{div}\,(\rho\delta\bar{r})\,dv = -\int \mathrm{div}(V\rho\delta\bar{r})dv +$$
$$+\int(\rho\delta\bar{r}\,\mathrm{grad}\,V)\,dv = -\int_{\Sigma\infty} V\rho\delta\bar{r}\;d\bar{A} - \int(\delta\bar{r}\rho\bar{E})\,dv$$

unde prima integrală din ultimul membru e iarăşi nulă. In ultima integrală intervine produsul scalar al deplasării virtuale, printr-o mărime vectorială, aşa încît acest termen are forma căutată.

Primul termen din a doua integrală din membrul al doilea din (g) are forma căutată, aşa încît trebuie transformat numai al doilea termen din acea integrală. Se obţine:

$$\int\left(\zeta\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\,E^2\,\mathrm{div}\,\delta\bar{r}\right)dv = \int \mathrm{div}\,\left(E^2\zeta\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\delta\bar{r}\right)dv -$$
$$-\int\left[\delta\bar{r}\,\mathrm{grad}\,\left(E^2\zeta\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\right)\right]\;dv = \int_{\Sigma\infty}\left(E^2\zeta\frac{\varepsilon}{d\zeta}\delta\bar{r}\right)d\bar{A} -$$
$$-\int\left[\delta\bar{r},\mathrm{grad}\,\left(E^2\zeta\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\right)\right]\;dv,$$

unde prima integrală din ultimul membru e iarăşi nulă, aşa încît rămîne ultima integrală care are forma căutată.

Ultima integrală din membrul al doilea din (g) se transformă cum urmează, cu ajutorul relaţiei $\mathrm{div}\,(\delta_\varepsilon\ \bar{D}) = 0$, fiindcă această variaţie se efectuează la ρ constant.

$$\frac{1}{K}\int(\bar{E}\,\delta_\varepsilon\,\bar{D})\,dv = -\frac{1}{K}\int\delta_\varepsilon\bar{D}\,\mathrm{grad}\,V\,dv = -\frac{1}{K}\int \mathrm{div}(\delta_\varepsilon DV)dv +$$
$$+\frac{1}{K}\int V\,\mathrm{div}\,(\delta_\varepsilon\,\bar{D})\,dv = -\frac{1}{K}\,\mathrm{div}\,(\delta_\varepsilon\bar{D}V)\,dv = -\frac{1}{K}\int_{\Sigma\infty} V\delta_\varepsilon\bar{D}\;d\bar{A}.$$

Ultima integrală e însă nulă. Se obţine deci pentru (g).

$$(h)\quad \int\bar{f}\delta\bar{r}\,dv = \int\left[\delta\bar{r}\left[\rho\bar{E} - \frac{\bar{E}^2}{2K}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon + \frac{1}{2K}\mathrm{grad}\,\left(E^2\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\zeta\right)\right]\right]dv$$

Dacă presupunem că fiecare din părţile corpurilor din cîmp poate fi deplasată independent de celelalte, $\delta \bar{r}$ din ultima relaţie poate fi presupus diferit de zero pentru orice parte a corpurilor, şi relaţia de mai sus poate fi satisfăcută numai dacă densitatea de volum a forţei care se exercită în cîmpul electrostatic are expresiunea:

$$(73)\quad \bar{F} = \rho \bar{E} - \frac{\bar{E}^2}{2\pi} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad}\left[\bar{E}^2 \frac{d\varepsilon}{d\zeta} \zeta \right]$$

Dacă diferitele părţi a corpului nu pot fi mişcate independent unele de altele, de exemplu dacă există în cîmp corpuri rigide, nu se poate deduce din (h) expresiunea (73) a densităţii de volum a forţei. In acest caz se poate obţine din (h) numai un număr de forţe lagrangiene egal cu numărul de grade de libertate cinematică. Acesta este sensul expresiunii (73) a densităţii de volum a forţei în cîmpul electrostatic. Expresiunea (73) a fost dedusă presupunînd că nu există în cîmp suprafeţe de discontinuitate. Dacă există astfel de suprafeţe, forţa se obţine mai uşor cu ajutorul expresiunii tensiunilor fictive echivalente cu acţiunile ponderomotoare ale cîmpului electrostatic (vezi vol.II Anexă).

Expresiunea densităţii de volum a forţei conţine trei termeni. Termenul $\rho \bar{E}$ reprezintă forţa care se exercită asupra corpurilor fiindcă sînt încărcate cu sarcini electrice adevărate. Se observă că deşi, sarcina adevărată e repartizată cu o anumită densitate de volum în materia din cîmp, fără a trebui să fie separată printr-un vid de restul materiei acest termen din expresiunea forţei o acelaşi ca şi cînd sarcina adevărată s-ar găsi pe un mic corp de probă situat într-un canal vid, scurt şi extrem de strîmt, cu axă în direcţia polarizaţiei electrice locale. Termenul al doilea din (73) reprezintă densitatea de forţă care se exercită asupra părţilor din dielectric în cari permitivitatea variază din loc în loc. Acest termen e independent de orientarea intensităţii locale a cîmpului electric şi e dirijată în sens contrar gradientului permitivităţii dielectricului, adică poate fi oblică faţă de $\bar{E}$ sau chiar perpendiculară pe $\bar{E}$. Dacă se

presupune că permitivitatea unui corp situat în vid scade la zero la suprafaţa corpului, rezultă că în cîmpul electric se exercită la suprafaţa corpului forţe care îl atrag spre vid în toate punctele suprafeţei sale. Ultimul termen reprezintă forţa conservativă care se exercită asupra părţilor dielectricilor în cari permitivitatea depinde de densitatea de masă. Această forţă prezintă interes în studiul electrostricţiunii, adică în studiul tensiunilor mecanice care se stabilesc în corpurile neîncărcate cu sarcină neadevărată ($\rho = 0$) cînd se stabileşte în el un cîmp electric. Din formula (73) rezultă că în toate cazurile în care dielectricul e neuniform (grad $\varepsilon \neq 0$) sau în care ε depinde de densitatea σ a dielectricului, $\bar{E}$ nu reprezintă forţa electrică împărţită cu sarcina adevărată în mediile masive.

Aplicaţie. Termenul al doilea din expresiunea (73) arată că un corp cu permitivitate mai mare e atras spre domeniile din cîmpul electrostatic mai intens (fiindcă la grad ε dat, forţele sînt mai mari în partea în care $\bar{E}$ e mai mare). De exemplu, dacă uleiul dintr-un cîmp electrostatic conţine şi apă, aceasta, avînd o permitivitate foarte mare în raport cu permitivitatea uleiului, e atrasă în partea de cîmp electric mai intens, putînd da, împreună cu fibrele din uleiu, punţi conductoare între conductoarele (electrozii) din cîmp, şi deci descărcări electrice între aceste conductoare. Prin descărcare apa se vaporizează, permitivitatea ei relativă scade astfel la valoarea unu, adică sub valoarea permitivităţii relative a uleiului, vaporii de apă sunt expulsaţi din regiunea de cîmp intens şi descărcările încetează. Din cauza umidităţii se produc deci descărcări fulgurente în uleiu (de ex. la încercarea uleiului la rigiditate dielectrică).

16. METODA ELEMENTARA A ELECTROSTATICII

6,1. Teorema lui Coulomb. Calculăm întîi intensitatea cîmpului electric al unui corp punctual încărcat cu sarcină adevărată, care se găseşte într-un mediu omogen şi

isotrop nelimitat. Intensitatea cîmpului depinde, din cauze de simetrie, numai de distanţa de la corpul încărcat cu sarcina q. O descompunem într-o componentă radială Er care se calculează cu ajutorul fluxului electric:

$$4\pi r^2 D_r = 4\pi r^2 E_r \varepsilon = \kappa q$$

adică

$$E_r = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{q}{\varepsilon_r 2}$$

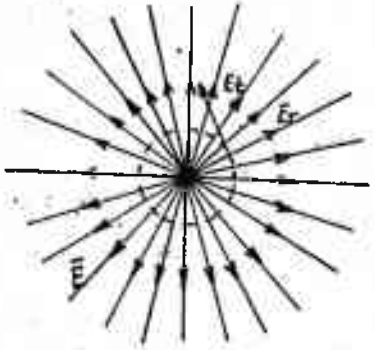


Fig.5o

Cîmpul electric al unui corp punctual cu sarcină adevărată într-un mediu omogen şi isotrop

şi într-o componentă tangenţială E_t, care se calculează cu ajutorul lemei potenţialului electrostatic, aplicată unui cerc mare de pe o sferă de rază oarecare şi cu centrul în q. Deducem din (53) $E_t \; 2\pi r = 0$ adică $E_t = 0$. Rezultă că intensitatea cîmpului electric al sarcinii de punct e dirijată radial, adică dacă $\bar{u}_r$ e vectorul unitate radial dirijat în sensul razelor crescătoare:

$$\bar{E} = \bar{u}_r \frac{\kappa}{4\pi} \frac{q}{\varepsilon_r 2}$$

Figura (5o) reprezintă liniile cîmpului electric al sarcinii q şi suprafeţele lui echipotenţiale (în linii întrerupte) în ipoteza că sarcina e pozitivă.

Problema se poate rezolva şi cu ajutorul expresiunilor pctenţialului scalar, în care $q_l = \frac{1}{\varepsilon} q$. Se obţine:

$$E = - \text{grad} \left(\frac{\kappa}{4\pi} \frac{q}{\varepsilon r}\right) = - \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\kappa}{4\pi} \frac{q}{\varepsilon r}\right) = \bar{u}_r \frac{\kappa}{4\pi} \cdot \frac{q}{\varepsilon_r 2}$$

Cîmpul electric al unei sarcini adevărate punctuale dintr-un dielectric omogen şi isotrop coincide, în exterioril unei sfere metalice cu centrul în ea, cu cîmpul aceleiaşi sarcini, dacă ar fi repartizată pe sferă, fiindcă i se aplică aceleiaşi legi, cu aceleaşi condiţiuni de simetrie.

Forţa pe care o exercită un conductor punctual încărcat cu sarcină adevărată q, asupra unui conductor punctual încărcat cu sarcină adevărată q', la distanţa r de ea. se

calculează din (1), dar cu valoarea de mai sus a intensităţii cîmpului electric, ţinînd seama de observaţia făcută după relaţia (28), în legătură cu intensitatea cîmpului electric în corpuri:

$$F = q' \vec{E} = \vec{v}_r \frac{1}{4\pi} \frac{qq'}{\mathcal{E}_r r^2}$$

adică: Intr-un dielectric omogen de permitivitate absolută $\mathcal{E}$ două sarcini electrice adevărate punctuale se resping sau se atrag, după cum sînt de acelaşi nume sau de nume contrare, cu o forţă proporţională cu produsul sarcinilor şi invers proporţionale cu pătratul distanţei dintre ele şi cu permitivitatea absolută a dielectricului (teorema lui Coulomb).

Dacă sarcinile q şi q' din formula lui Coulomb sînt de nume contrare, ele se atrag; dacă sarcinile sînt de acelaşi nume, ele se resping.

Forţa de respingere dintre două sarcini adevărate punctuale pozitive, de cîte un coulomb, situate în vid ($\mathcal{E}_r$=1) la distanţa de un metru una de alta, are deci în sistemul MKSA neraţionalizat ($\mathcal{K} = 4\pi$), valoarea:

$$F = \frac{1}{\mathcal{E}_o} \cdot \frac{1.1}{1^2} = 9.10^9 \text{ newtoni} = 9.10^{14} \text{ dyn},$$

fiindcă în acest sistem, $\mathcal{E}_o = \frac{1}{9.10^9}$. Pe baza aceasta s-a definit coulombul. Forţa de respingere dintre două sarcini adevărate punctuale pozitive de cîte o unitate electrostatică absolută de sarcină, situate în vid, la distanţa de 1 cm una de alta, are în sistemul electrostatic CGS neraţionalizat ($\mathcal{K} = 4\pi$; $\mathcal{E}_o = 1$), valoarea:

$$F = \frac{1}{1.1} \frac{1.1}{1^2} = 1 \text{ dină}$$

Pe baza aceasta s-a definit unitatea electrostatică de sarcină adevărată în sistemul electrostatic CGS neraţionalizat.

Teorema lui Coulomb, care e valabilă numai în regim electrostatic şi numai în dielectrici omogeni şi isotropi, poate fi folosită cum am arătat şi ca punct de plecare în studiul electrostaticii corpurilor isotrope. In acest

fel nu reuşeşte însă generalizarea pentru corpurile neomogene sau anisotrope.

16.2. Cîmpul electrostatic dintr-un condensator plan. Fie un condensator electric plan (fig.51 a), cu armăturile omogene, paralele, de arie simplă A, încărcate cu sarcini adevărate constante, egale şi de nume contrare şi cu un dielectric omogen şi isotrop $\mathcal{E}$ între ele. Tensiunea electrică dintre armături e aceiaşi dealungul oricărei curbe dintre ele. Neglijînd efectul de margine, adică încurbarea liniilor cîmpului electric la marginea condensatorului, cîmpul electric dintre armături e omogen şi perpendicular pe ele. Din legea fluxului electric, aplicată unei suprafeţe ca aceea desenată în linie întreruptă în figura 51 a, se obţine:

$$AD_n = A\,\mathcal{E}\,E_n = \mathcal{K}q \quad \text{adică} \quad E = E_n = \mathcal{K}\frac{q}{\mathcal{E}A}$$

Diferenţa de potenţial dintre armăturile la distanţa g una de alta se obţine alegînd o dreaptă perpendiculară pe ele drept curbă de integrare.

$$U = \int \bar{E}\,d\bar{s} = E\,g = \mathcal{K}\frac{q}{\mathcal{E}A}\,g$$

Diferenţa de potenţial dintre prima şi a doua armătură e deci egală cu cîtul sarcinii adevărate a primei armături prin mărimea

$$(74) \qquad C = \frac{\mathcal{E}A}{\mathcal{K}g}$$

care depind numai de dimensiunile condensatorului şi de permitivitatea dielectricului dintre armăturile lui, şi este capacitatea lui electrică.

Cîmpul electrostatic din condensatorul plan se poate determina şi cu ajutorul ecuaţiei lui Poisson, cum am arătat în aplicaţia de sub teorema potenţialului scalar al cîmpurilor electrice staţionare.

Dacă se găsesc între armăturile condensatorului doi dielectrici omogeni şi isotropi, liniile de cîmp şi liniile de inducţie ale cîmpului electric nu se refractă la suprafaţa de separaţie a celor doi dielectrici, dacă aceasta este o suprafaţă echipotenţială, sau dacă e tangentă la li-

niile de cîmp şi de inducţie (fig.52 a,b,c şi d). Altfel

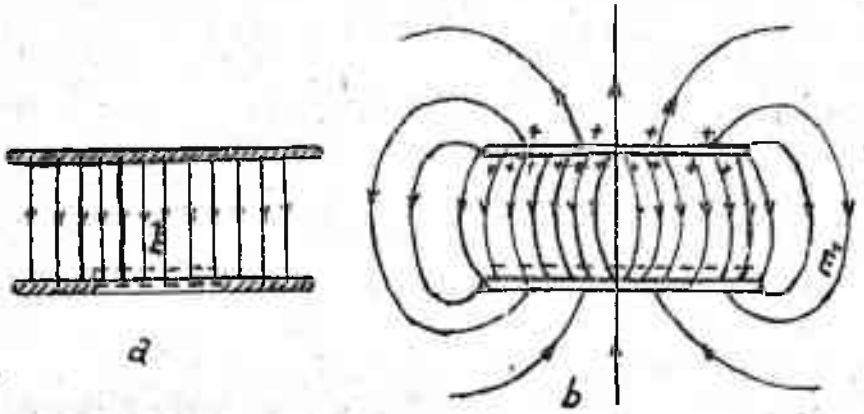


Fig.51

a) Model pentru determinarea cîmpului electric dintr-un condensator plan.

b) Cîmpul electric dintr-un condensator plan cu un dielectric izotrop şi omogen între armături.

liniile se refractă (fig.52.e) şi cîmpul se determină greu pe cale analitică.

Cînd liniile de cîmp nu se refractă la suprafaţa de separaţie a dielectricilor, ele sînt perpendiculare pe plăci, şi cîmpul e omogen în fiecare dielectric; astfel se satisface legea derivării lui dintr-un potenţial scalar şi $E = O$ în plăci. Se satisface şi legea fluxului electric punînd

$$D = K \rho_s$$

unde ρ_s este densitatea de sarcină adevărată pe suprafaţa interioară a unei armături. Dacă suprafaţa de separaţie a straturilor de dielectrici e paralelă cu armăturile ρ_s e constant pe fiecare armătură şi egal cu cîtul sarcinii ei adevărate q_a prin aria ei simplă A, şi intensitatea cîmpului electric din dielectricii ε_1 şi ε_2 este

$$E_1 = \frac{K}{\varepsilon_1} \frac{q}{A} = E_2 = \frac{K}{\varepsilon_2} \frac{q}{A}$$

Dacă g_1 şi g_2 sînt grosimile celor două straturi de dielectric, tensiunea electrică dintre armăturile condensatorului e

$$U = E_1 g_1 + E_2 g_2 = \frac{\kappa q}{A} \left(\frac{g_1}{\varepsilon_1} + \frac{g_2}{\varepsilon_2} \right)$$

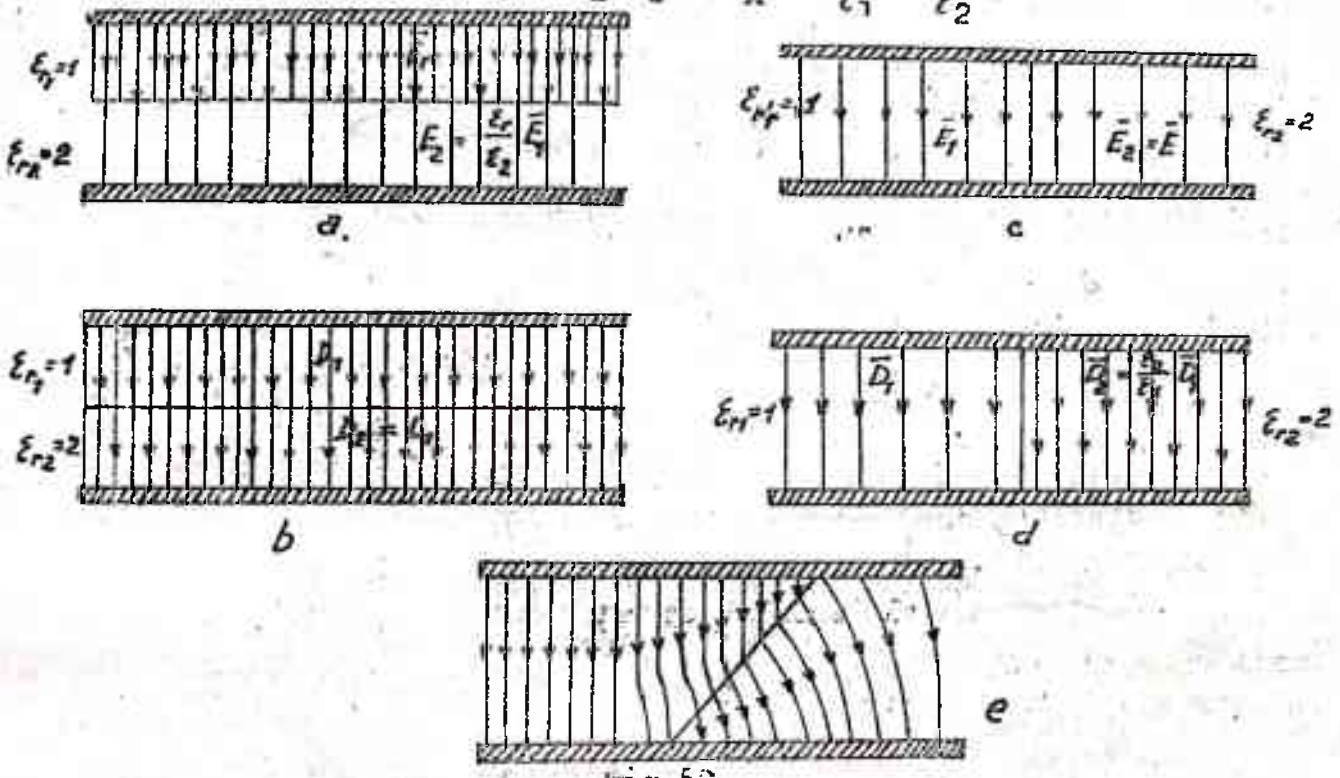


Fig. 52

a şi b: intensitatea şi inducţia cîmpului electric dintr-un condensator plan cu două straturi de dielectrici;

c şi d: intensitatea şi inducţia cîmpului electric dintr-un condensator plan cu două blocuri de dielectrici;

e: cîmpul inducţiei electrice într-un condensator plan cu doi dielectrici.

şi capacitatea

$$C = \frac{q}{U} = \frac{A}{\kappa \left(\frac{g_1}{\varepsilon_1} + \frac{g_2}{\varepsilon_2} \right)} \qquad (74\ a)$$

Raportul dintre intensităţile cîmpurilor din cei doi dielectrici e egal cu valoarea reciprocă a raportului

prmitivităţilor lor $E_1 : E_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2$.
Dacă suprafaţa de separaţie a blocurilor de dielectric e perpendiculară pe armături (fig.18 c şi d) intensitatea cîmpului electric trebuie să fie aceiaşi în cei doi dielectrici pentru a avea aceiaşi tensiune între armături:

$$E_1 = E_2 \quad \text{şi deci} \quad D_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2$$

Dacă A_1 şi A_2 sînt ariile de armătură ocupate de dielectricii ε_r, şi ε_z, urmează deci din $D_1 = \kappa \rho_{s1} = \varepsilon_1 E_2$ şi $D_2 = \kappa \rho_{s2} = \varepsilon_z E_2$.

$$\rho_{s1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \rho_{s2}$$

adică, fiindcă

$$q_a = A_1 \rho_{s1} + A_2 \rho_{s2} = (A_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + A_2) \rho_{s2},$$

tensiunea electrică dintre armăturile condensatorului devine:

$$U = E_{2g} = \frac{\kappa}{\varepsilon_2} \rho_{s2g},$$

şi condensatorul electric are capacitatea

$$(74\ b) \qquad C = \frac{\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2}{\kappa_g}$$

16.3 <u>Condensatorul cilindric cu două straturi concentrice de dielectric omogen şi isotrop între armături</u>. Fie sarcina adevărată repartizată cu densitatea de linie constantă ρ_ℓ dealungul armăturii cilindrice interioare a condensatorului de rază R_1 şi lungime ℓ, şi - ρ_ℓ densitatea de linie a sarcinii repartizate dealungul armăturii cilindrice exterioare, care are raza interioară a_i şi lungimea ℓ şi e coaxială cu armătura de rază a_e. Aproximăm cîmpul din condensator prin porţiunea respectivă de lungime l din cîmp, în ipoteza că lungimea cilindrului ar fi infinită, adică neglijăm efectul de margine.

Aplicînd relaţia (53) unui cerc situat într-un plan perpendicular pe axa comună a armăturilor cilindrice şi observînd că, din motive de simetrie, componenta tangenţială a intensităţii cîmpului electric depinde numai de

distanța r de la axa de simetrie urmează (fig.53)

$$E_t = 2\pi r \cdot \ldots = 0$$

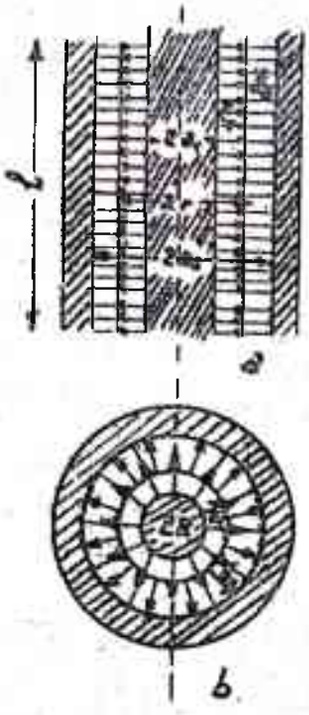


Fig. 53 - 54
Cîmpul electric dintr-un conductor cilindric, cu două straturi de dielectric

adică $E_t = 0$ și deci $D_t = 0$, adică atît intensitatea cîmpului cît și inducția sînt dirijate radial. Din legea fluxului electric aplicată unui cilindru coaxial cu armăturile rezultă fiind că componenta axială a lui D e nulă și fiindcă D_r depinde numai de r:

$2\pi r l D_r = \kappa l \rho_e$, adică $\bar{D} = \bar{U}_r \kappa \frac{q}{2\pi r l}$

$$\bar{E} = \bar{U}_r \kappa \frac{q}{2\pi \varepsilon l r}$$

unde ε poate depinde de distanța r de la axa de simetrie, q e sarcina adevărată a armăturii interioare, iar l e lungimea condensatorului. Intensitatea cîmpului electric în dielectricii ε_1 și ε_e e deci:

$$E_1 = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{q}{\varepsilon_1 r l} \quad ; \quad E_2 = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{q}{\varepsilon_2 r l}$$

Dacă a_i, a_e și a sînt razele armăturii interioare, exterioare și a suprafeței de separație dintre cei doi dielectrici, tensiunea dintre armăturile condensatorului este:

$$U = \int_{r_i}^{r_e} E_1 dr + \int_{r_i}^{r_e} E_2 dr = \frac{\kappa q}{2\pi l} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{a}{a_i} + \frac{1}{\varepsilon_e} \ln \frac{a_e}{a} \right)$$

adică în expresiunea ei intervine potențialul logaritmic (v. introducerea matematică) și capacitatea condensatorului e

$$(74\ c) \qquad C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi l}{\kappa \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{a}{a_i} + \frac{1}{\varepsilon_e} \ln \frac{a_e}{a} \right)}$$

Dacă $a = \partial_e$ se obţine condensatorul cilindric cu un singur dielectric omogen între armături. Cîmpul electric din el are intensitatea maximă la suprafaţa armăturii interioare Capacitatea lui electrică e

$$(74\ d) \qquad C = \frac{2\pi}{\varkappa} \cdot \frac{\varepsilon \ell}{\ln \frac{\partial_e}{\partial_i}}$$

Capacitatea unui condensator cilindric în care armăturile ocupă numai unghiul în jurul axei de simetrie şi sunt situate faţă în faţă se poate aproxima prin expresiunea:

$$(74\ e) \qquad C_\alpha = \frac{\alpha}{2\pi} C = \frac{\alpha \ell}{\varkappa \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \ln \frac{a}{\partial_i} + \frac{1}{\varepsilon_e} \ln \frac{\partial_e}{a} \right)}$$

16.4. Condensatorul sferic cu două straturi concentrice de dielectric între armături. Satisfacem legea derivării dintr-un potenţial scalar admiţînd un cîmp radial, şi depinzînd numai de distanţa r de la centrul comun al armăturilor (fig,54) Aplicînd forma integrală a legii fluxului electric unei sfere de rază $r(R_i < r < R_e)$ se obţine

$$D\ 4\pi r^2 = \varkappa q$$

unde q e sarcina adevărată a armăturii interioare. Intensitatea cîmpului electric din dielectricii ε_1, ε_e, se obţine din legea polarizaţiei electrice

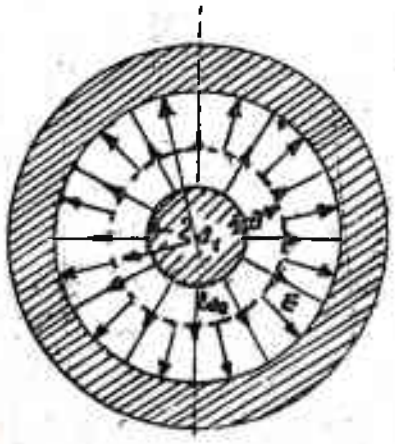


Fig.55

Intensitatea cîmpului electric într-un condensator sferic cu două straturi de dielectric.

$$E_1 = \frac{\varkappa q}{4\pi \varepsilon_1 r^2} \quad ; \quad E_2 = \frac{\varkappa q}{4\pi \varepsilon_e r^2}$$

Dacă a e raza suprafeţei sferice de separaţie dintre cei doi dielectrici, se obţine pentru tensiunea dintre armăturile condensatorului

$$U = \int_{a_i}^{a} E_1 dr + \int_{a}^{a_e} E_2 dr = \frac{\varkappa}{4\pi} \cdot q \left(\frac{a - a_i}{\varepsilon_1 a a_i} + \frac{a_e - a}{\varepsilon_e a_e a} \right)$$

şi capacitatea condensatorului se calculează din relaţia:

$$(74\ f)\qquad \frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \left(\frac{a_e - a_i}{\varepsilon_i a a_i} + \frac{a_e - a}{\varepsilon_0 a_e a} \right)$$

Cînd $a = a_e$, condensatorul are un singur dielectric şi capacitatea lui e

$$(74\ g)\qquad C = \frac{4\pi}{\varkappa} \cdot \varepsilon \frac{a_e \cdot a_i}{a_e - a_i}$$

Cîmpul electric are intensitatea maximă la suprafaţa armăturii interioare.

$$(74\ h)\qquad E_{max} = \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{q}{\varepsilon a_i^2} = \frac{U_{ae}}{a_i (a_e - a_i)}$$

17. METODA IMAGINILOR ELECTRICE.

17.1. Principiul metodei. Fie un cîmp electrostatic cunoscut, Σ o suprafaţă echipotenţială, de nivel, închisă V= const. în cîmp, q_i sarcinile adevărate din interiorul suprafeţei şi q_k sarcinile adevărate din exteriorul ei. Dacă s-ar metaliza cu un conductor omogen interiorul suprafeţei echipotenţiale Σ, acest conductor satisface toate condiţiunile la limită ale regimului electrostatic în cîmpul electrostatic iniţial din exteriorul lui, cîmpul şi sarcinile adevărate din interiorul lui ar fi nule, şi el ar avea la suprafaţă sarcina q_i (fig.56) Un conductor în regim electrostatic este deci echivalent din punct de vedere al acţiunilor sale electrostatice exterioare, cu orice

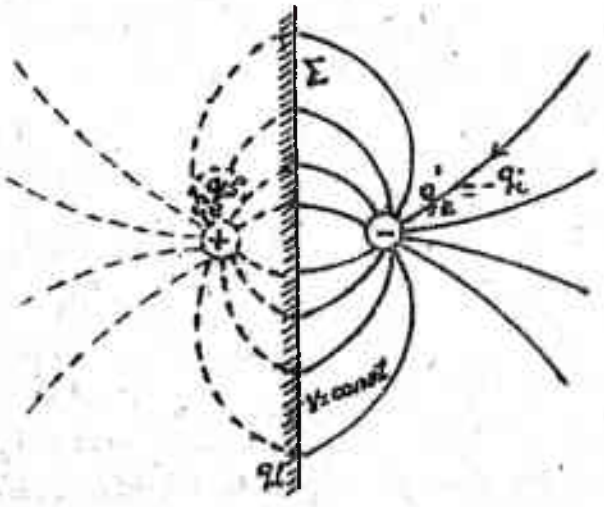


Fig. 56
Principiul metodei imaginilor electrice.

repartiţie de sarcini adevărate q_i repartizate astfel în interiorul său, încît suprafaţa conductorului să fie o suprafaţă echipotenţială în cîmpul electric al sarcinilor q_i şi al sarcinilor adevărate q'_k din exteriorul conductorului, în ipoteza că aceasta ar lipsi. Sarcinile adevărate q_i se numesc imagini electrice ale sarcinilor adevărate q'_k în raport cu suprafaţa Σ a conductorului, şi reciproc: sarcinile adevărate q'_k se numesc imagini electrice ale sarcinilor adevărate q_i în raport cu acelaşi suprafaţă.

Densitatea de suprafaţă a sarcinilor adevărate pe suprafaţa conductorului în cîmpul de potenţial V şi permitivitatea absolută ε e

$$(74\ 1)\qquad \rho_s = -\frac{1}{4\pi}\,\varepsilon\frac{\partial V}{\partial s_n}$$

Metoda imaginilor electrice, pentru rezolvarea problemelor de determinarea cîmpului electrostatic dintre două sau mai multe conductoare omogene date, consistă în determinarea unor sarcini adevărate (imagini electrice) repartizate astfel în interiorul conductoarelor, încît în cîmpul electrostatic pe care l-ar stabili sarcinile în absenţa conductoarelor, suprafeţele acestora să fie echipotenţiale şi să aibă potenţialele conductoarelor date.

Imaginile electrice ale unui sistem de sarcini adevărate, în raport cu o suprafaţă dată Σ, nu sînt determinate în mod univoc. În adevăr, dacă s-a determinat o repartiţie q_i, astfel încît în cîmpul sarcinilor q_i, q'_k suprafaţa Σ să fie echipotenţială, repartiţia de echilibru electrostatic a sarcinii Σq_i pe orice suprafaţă echipotenţială a acelui cîmp şi situată în interiorul lui S_i, are suprafaţa Σ ca echipotenţială. Numai suma Σq_i e determinată univoc la q'_k daţi, fiindcă $\Sigma q_i = -\Sigma q'_k$ în cîmpul electrostatic complet.

17.2 <u>Cîmpul din dielectricul omogen şi izotrop dintre o sarcină adevărată punctiformă şi un conductor plan omogen.</u> Potenţialul cîmpului electrostatic al sarcinii punctiforme q la distanţa r de ea, este:

$$V' = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r}$$

iar ai imaginii ei dielectrice - q in raport cu planul, presupusă punctiformă, la distanta r' de ea, este

$$V'' = -\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{r'},$$

ceeace arată că -q trebuie să fie simetrică sarcinii q în raport cu suprafaţa plană a conductorului, pentru ca în punctele acestei suprafeţe să fie satisfăcută relaţia r = r' şi deci suprafaţa să fie echipotenţială. Dacă d este distanţa între sarcina q şi plan, rezultă deci, pentru un punct P în care se calculează potenţialul cîmpului electrostatic dintre q şi planul conductor, presupus trecînd prin originea unui sistem de coordonate cartesiene şi perpendicular pe axa Ox, care trece prin q

$$r = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}\,; \quad r' = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}$$

Densitatea de suprafaţă a unei sarcini adevarate pe suprafaţa plană a conductorului echivalentă cu imaginea electrică - q este deci

$$\rho_s = \frac{\varepsilon}{\varkappa} E_n = -\frac{\varepsilon}{\varkappa} \frac{\partial(V' + V'')}{\partial s_n} = \frac{-\varepsilon}{\varkappa}\left[\frac{\partial(V' + V'')}{\partial x}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{q.d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

adică e invers proporţională cu puterea a treia a distanţei: $R = \sqrt{d^2 + y^2 + z^2}$ dintre sarcina q şi punctul planului în care se determină densitatea de suprafaţă (vezi fig 57)
Liniile de cîmp ale cîmpului electrostatic al sarcinii q nu trec prin conductorul cu suprafaţa plana orientată spre sarcina q. Acest conductor constituie deci un ecran electric al domeniului din spatele lui, faţă de acţiunile sarcinii q. Figurile 57 a şi 57 b reprezintă liniile de cîmp ale cîmpului electrostatic şi variaţia densităţii de suprafaţă a sarcinii adevărate pe planul conductor.

Cîmpul dintre plan şi corpul cu sarcina q fiind

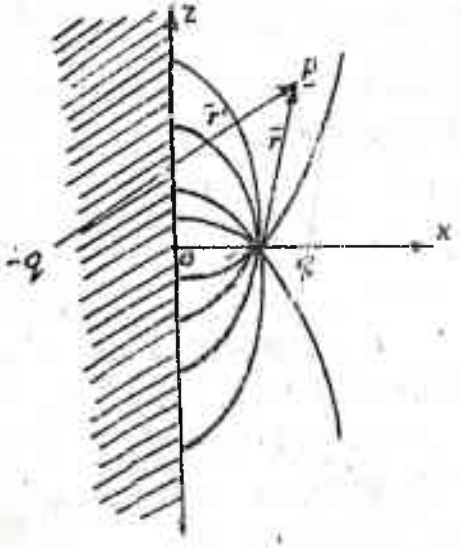


Fig.57 a

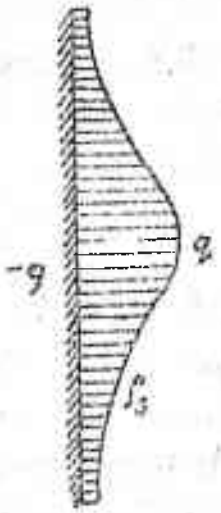


Fig.57 b

egal cu cîmpul produs în acel domeniu de sarcinile q și -q, urmează că asupra corpului în cărcat cu sarcină q se exercită "forța imagine" de atracțiune către plan

$$F = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q^2}{(2a)^2}$$

Faptul că o sarcină electrică provoacă, pe un conductor care era inițial neîncărcat și pus la pămînt o sarcină de semn contrar cu ea se numește influență electrică. Dacă se pune conductorul la pămînt, sarcina separă pe el, prin influență, sarcini egale și de semne contrare și "atrage" spre ea sarcina de semn contrar.

17.3. <u>Cîmpul electrostatic dintre doi cilindrii paraleli într-un dielectric omogen și izotrop.</u> Considerăm suprafețele echipotențiale a două linii paralele, încărcate cu densitățile liniare constante de sarcină adevărată ρ_ℓ și $-\rho_\ell$. Intensitatea cîmpului electrostatic a firului (cilindrului) cu densitatea ρ_ℓ, la distanța r de fir, este radială, adică are versorul $\bar{u}_r$, și este:

$$\bar{E} = \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{\rho_\ell}{\varepsilon} \frac{\bar{u}_r}{r}$$

adică potențialul său este:

$$v' = \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{\rho_\ell}{\varepsilon} \ell n\, r$$

și deci potențialul celor două fire, într-un punct P, la distanțele r_1 și r_2 de fire este:

$$V = \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{\rho_\ell}{\varepsilon} \ell n \frac{r_2}{r_1}$$

și potențialul e ales egal cu zero pe perpendiculara Δ pe

mijlocul segmentului O_1O_2 dintre firele O_1 şi O_2 (fig.58). Pe fiecare suprafaţă echipotenţială V este constant, adică:

$$\frac{r_2}{r_1} = \lambda$$

unde λ e un parametru constant pentru fiecare suprafaţă echipotenţială. Această condiţiune dă în secţiune o familie de cercuri cu centrele pe dreapta O_1O_2, cuprinse în planele perpendiculare pe fire, care împart armonic segmentul $O_1\ O_2$, numite cercurile lui Apollonius, şi arată că suprafeţele echipotenţiale sînt cilindri circulari paraleli cu firele.

Cînd λ descreşte de la ∞ pînă la 1, cercurile echipotenţiale cresc de la punctul O_1 la care sînt reduse pentru $\lambda = \infty$ pînă se confundă cu dreapta Δ ; cînd descreşte de la 1 pînă la 0, cercurile echipotenţiale descresc de la dreapta Δ pînă se reduc la punctul O_2. Relaţia $\lambda > 1$ corespunde deci regiunii I, şi relaţia $\lambda < 1$ regiunii II.

Pentru a determina cîmpul a doi cilindri paraleli de raze R_1 şi R_2, şi cu axele la distanţă D una de alta puse sub tensiune, trebuie să se determine poziţia firelor O_1 şi O_2 pe o perpendiculară comună pe axele lor, astfel încît suprafeţele cilindrilor să fie echipotenţiale în cîmpul firelor, adică să se determine în aceste condiţiuni mărimile a_1 şi a_2 în funcţiune de R_1, R_2 şi D (v. fig. 58).

Considerăm întîi cazul cilindrilor alăturaţi şi observăm că punctele A_1 şi B_1 de pe suprafaţa echipotenţială a cilindrului R_1 au potenţiale egale şi la fel punctele A_2 şi B_2 de pe suprafaţa cilindrului R_2, obţinem:

$$\lambda_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_{A_1} = \frac{d + a_1 - R_1}{R_1 - a_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_{B_1} = \frac{d + a_1 + R_1}{R_1 + a_1} = \frac{d + a_1}{R_1} = \frac{R_1}{a_1}$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_{A_2} = \frac{R_2 - a_2}{d + a_2 - R_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_{B_2} = \frac{R_2 + a_2}{d + a_2 + R_2} = \frac{R_2}{d + a_2} = \frac{a_2}{R_2}$$

unde penultimii termeni conţin semisumele şi ultimii semidiferenţele numărătorilor şi numitorilor membrilor 3 şi 5. Se deduce

$$R_1^2 = a_1^2 + a_1 d; \quad R_2^2 = a_2^2 ; \quad d = D - a_1 - a_2$$

unde ultima relaţie se deduce din fig.58.

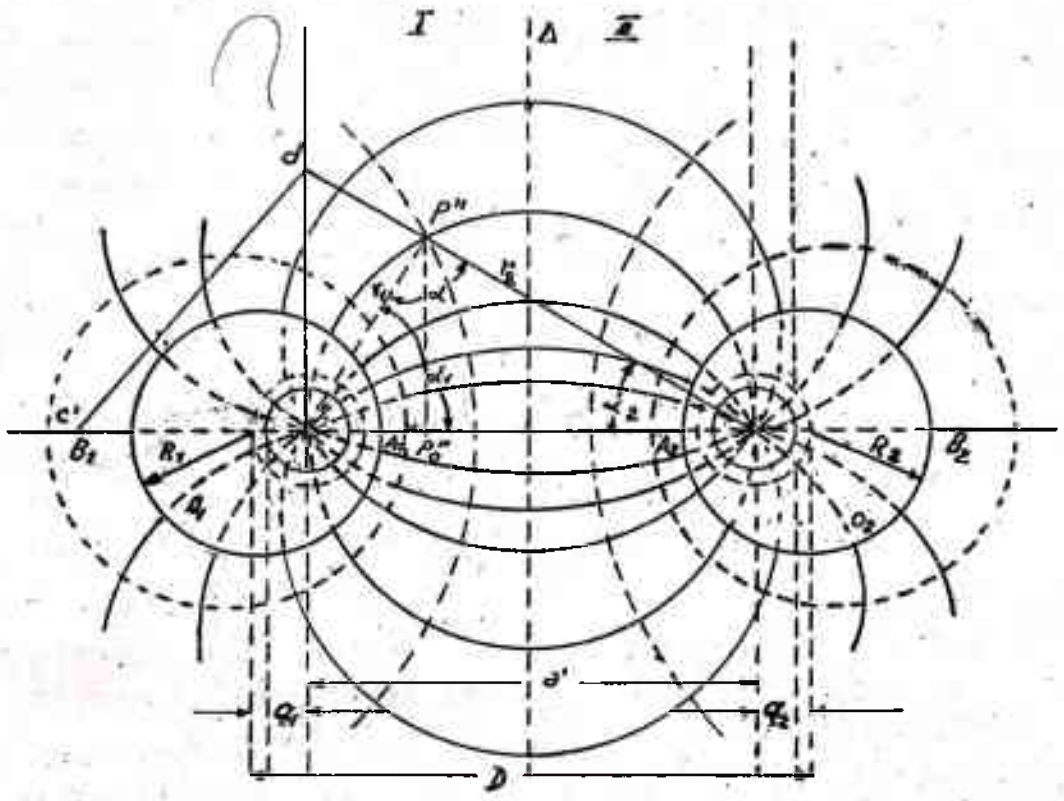


Fig. 58

Cîmpul electric dintre două conductoare cu cu axele paralele.

Rezolvîndu-le se obţine:

$$a_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2 - k^2}{2D}; \quad a_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2 - k^2}{2D}; \quad d = \frac{k^2}{D}$$

unde

$$(74) \quad k^4 = (D^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4 R_1^2 R_2^2$$

Tensiunea electrică dintre cei doi cilindri e:

$$U = V_1 - V_2 = \frac{\kappa \rho \ell}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\rho \ell}{\varepsilon} \ln \frac{R_1 R_2}{a_1 a_2} = \frac{\kappa q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln \frac{R_2(D^2 + k^2 R_1^2 - R_2^2)}{R_1(D^2 - k^2 - R_1^2 - R_2^2)}$$

unde $q = \rho \ell$ e sarcina adevărată a cilindrului R_1 şi ℓ e lungimea comună a cilindrilor.

Capacitatea condensatorului format de cei doi cilin-

dri e cîtul sarcinii adevărate q_a prin această tensiune U:

$$(74\ k) \qquad C = \frac{2\pi}{\varkappa}\varepsilon \frac{\ell}{\ell n\left(\frac{R_2}{R_1}\,\frac{D^2+k^2+R_1^2-R_2^2}{D^2+k^2-R_1^2-R_2^2}\right)}$$

Cîmpul electric e maxim pe dreapta interioară de intersecţiune a planului care conţine axele cilindrilor, cu suprafaţa cilindrului de rază mai mică, şi se obţine însumînd algebric cîmpurile produse de cele două fire. In ipoteza $R_1 < R_2$ punctul corespunzător e A_1 şi avem:

$$(74\ l) \qquad E_{max} = \frac{\varkappa q_a}{2\pi\varepsilon\ell}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\ell}\left(\frac{1}{R_1-a_1}-\frac{1}{d-R_1+a_1}\right)$$

$$= \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\ell R_1}\sqrt{\frac{D^2+R_1^2-R_2^2+2DR_1}{D^2+R_1^2-R_2^2-2DR_2}}$$

Pentru a construi cercurile echipotenţiale, se ridică în O_1 perpendiculară pe O_1O_2. Dacă se alege un punct P' pe ea şi se trasează dreapta O_2P' intersecţiunea C' a perpendicularei în P' pe O_2P' cu dreapta O_1O_2 dă centrul cercului echipotenţial care trece prin P'. In aceste condiţiuni triunghiul $O_1P'C'$ e asemenea cu $P'O_2C'$. Egalînd rapoartele dintre ipotenuzele lor şi catetele omoloage, obţinem:

$$\frac{C'P'}{C'O_1} = \frac{R_1}{a_1} = \frac{C'O_2}{C'P'} = \frac{d+a_1}{R_1}$$

ecuaţia pe care o satisface în adevăr distanţa d, raza R_1 şi distanţa $a_1 = O'O_1$ a oricărui cerc echipotenţial, fiindcă valoarea acestui raport reprezintă parametrul λ' al cercului, cum rezultă din expresiunea lui λ. Aceiaşi construcţie dă cercurile care închid firul O_2. Pentru a construi şi liniile de cîmp cari sînt traiectoriile ortogonale ale cercurilor echipotenţiale, trebuie observat că fluxul electric care trece pe unitatea de lungime de cilindri printre două linii de cîmp e constant. Una din liniile de cîmp e dreapta O_1O_2. Pentru a determina linia de cîmp care trece prin P" trebuie calculat fluxul

electric care traversează o porţiune din planul P, paralel cu axele cilindrilor şi trecînd prin dreapta $P''P''_0$ cu P''_0 pe segmentul O_1O_2, porţiunea fiind dreptunghiulară şi limitată pe perpendicularele pe figură ridicate în punctele P" şi P''_0 de segmentul $P''P''_0$ şi de segmentul egal şi paralel cu $P''P''_0$ cuprins în planul P şi la distanţa l de $P''P''_0$. Firul U_1 stabileşte prin această porţiune fluxul Ψ_α din unghiul α_1 adică a $\frac{\alpha_1}{2\pi}$ - a parte din fluxul său Ψ_1, pe unitatea de lungime:

$\Psi_{\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{2\pi}\Psi_1$; analog firul O_2: $\Psi_{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{2\pi}\Psi_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi}\Psi_1$ deci fluxul printre cele două linii de cîmp şi pe unitatea de lungime e:

$$\Psi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\pi}\Psi_1 = \frac{\pi - \alpha}{2\pi}\Psi_1 \qquad (74\ a)$$

unde α e unghiul dintre O_1P'' şi O_2P''. Cum acest flux e constant pentru acelaşi linie de cîmp, α = const, adică linia e locul geometric al punctelor din care O_1 O_2 se vede sub punctul α, deci un cerc capabil de unghiul α descris pe segmentul O_1O_2. Figura 58 reprezintă opt cercuri, ale căror tangente formează în O_1 şi O_2 unghiuri egale, adică avînd a 16-a parte din fluxul total printre două cercuri vecine.

O construcţie grafică aproximativă a cercurilor echipotenţiale se obţine trasînd pentru fiecare fir cercurile lor concentrice, cu o diferenţă de potenţial constantă între cele două cercuri vecine, şi trasînd cercuri prin intersecţiunile cercurilor din cele două familii, cari au aceiaşi sumă a potenţialelor. In fiecare patrulater curbilinîu arcul cercului trasat formează o "diagonală". Se obţin astfel cercurile echipotenţiale prin metoda trasării diagonalelor. Aceiaşi metodă se poate folosi pentru a construi liniile cîmpului rezultant din liniile cîmpurilor celor două fire care sînt radiale: cercurile liniilor cîmpului rezultant trec prin intersecţiunile liniilor cîmpurilor parţiale, pentru care suma fluxurilor electrice (suma unghiurilor α_1 şi α_2, cari se formează cu dreapta care uneşte urmele celor două fire) e constantă (fig.59).

Formulele se simplifică dacă razele cilindrilor

sînt egale: $R_1 = R_2 = R$. Obţinem:

$$(74\,n) \qquad U = \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\ell} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - 4R^2}}{D - \sqrt{D^2 - 4R^2}}$$

intensitatea maximă a cîmpului electric devine:

$$(74\,o) \qquad E_{max} = \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\ell R} \cdot \sqrt{\frac{D + 2R}{D - 2R}}$$

Cu ajutorul acestor formule se poate studia şi cîmpul dintre un cilindru şi un plan infinit, paralel cu el şi la distanţa h de centrul lui: Planul trebuie confundat cu planul echipotenţial din cîmpul celor doi cilindri de raze egale, adică trebuie notat în formulele de mai jos $D = 2h$, şi considerată numai jumătate din tensiunea dintre cei doi cilindri. Se obţine astfel:

$$(74\,p) \qquad U = \frac{\varkappa q}{4\pi\varepsilon\ell} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - R^2}}{h - \sqrt{h^2 - R^2}}$$

Intensitatea maximă a cîmpului electric:

$$(74\,q) \qquad E_{max} = \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\ell R} \sqrt{\frac{R + h}{h - R}}$$

Cînd un cilindru îmbracă cilindrul al doilea (fig.6o), se obţin pentru punctele A_1 şi B_1, respectiv A_2 şi B_2 relaţiile:

$$\lambda_1 = \frac{d + a_1 - R_1}{R_1 - a_1} = \frac{d + a_1 + R_1}{R_1 + a_1} = \frac{d + a_1}{R_1} = \frac{R_1}{a_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{R_2 - a_2}{a_2 - d_2 - R_2} = \frac{R_2 + a_2}{a_2 - d + R_2} = \frac{R_2}{a_2 - d} = \frac{a_2}{R_2}$$

de unde rezultă:

$$R_1^2 = a_1^2 + a_1 d \; ; \quad R_2^2 = a_2^2 - a_2 d \; ; \quad d = a_2 - a_1 - D$$

unde ultima relaţie se deduce din figura 6c. Rezolvîndu-se se obţine

$$a_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2 - D^2 - k^2}{2D} \; ; \quad a_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2 - D^2 - k^2}{2D} \; ; \quad d = \frac{k^2}{D}$$

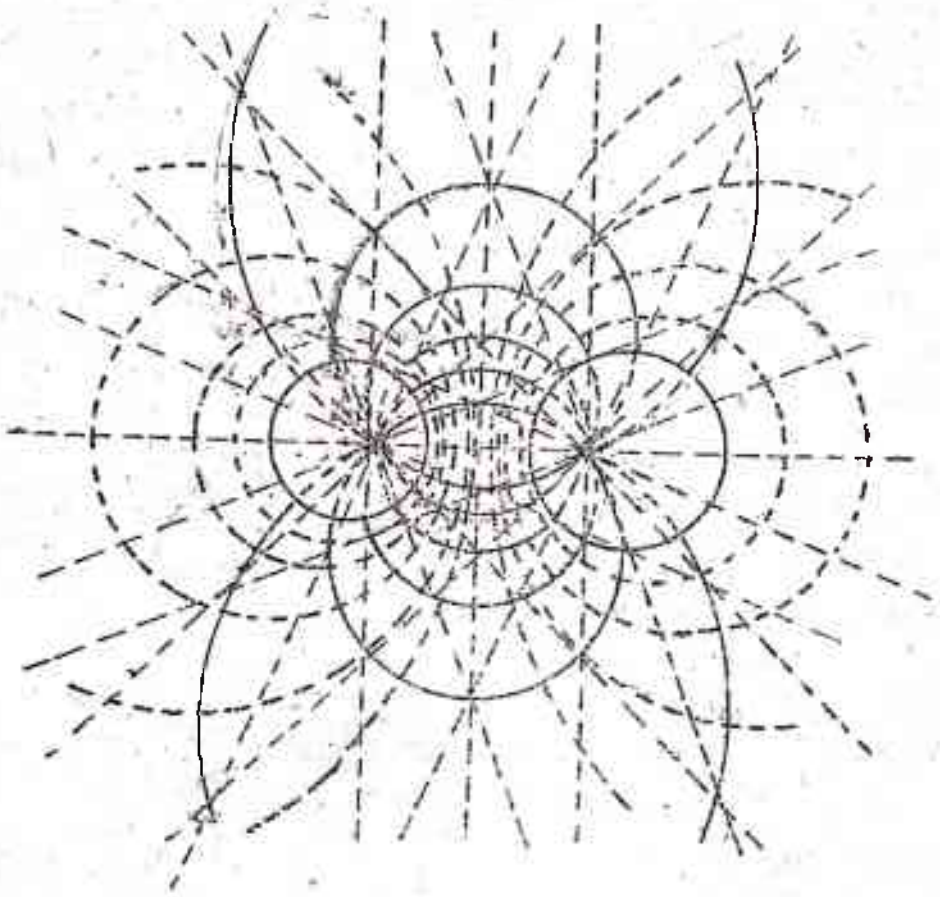


Fig. 59

unde:

(79 a) $k^2 = (D^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 - 4 R_1^2 R_2^2$

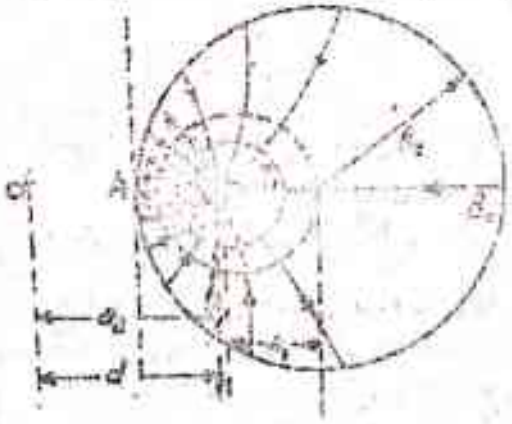


Fig. 60
Cîmpul electrostatic dintre două conductoare cilindrice cu axele paralele

Tensiunea dintre cei doi cilindri este:

$$V_1 - V_2 = \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\varepsilon} \ln \frac{R_2(R_2^2+R_1^2-D^2+k^2)}{R_1(R_1^2-R_2^2-D^2+k^2)}$$

şi intensitatea maximă a cîmpului electric este:

$$(74\ r)\ E_{max} = \frac{\varkappa q}{2\pi\varepsilon\varepsilon R_1} \sqrt{\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2 - 2D R_1}{D^2 + R_1^2 - R_2^2 + 2D R_1}}$$

17.4. <u>Cîmpul electrostatic dintre un corp punctiform încărcat şi o sferă conducătoare</u>. Imaginea electrică a sarcinii adevărate punctiforme q, la distanţa d de centrul unei sfere conductoare de rază R şi cu centrul în O în raport cu suprafaţa sferei conductoare şi la potenţial nul, în raport cu sfera de la infinit, este o sarcină q', situată în interiorul sferei, pe dreapta care uneşte centrul ei cu punctul O în care se găseşte sarcina q, între centrul sferei şi sarcina electrică q. Dacă

$$r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha$$

$$r'^2 = R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\alpha$$

sînt distanţele dintre q respectiv q' şi un punct P' al sferei situat în extremitatea unei raze a ei care formează unghiul α cu dreapta OQ, potenţialul sferei e nul dacă:

$$\frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{d\left(\frac{R^2}{d} + d - 2R\cos\alpha\right)}}{\sqrt{d'\left(\frac{R^2}{d'} + d' - 2R\cos\alpha\right)}}$$

şi potenţialul e nul pentru toate punctele sferei, dacă această relaţie e satisfăcută pentru orice valoare a unghiului α. Pentru ca raportul celor două expresiuni din paranteze să fie independent de α trebuie să fie satisfăcută relaţia:

$$(a) \qquad R^2 = dd'$$

Pentru ca, în această ipoteză, să fie satisfăcută şi relaţia

$$(b) \qquad \frac{q^2}{q'^2} = \frac{d}{d'}$$

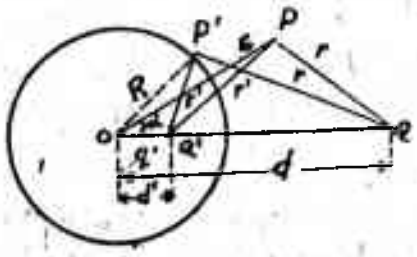


Fig.61
Sarcină şi sferă conductoare.

q' fiind de semn contrar cu q, trebuie să avem:

$$d' = \frac{R^2}{d}\ ;\ q' = -q\sqrt{\frac{d'}{d}};\ q' = -q\frac{R}{d}$$

şi potenţialul electrostatic într-un punct dintre sferă şi sarcina q este deci:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{r} - \frac{R}{d}\,\frac{q}{r'}\right)$$

Condiţiunea (a) arată că punctele Q şi Q' în

care se găsesc sarcinile q şi q' sînt puncte inverse în raport cu sfera.

Dacă sfera este izolată şi neîncărcată, suma sarcinilor ei adevărate e nulă, şi potenţialul ei este constant, fără a fi însă nul dacă potenţialul e nul la infinit. Ajunge ca, în acest caz, să se adauge şi o sarcină - q' în centrul sferei, pentru ca fluxul electric prin sferă să fie nul (sarcina ei totală fiind nulă) şi potenţialul ei să fie constant. În cîmpul suplimentar al acestei sarcini, şi deci şi în cîmpul electric rezultant. Expresiunea potenţialului este, în acest caz

$$V = \frac{\varkappa q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{d}\,\frac{1}{d'} + \frac{R}{d}\,\frac{1}{r_0}\right)$$

dacă r_0 este distanţa dintre centrul sferei şi punctul din exteriorul ei în care se calculează potenţialul.

17.5. <u>Sfera conductoare în cîmpul electrostatic care era iniţial uniform.</u> Dacă sarcina q din ultima aplicaţie se depărtează la infinit şi se măreşte astfel, încît intensitatea cîmpului electric omogen şi îndreptat spre centrul sferei:

$$E_0 = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon}\,\frac{q}{d^2}$$

să rămînă finit, punctul imagine q' tinde astfel către centrul sferei, încît relaţiile (a) şi (b) rămîn satisfăcute, adică:

$$q'\,d' = -\,q\,d'\,\frac{R}{d} = -\,q\,\frac{R^3}{d^2} = -\,\frac{4\pi\varepsilon}{\varkappa}\,E_0\,R^3$$

Sarcina -q' din centrul sferei formează deci împreună cu sarcina +q' care tinde către centrul sferei, un dipol electric al cărui moment $\bar{p}$ este dirijat dinspre +q' spre centru dacă E e dirijat dinspre sferă, adică:

$$(75)\qquad \bar{p} = \frac{4\pi\varepsilon}{\varkappa}\,E_0\,R^3$$

Influenţa unei sfere izolate asupra unui cîmp electric uniform din exteriorul ei e deci egală cu influenţa

---

Fasc. 33 C-da 77/1955, Bazele Electrotehnicii

unui mic corp polarizat, situat în centrul sferei şi avînd momentul electric (75).

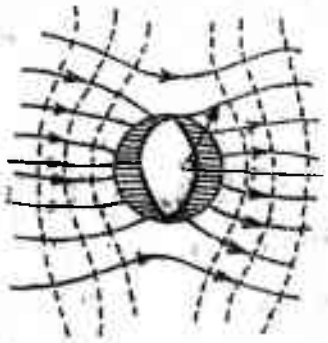


Fig. 62

Sfera conductoare omogenă în cîmpul electric iniţial uniform.

Intensitatea $\overline{E}_s$ a cîmpului electric al acestui moment electric, şi deci intensitatea $\overline{E} = \overline{E}_o + \overline{E}_s$ a cîmpului electric rezultant în exteriorul sferei, se calculează uşor, ca gradient cu semn schimbat al limitei către care tinde suma potenţialelor sarcinilor q' şi - q', cînd distanţa $\overline{\ell}$ dintre ele tinde astfel către zero încît $\lim q' \overline{\ell} = \overline{p}$.

17.6. <u>Cîmpul electric al unei sarcini adevărate punctuale într-unul dintre doi dielectrici cu un plan de separaţie între ei.</u> Fie q sarcina $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ permitivităţile dielectricului în care se găseşte q, respectiv a celuilalt dielectric.

Cîmpul electric stabilit în dielectricii de permitivităţi $\mathcal{E}_1$ şi $\mathcal{E}_2$ - de sarcina adevărată q, care se găseşte în dielectricul $\mathcal{E}_1$ la distanţa d de planul care-l separă de dielectricul $\mathcal{E}_2$, se poate determina printr-o metodă analoagă, cu metoda imaginilor electrice, observînd că la suprafaţa de separaţie dintre dielectrici trebuie să fie satisfăcută condiţiunea de trecere continuă a componentei normale a inducţiei electrice. Se pot satisface aceste condiţiuni folosind încercarea de a reprezenta cîmpul electric din dielectricul $\mathcal{E}_1$ prin cîmpul produs de sarcina adevărată q şi de o sarcină fictivă q' situată în imaginea optică a lui q în raport cu planul de separaţie, adică prin potenţialul

$$V_1 = \frac{K}{4\pi\mathcal{E}_1}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right)$$

şi încercarea de a reprezenta cîmpul din dielectricul 2 prin cîmpul produs de o sarcină fictivă q" situată în locul sarcinii adevărate q, adică prin potenţialul

$$V_2 = \frac{K}{4\pi\mathcal{E}_2}\,\frac{q''}{r}$$

unde r şi r' sînt distanţele dintre un punct curent şi punctele în care se găsesc sarcinile q, respectiv q" şi q'. Această încercare satisface şi legea fluxului electric în fiecare din cei doi dielectrici, adică soluţia reprezintă cîmpul electric care se stabileşte de fapt. Componentele normale ale inducţiei electrice la suprafaţa dintre cei doi dielectrici, contate pozitive în sensul normalei exterioare a dielectricului în care se consideră, sînt:

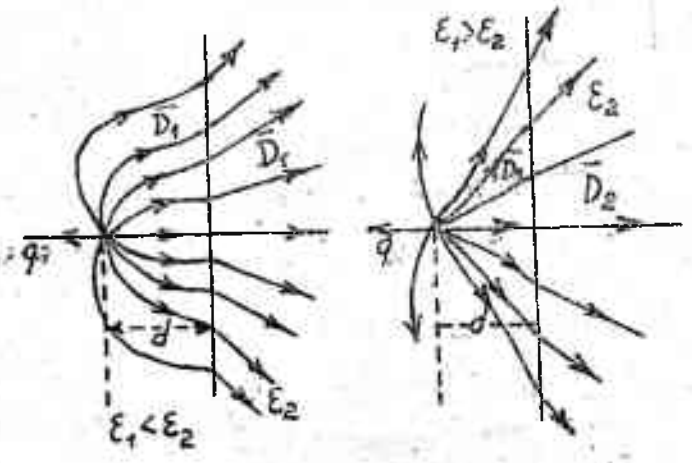


Fig. 63

Cîmpul inducţiei electrice în cîmpul electrostatic al unei sarcini adevărate punctuale, în cazul a doi dielectrici separaţi printr-un plan.

$$D_{n1} = \frac{K}{4\pi}\left(q\frac{d}{r^3} - q'\frac{d}{r'^3}\right);$$

$$D_{n2} = -\frac{K}{4\pi} q''\frac{d}{r^3}$$

unde r = r' la suprafaţa de separaţie, şi deci rezultă din condiţiunea $D_{n1} + D_{n2} = 0$

$$q - q' - q'' = 0$$

Componenta tangenţială a cîmpului electric variază continuu la trecerea prin suprafaţa de separaţie, deci potenţialele V_1 şi V_2 au aceiaşi valoare pe această suprafaţă. Din această egalitate urmează:

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q + q') = \frac{1}{\varepsilon_2} q''$$

şi ea este echivalentă şi cu excluderea straturilor duble de sarcini electrice la suprafaţa de separaţie. Din cele două relaţii de mai sus rezultă valorile sarcinilor fictive q' şi q" :

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \; ; \qquad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

Liniile de cîmp ale cîmpului electric din dielectricul ε_2 sînt deci drepte ale căror prelungiri trec prin q.

iar liniile cîmpului electric din dielectricul $\mathcal{E}_1$ corespund cîmpului pe care l-ar stabili sarcinile q şi q' dacă s-ar găsi într-un dielectric $\mathcal{E}_1$ la distanţa 2 d una de alta sarcina q' fiind de acelaşi semn sau de semn contrar cu q, după cum $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ sau $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$. Figura 62 reprezintă liniile unitate ale inducţiei electrice.

17.7. Capacităţile în serviciu ale liniilor electrice aeriene. Capacităţile se pot calcula direct folosind imaginile electrice ale celor n conducte în raport cu suprafaţa celei mai înalte pături conductoare a Pămîntului, care sînt simetricele lor faţă de această suprafaţă şi au sarcini respectiv egale şi de nume contrare cu sarcinile conductelor (fig.63 bis).

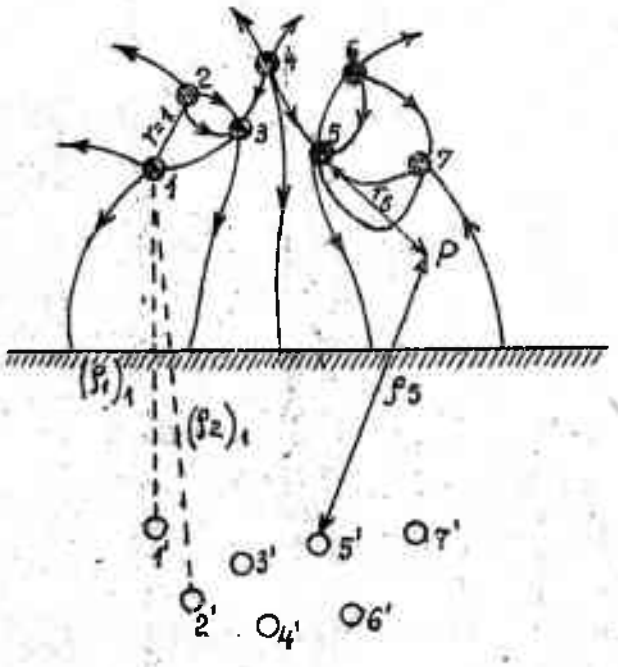


Fig.63 bis

Fiindcă razele conductelor sînt mici în raport cu distanţele între ele, le înlocuim în calculul potenţialului prin fire situate în axa lor. Potenţialul unui astfel de fir, de lungime foarte mare ℓ şi de densitate liniară de sarcină $\rho_\ell = \gamma_1$ într-un punct P, la distanţa r_i de el, într-un dielectric de permitivitate $\mathcal{E}$, este

$$V'_{ip} = C' - \frac{K}{2\pi\mathcal{E}} \gamma_1 \ell n\, r_i$$

Dacă ρ_i e distanţa dintre P şi conducta imagine, potenţialul acesteia în P e:

$$V''_{ip} = C'' + \frac{K}{2\pi\mathcal{E}} \gamma_1 \ell n\, \rho_i$$

Dacă alegem originea potenţialului pe cea mai înaltă suprafaţă conductoare a pămîntului, obţinem pentru potenţialul ambelor conducte încărcate:

$$V_{ip} = V'_{ip} + V''_{ip} = \frac{K}{2\pi\varepsilon}\,\gamma_i\,\ell_n\frac{\rho_i}{r_i}$$

pentru că la suprafaţa pămîntului $V_{ip} = 0$, $\rho_i = r_i$. şi deci $C' + C'' = 0$.

Potenţialul în P al cîmpului celor n perechi de conducte care corespund celor n conducte aeriene e:

$$V_p = \frac{K}{2\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\ell_n\frac{\rho_i}{r_i}$$

Introducînd pentru ρ_i şi r_i valorile ρ_{ik} şi r_{ik} pe care le au cînd punctul P e situat pe suprafaţa conductei k, obţinem tensiunea ei în serviciu V_{sk} în raport cu pămîntul, notarea cu indicele k privind raportarea la suprafaţa conductei k; rezultă

$$V_{sk} = \frac{K}{2\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\ell_n\frac{\rho_{ik}}{r_{ik}}$$

şi deci diferenţa de potenţial între conductele k şi l este:

$$V_{sk} - V_{sl} = \frac{K}{2\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\ell_n\frac{\rho_{ik}\,r_{il}}{r_{ik}\,\rho_{il}}$$

Capacităţile în serviciu C_{sko} şi C_{skj} dintre conducta k şi pămînt, respectiv dintre conductele, cu numerele de ordine k şi j, au următoarele expresiuni, în ipoteza că acestea sînt independente de cîmpurile γ_i ... γ_k :

(a) $$C_{sko} = \frac{\gamma'_k\,\ell}{V_{sk}} = \frac{\gamma'_k\,\ell}{K\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\gamma'_k}\,\ell_n\frac{\rho_{ik}}{r_{ik}}}$$

respectiv,

(b) $$C_{skj} = \frac{\gamma'_k\,\ell}{V_{sk} - V_{sj}} = \frac{2\pi\varepsilon\,\ell}{K\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\gamma'_k}\,\ell_n\frac{\rho_{ik}\,r_{ij}}{r_{ik}\,\rho_{ij}}}$$

Cînd toate fazele unei linii aeriene au aceiaşi tensiune în serviciu şi se poate admite că vîscoza dintre conductele ei are aproximativ aceiaşi sarcină γ_i se obţine:

$$V'_{sk} = \frac{K\gamma'}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\rho_{1k}\,\rho_{2k}\cdots\rho_{nk}}{r_{1k}\,r_{2k}\cdots r_{nk}}$$

fiindcă valoarea argumentului logaritmului variază cu k, tensiunile V_{sk} rezultă neegale, fiindcă γ'_k au fost presupuşi egali. Calculăm în primă aproximaţie, pentru fiecare conductă cu o aceiaşi tensiune în serviciu, egală cu media aritmetică a tensiunilor care rezultă pentru cele n conducte:

$$V_{skm} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V'_{sk} = \frac{K\gamma'}{2\pi\varepsilon} \ln \sqrt[n]{\left(\frac{\rho_{11}\rho_{21}\rho_{31}\cdots\rho_{n1}}{r_{11}r_{21}r_{31}\cdots r_{n1}}\right)\left(\frac{\rho_{12}\rho_{22}\cdots\rho_{n2}}{r_{12}r_{22}\cdots r_{n2}}\right)\cdots\left(\frac{\rho_{1n}\rho_{2n}\cdots\rho_{nn}}{r_{1n}r_{2n}\cdots r_{nn}}\right)}$$

Capacitatea în serviciu a ansamblului de n conducte, care împreună cu densitatea lineară de sarcină a , se poate pune sub forma

$$(c) \qquad C_{skm} = \frac{n\gamma' l}{V_{skm}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{K \ln \frac{\rho_m}{r_e}}$$

unde r_e este raza unei conducte situată în axa de greutate a celor n conducte, la distanţa $h = \frac{\rho_m}{2}$ deasupra pământului care are aceiaşi capacitate în serviciu ca şi ansamblul de conducte date. Dacă această conductă se găseşte în axa de greutate a conductelor liniei, în primă aproximaţie:

$$\rho_m = \sqrt[n^2]{(\rho_{11}\ \rho_{21}\cdots\ \rho_{n1})(\rho_{12}\ \rho_{22}\cdots\rho_{n2})(\rho_{1n}\rho_{2n}\cdots\rho_{nn})},$$

Introducînd această valoare în ultimul membru din expresiunea capacităţii C_{skm} şi expresiunea tensiunii în serviciu V_{skm} în cel de al doilea membru al expresiunii acestei capacităţi, obţinem pentru "raza echivalentă" a sistemului de n conducte expresiunea:

$$(d) \qquad r_e = \sqrt[n^2]{r_{11}\ r_{21}\cdots r_{n1})(r_{12}r_{22}\cdots r_{n2})\cdots(r_{1n}r_{2n}\cdots r_{nn})}$$

Dacă produsele $(r_{1k}r_{2k}\cdots r_{nk})$ sînt egale pentru toate conductele k, deducem următoarea expresiune a razei "echivalente" r_e a liniei:

$$(e) \qquad r_e = \sqrt[n]{r_{1k}\ r_{2k}\cdots r_{nk}}$$

O linie monofazată nesimetrică, de exemplu, are două conducte. Pentru suprafaţa conductei k = 1, avem pentru mărimile din formula

$\rho_{11} = 2h_1$; $r_{11} = a$; $\rho_{21} = \sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}$; $r_{21} = D = \sqrt{\Delta^2+(h_1-h_2)^2}$; $V_{sk} = V_{s1}$; $\gamma_k = \gamma_1$

Pentru suprafaţa conductei i = 2, avem:

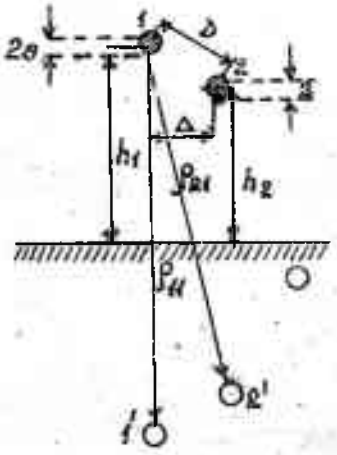


Fig. 64
Linie aeriană monofazată

$\rho_{12} = \sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}$; $r_{12} = D = \sqrt{\Delta^2+(h_1-h_2)^2}$;

$\rho_{22} = 2h_2$; $r_{22} = a$; $V_{sk} = V_{s2}$;

$\gamma_k = \gamma_2$

Capacităţile în serviciu ale conductelor sunt:

$$C_{slo} = \frac{2\pi\varepsilon l}{K\left(\ln\frac{2h_1}{a} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\ln\frac{\sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}}{D}\right)}$$

$$C_{s2o} = \frac{2\pi\varepsilon l}{K\left(\ln\frac{2h_2}{a} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\ln\frac{\sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}}{D}\right)}$$

$$C_s12 = \frac{2\pi\varepsilon\, 1}{K\left(\ln\frac{2h_2 D}{a\sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\ln\frac{\sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}\cdot a}{2h_2 D}\right)}$$

Presupunem linia cu conducte izolate de pământ, adică $\gamma_o = 0$ şi deci $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$. Obţinem $\gamma_2 : \gamma_1 = -1$ şi deci:

$$C_{slo} = \frac{2\pi\varepsilon\, 1}{K\ln\frac{2h_1 D}{a\sqrt{\Delta^2+(h_1+h_2)^2}}}$$

$$C_{s2o} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{K\ell_n \dfrac{2h_2 D}{a\sqrt{\Delta^2 + (h_1+h_2)^2}}};$$

$$C_{s12} = \frac{}{K\,\ell_n \dfrac{2D\sqrt{h_1 h_2}}{a\sqrt{\Delta^2 + (h_1+h_2)^2}}}$$

Dacă linia e simetrică, avem $h_1 = h_2 = h$ şi $\Delta = D$, adică

$$C_{s1o} = C_{s2o} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{K\ell_n \dfrac{2h}{a\sqrt{1 + (2h/D)^2}}};$$

$$C_{s12} = \frac{\pi\varepsilon\ell}{K\ell_n \dfrac{2h}{a\sqrt{1 + (2h/D)^2}}}$$

Pentru foarte multe cazuri curente $\Delta \ll (h_1 + h_2)$ şi putem pune, în primă aproximaţie: $\Delta^2 + (h_1+h_2)^2 \approx (h_1+h_2)^2$. In cazul liniei simetrice putem scrie $1 + (2h/D)^2 \approx \frac{2h}{D}^2$ şi obţinem formulele mai simple

$$C_{s1o} = C_{s2o} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{K\ell_n \frac{D}{a}}$$

$$C_{s12} = \frac{\pi\varepsilon_1}{K\ell_n \frac{D}{a}}$$

Pentru linia trifazată simplă cu conductele fazelor dispuse în triunghiu echilateral avem la suprafaţa unei conducte $k = 1$ următoarele valori pentru mărimile din formule, dacă notăm cu h înălţimea centrului de greutate al triunghiului format de conducte, deasupra pământului:

$$r_{11} = a;\ r_{31} = r_{21} = D;\quad \rho_{11} = \rho_{21} = \rho_{31} \approx 2h$$

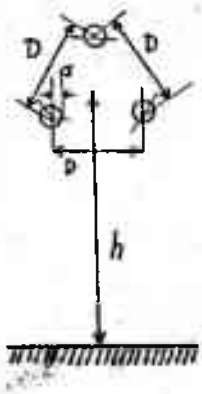


Fig.65
Linie aeriană trifazată

Mărimile au în primă aproximaţie, aceleaşi valori şi pentru celelalte două conducte. Rezultă că, dacă admitem $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, obţinem şi $V\Delta_{1o} + V\Delta_{2o} + V\Delta_{3o} = 0$. Avem deci: $\gamma_1 + \gamma_2 = -\gamma_3$, şi obţinem pentru capacitatea în serviciu dintre oricare conductă şi pămînt:

$$C_{s1o}=C_{s2o}=C_{s3o}=\frac{2\pi\varepsilon_1}{K\left(\ln\frac{2h}{a}+\frac{\gamma_2+\gamma_3}{\gamma_1}\ln\frac{2h}{D}\right)}$$

$$=\frac{2\pi\varepsilon_1}{K\ln\frac{D}{a}}$$

adică o formulă identică cu formula pentru liniile monofazate.

17.8. Capacităţile în serviciu ale cablurilor electrice. Capacităţile cablurilor cu cămaşă de plumb cu conducte alăturate se pot calcula direct ca pentru liniile aeriene, cu ajutorul imaginilor electrice, considerate în raport cu cămaşa de plumb a cablului. Înlocuim conductele şi imaginile lor electrice prin fire în axele lor. Expresiunea potenţialului a două fire de curent O_1 şi O'_1 cu densităţile lineare γ_1 şi $-\gamma_2$, în punctul P la distanţa r'_1 şi r''_1 de O_1 şi O'_1, este

$$V_p=\frac{K\gamma_1}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1''}{r_1'}$$

Pentru ca suprafaţa interioară a cămăşii cablului să fie echipotenţială în acest cîmp, trebuie ca raportul $r''_1 : r'_1$ să fie constant şi egal pentru toate punctele ei P condiţiune care e satisfăcută cînd e satisfăcută pentru două dintre punctele ei. Scriind egalitatea rapoartelor pentru punctele C_1 şi C_2, obţinem: $(r_1'' : r_1')_{C_1} = (D:R) : (R-f)$ şi $(r_1'':r_1')_{C_2} = (D + R) : (R + f)$. Egalînd aceste două rapoarte obţinem valoarea lui D şi valorile corespunzătoare pentru

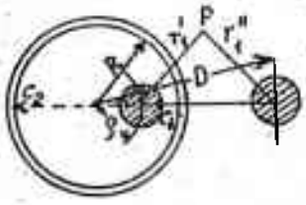


Fig.66
Parte dintr-un cablu

$(D - \rho)$ şi $(D + \rho)$:

$$D = \frac{R^2}{\rho}\ ;\quad D - \rho = \frac{R^2 - \rho^2}{\rho}\ ;$$

$$D + \quad = \frac{R^2 + \rho^2}{\rho}\ .$$

In cazul cablurilor monofazate (fig.67) avem pentru suprafaţa conductorului k = 1.

$$r_{11} = a;\quad r_{21} = 2\rho;\quad \rho_{11} = D - \rho\ ;$$
$$\rho_{21} = D + \rho$$

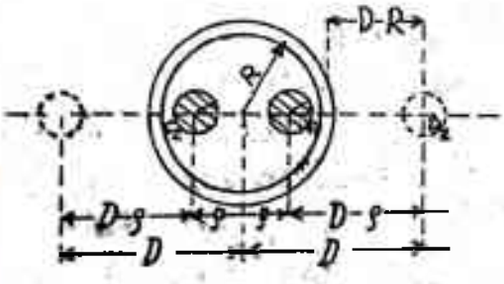


Fig.67
Secţiune printr-un cablu monofazat

Observînd expresiunile pentru $(D - \rho)$ şi $(D + \rho)$, obţinem pentru regimul $\gamma_1 = -\gamma_2$ adică $V_{s1} = -V_{s2}$, următoarele expresiuni ale capacităţilor în serviciu:

$$C_{s1o} = C_{s2o} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\kappa\left(\ln\frac{D-\rho}{a} - \ln\frac{D+\rho}{2\rho}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_1}{\kappa \ln\frac{2\rho(R^2 - \rho^2)}{a(R^2 + \rho^2)}}$$

$$C_{s12} = \frac{1}{2}\ C_{s2o}\ .$$

In cazul cablurilor trifazale (fig.68 a şi b) avem pentru suprafaţa conductorului k = 1:

$$r_{11} = a;\ r_{21} = r_{31} = \rho\sqrt{3};\quad \rho_{11} = D - \rho\ ;\quad \rho_{21} = \rho_{31} =$$

$$= \sqrt{D^2 + \rho^2 - 2D\rho\ \cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{\frac{R^4 + R^2\rho^2 + \rho^4}{\rho^2}}$$

şi obţinem pentru regimul $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$, pentru capacitatea în serviciu a conductei k = 1 faţă de cămaşă (faţă de pămînt) :

$$C_{s1o} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\left(\ln\frac{D-\ell}{a} - \ln\sqrt{\frac{R^4+R^2\rho^2+\rho^4}{3\rho^4}}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_1}{n\ln\frac{3\rho^4(R^2-\rho^2)^2}{a^2\rho^2(R^4+R^2\rho^2+\rho^4)}}$$

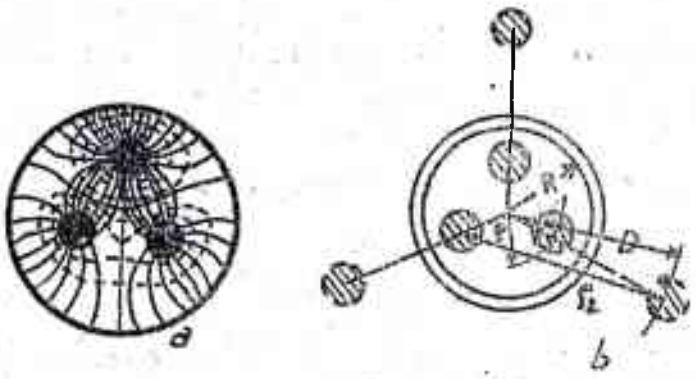


Fig.68
Secţiune printr-un cablu trifazat

Înmulţind numitorul şi numărătorul argumentului logaritmului cu $(R^2-\rho^2)$ şi observând că $(R^4+R^2\rho^2+\rho^4)(R^2-\rho^2) = (R^6-\rho^6)$, obţinem:

$$C_{s1o} = C_{s2o} = C_{s3o} = \frac{4\pi\varepsilon_1}{K\ln\frac{3\rho^2(R^2-\rho^2)^3}{a^2(R^6-\rho^6)}}$$

18. METODA INVERSIUNII

18.1. Principiul metodei inversiunii. Fie o repartiţie de sarcini adevărate punctuale q_i într-un dielectric omogen de permitivitate ε presupus a fi în echilibru electrostatic şi fie V_j potenţialul presupus cunoscut al cîmpului electrostatic al sarcinilor, în punctul Pj, la distanţele r_{ij} de punctele Q_i, în care se găsesc sarcinile q_i (fig.32).

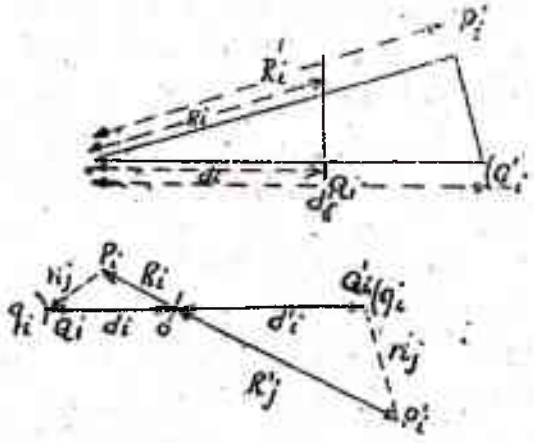


Fig.69
Figură pentru explicarea principiului metodei inversiunii.

Fie O un centru de inversiune, faţă de care se inversează, cu o putere constantă de inversiune p^2 toate punctele Q_i şi P_j din cîmpul electrostatic dat, care se găsesc la distanţele d_i, respectiv R_j, de centrul de inversiune.

O şi fie Q'_i şi P'_j punctele inverse ale lui Q_i şi P_j în raport cu O iar d'_i şi R'_j distanţele dintre centrul de inversiune şi punctele Q'_i şi P'_j (v.fig.32). Afirmăm că dacă se suprimă sarcinile q_i şi se înlocuesc inversele Q'_i ale punctelor Q_i, în care se găsesc aceste sarcini cu sarcinile

$$q'_i = q_i \frac{R_i}{p}$$

acestea au în punctele P'_j, cari sînt inversele punctelor P_j potenţialul electrostatic:

$$V'_j = V_j \frac{R_j}{p}$$

In adevăr dacă toate punctele Q_i, Q'_j şi P_j, P'_j sînt inverse în raport cu puterea de inversiune p^2 distanţele d_i, d'_i şi R_j, R'_j satisfac relaţiile

$$d_i d'_i = R_j R'_j = p^2$$

Dacă potenţialul sarcinilor q_i în punctul curent P_j este deci

$$V_j = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_{ij}} = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{q_i}{\sqrt{R^2_j + d_i^2 + 2 R_j d_i \cos\alpha_{ij}}}$$

iar potenţialul V'_j al sarcinilor q'_{ai} în inversul P'_j al punctului curent P_j este:

$$V'_j = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{q'_i}{\sqrt{R'^2_j + d'^2_i + 2 R'_j d'_i \cos\alpha_{ij}}} =$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \sum_i \frac{\frac{p}{d_i} q_i}{\sqrt{\frac{p^4}{R^2_j} + \frac{p^4}{d^2_i} + \frac{2p^4}{R_j d_i} \cos\alpha_{ij}}}$$

$$= \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{p} \sum_i \frac{R_j q_i}{\sqrt{d_i^2 + R_j^2 + 2 d_i R_j \cos\alpha_{ij}}}$$

adică dacă factorul $\frac{R_i}{p}$ e comun tuturor termenilor din ultima sumă rezultă în adevăr relaţia de mai sus. Această

metodă a inversiunii permite să se obţină cu ajutorul potenţialului cunoscut Vj al unei anumite repartiţii de sarcini adevărate q_i, potenţialul $V'_j = V_j \frac{Ri}{p}$ produs în inversele punctelor de potenţial Vj în raport cu un anumit centru, de sarcinile $q'_i = q_i \frac{p}{d_i}$ presupuse situate în inversul punctelor de sarcini q_i în raport cu acelaşi centru şi cu aceiaşi putere de inversiune. Dezavantajul acestei forme a metodei inversiunii consistă în faptul că, dacă sarcinile q_i sînt în echilibru electrostatic pe o suprafaţă conductoare Σ din cîmp, sarcinile q'_i din sistemul obţinut prin inversiune nu sînt în general în echilibru pe suprafaţa inversă Σ', adică această ultimă suprafaţă nu poate fi presupusă conductoare. Pentru a evita acest neajuns, e suficient să se presupună că în centrul de inversiune există sarcina adevărată

$$q'_o = q_o = - p V_\Sigma ,$$

dacă V_Σ e potenţialul suprafeţei Σ, a cărei inversă vrem să fie echipotenţială, în cîmpul sarcinilor q'_i şi q_o. In adevăr în aceste condiţiuni, potenţialul V'_Σ al suprafeţei Σ' în cîmpul sarcinilor q'i şi q'o este nul, fiindcă în orice punct al ei, la distanţa R'_j de centrul de inversiune:

$$v'j = V_\Sigma \frac{Ri}{p} - V_\Sigma \frac{p}{R'_j} = V_\Sigma \frac{p}{R'_j} - V_\Sigma \frac{p}{R'_j} = 0$$

Densităţile de volum ale sarcinilor adevărate q_i şi q'_i în punctele inverse Q_i şi Q'_i se obţine observînd că raportul elementelor de volum corespunzătoare este egal cu raportul cuburilor distanţelor dintre ele şi centrul de inversiune aşa încît

$$dq' = \rho' dv' = \rho' dv \frac{d'^3}{d^3} = \frac{p}{d} dq = \frac{p}{d} \rho dv$$

de unde rezultă:

$$\rho' = \frac{p}{d'^3} d^2 \cdot \rho = \frac{p^5}{d'^5} \rho = \frac{d^5}{p^5} \rho$$

Densităţile de suprafaţă corespunzătoare se ob-

ţia observînd că raportul elementelor de arie corespunzătoare e egal cu raportul pătratelor distanţelor dintre ele şi centrul de inversiune, aşa încît:

$$dq' = \sigma'_s \, dA' = \sigma'_s dA \frac{d'^2}{d^2} = \frac{p}{d} \, dq = \frac{p}{d} \sigma_s \, dA,$$

de unde rezultă:

$$\sigma'_s = \frac{pd}{d'^2} \sigma_s = \frac{d^3}{p^3} \sigma_s = \frac{p^3}{d'^3} \sigma_s .$$

Pentru relaţia dintre densităţi de linie corespunzătoare ale sarcinilor adevărate se obţine printr-o consideraţie analoagă:

$$\rho'_l = \frac{p}{d'} \rho_l = \frac{d}{p} \rho_l$$

16.2. <u>Cîmpul electrostatic din dielectricul omogen şi isotrop dintre un corp punctual cu o sarcină şi o sferă metalică omogenă</u>. Fie q' sarcina adevărată punctuală, d' distanţa între ea şi centrul sferei conductoare de rază R şi ε permitivitatea dielectricului dintre sarcină şi sferă (v.fig. 7o). Rezolvăm problema considerînd cîmpul cunoscut al sferei în echilibru electrostatic, care are densitatea de suprafaţă constantă a sarcinii adevărate şi în care potenţialul sferei de capacitate $C = \frac{4\pi\varepsilon_R}{\varkappa}$ este:

$$V_s = \frac{q}{C} = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon R} \cdot 4\pi R^2 \sigma_s = \frac{\varkappa R}{\varepsilon} \sigma_s .$$

Inversînd sfera şi punctele din cîmp în raport cu un centru de inversiune situat în punctul cu sarcina q', astfel încît sfera să se transforme prin inversiune în ea însăşi, adică alegînd puterea de inversiune $p^2 = d'^2 - R^2$ şi alegînd pe q astfel încît q' să fie egal cu - p V_s:

$$q' = - p V_s = - \sqrt{(d'^2 - R^2)} \frac{\varkappa R}{\varepsilon} \sigma_s$$

se determină σ_s şi deci densitatea de sarcină σ'_s pe sfera care se găseşte sub influenţa sarcinii q' :

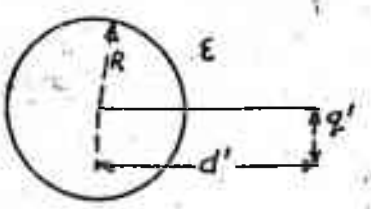


Fig.7o
Sarcină şi sferă conductoare izolată.

$$\rho_s = \frac{\rho^3}{d'^3}\rho_s = -\frac{\varepsilon}{r}\frac{d'^2 - R^3}{Rd'^3}q'$$

Ea determină împreună cu q', cîmpul electric.

19. METODA FUNCTIUNILOR ANALITICE

13.1. Ecuaţiile Cauchy-Riemann.

Fie o funcţiune $w = u + jv$, unde $j = \sqrt{-1}$, de variabila complexă $z = x + jy$. In aceste condiţiuni, u şi v, adică partea reală (u) şi imaginară (v) a funcţiunii w, sînt funcţiuni de x şi y, părţile reală şi imaginară ale variabilei independente z. Dacă se reprezintă z într-un plan complex şi w în altul, funcţiunea w de variabilă complexă asociază fiecărui punct al planului z cîte unul sau mai multe puncte ale planului w, după cum w e sau nu e funcţiune univocă de z. O clasă de funcţiuni e formată de clasa funcţiunilor continue, o alta mai restrînsă, e formată de funcţiunile care admit o derivată în raport cu variabila independentă z (într-un anumit domeniu al acestei variabile; acestea se numesc funcţiuni analitice în domeniul considerat.

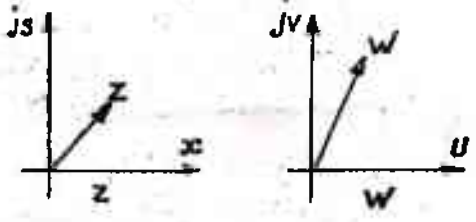


Fig.71. a. b.
Planele variabilelor complexe z şi w

Derivata unei funcţiuni de variabilă complexă e limita (cînd această limită există, adică e finită şi bine determinată), a cîtului dintre creşterea funcţiunii şi creşterea corespunzătoare a variabilei, cînd creşterea variabilei tinde către zero, dar are o orientare carecare, adică un raport oarecare între componenta ei imaginară Δ_y şi reală Δx:

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z}$$

Fiindcă limita acestui cît trebuie să fie aceiaşi pentru un z dat, oricare ar fi orientarea după care Δz tinde către zero, u (x,y) şi v(x,y) trebuie să satisfacă şi alte condiţiuni, afară de faptul că admit derivate parţiale în raport cu x şi y. Spre a le găsi, se aleg pentru dz=dx+jdy două orientări diferite, pentru simplificarea calculelor, una după Ox, adică dz = dx şi una după Oy, adică dz=jdy şi se egalează între ele expresiunile derivatei astfel obţinute:

$$(76\ a) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial (jy)} = \frac{dw}{dz} \ ,$$

ultima expresiune fiind obţinută prin adunarea numitorilor şi numărătorilor primelor două. Cei doi ∂ w de mai sus nu sînt egali, ci unul corespunde lui dx, iar celălalt lui jdy; prin adunarea lor se obţine dw, care corespunde variaţiei dz=dx+jdy a variabilei şi probează că, dacă egalitatea de derivată e satisfăcută pentru două direcţii dx şi jdy ale lui dz, ea e satisfăcută pentru toate direcţiile dx, fiindcă dx şi jdy sînt independente.

Cu $w = u + jv$ se obţine din ultima relaţie:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial (u+jv)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{j}\frac{\partial (u + jv)}{\partial y} = \frac{1}{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Această nouă relaţie e satisfăcută numai cînd părţile reale şi imaginare sînt respectiv egale între ele, adică dacă

$$(76) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Pentru ca o funcţiune de variabilă complexă să admită o derivată - adică să fie analitică - trebuie deci ca părţile ei reală (u) şi imaginară (v) să admită derivate parţiale în raport cu x şi y, şi aceste derivate să satisfacă şi ecuaţiile de mai sus, numite ecuaţiile lui Cauchy-Riemann. De asemenea, dacă două funcţiuni de două variabile: u(x,y) şi

v(x,y) satisfac ecuaţiile lui Cauchy-Riemann, suma u(x,y) + + jv (x,y) reprezintă o funcţiune analitică de z = x + jy.

Derivînd membrii primei relaţii de mai sus în raport cu x, pe ai celei de a doua în raport cu y şi adunînd, se obţine :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (77\ a)$$

Derivînd membrii primei relaţii de mai sus în raport (42 a) cu y, pe ai celei de a doua în raport cu x şi scăzînd se obţine :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (77\ b)$$

Atît componenta reală (u) cît şi cea imaginară (v) a unei funcţiuni analitice satisfac deci ecuaţia cu derivate parţiale în două variabile a lui Laplace. Dacă se iau însă două funcţiuni de două variabile u (x,y) şi v (x,y) astfel încît fiecare dintre ele să satisfacă, ecuaţia lui Laplace, mărimea u(x,y) + jv(x,y) nu reprezintă în general, o funcţiune analitică. Pentru aceasta trebuie ca între u (x,y) şi v(x,y) să mai existe cel puţin una dintre ecuaţiile lui Cauchy-Riemann, - ceeea ce, împreună cu împrejurarea că u (x,y) şi v(x,y) satisfac ecuaţia lui Laplace, asigură şi satisfacerea celeilalte ecuaţii a lui Cauchy-Riemann. In acest caz funcţiunile reale u şi v se numesc funcţiuni conjugate. Ele au proprietatea că familiile de curbe $u = \lambda$ şi $v = \mu$, de unde λ şi μ sînt parametri. sînt în planul z familii de curbe care sînt unele traiectoriile ortogonale ale celorialte. In adevăr, din ecuaţiile lui Cauchy-Riemann rezultă $\left(\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -1$, adică produsul tangentelor trigonometrice ale unghiurilor formate de axa x cu tangentele într-un punct la cele două curbe $u = \lambda$ şi $v = \mu$ care trec printr-un punct, e egal cu - 1, ceeace arată că aceste tangente sînt perpendiculare una pe alta.

Cînd unei valori z îi corespund mai multe valori pentru funcţiunea w, în reprezentarea corespunzătoare din

planele complexe îi corespund unui punct al planului z mai multe puncte ale planului w. Cînd se întîlnesc astfel de cazuri, se poate alege pentru w, după un criteriu unitar, una dintre ele, şi se spune că se operează cu una din ramurile funcţiunii. Dacă interesează în aplicaţii o regiune a planului z căreia i se parcurge conturul, se alege pe el sensul pozitiv astfel încît parcurgîndu-l, regiunea care interesează să rămînă la mîna stîngă, adică sensul matematic pozitiv.

19.2. Metoda funcţiunilor analitice. Fiindcă părţile reală şi imaginară U(x,y) şi V(x,y) ale unei funcţiuni analitice W de variabila z = x + jy satisfac ecuaţia lui Laplace şi fiindcă în familiile de curbe U = λ şi V = μ curbele unei familii sînt traiectoriile ortogonale ale curbelor celeilalte familii, rezultă că atît U(x,y) cît şi V(x,y) poate reprezenta potenţialul scalar al unui cîmp laplacian plan, posibil; mai rezultă că, dacă V(x,y) e potenţialul scalar, adică dacă V=μ sînt ecuaţiile liniilor echipotenţiale, U = λ sînt ecuaţiile liniilor de cîmp ale aceluiaşi cîmp laplacian plan - şi reciproc: dacă U = λ sînt ecuaţiile liniilor echipotenţiale, V=μ sînt ecuaţiile liniilor de cîmp.

Dacă se alege deci o funcţiune analitică oarecare W, de variabila complexă z şi se trasează în planul z liniile echipotenţiale, de ex V = μ cuprinse între două valori ale potenţialului V = μ' şi V = μ'' şi se trasează şi liniile de cîmp corespunzătoare U = λ, se obţine spectrul unui cîmp laplacian plan, cum sînt cîmpurile electrostatice plane, în domeniile în care ε nu depinde de x şi y, şi nu există sarcini electrice adevărate.

Dacă partea imaginară V(x,y) a unei funcţiuni analitice W reprezintă în planul z potenţialul unui cîmp laplacian plan, cum vom admite de obiceiu, vectorul cîmp $\bar{G}$, egal cu gradientul cu semn schimbat al potenţialului, se poate reprezenta sub forma complexă :

$$G_z = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + j\,\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$-j\left(\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

Dacă se observă cea de a treia ecuaţie Cauchy-Riemann, se obţine

$$\frac{dW}{dz} = j\left(\frac{\partial V}{\partial x} - j\,\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

Comparînd cu expresiunea lui G_z se deduce că G_z e conjugata complexă a expresiunii $j\frac{dW}{dz}$. Dacă se notează conjugata complexă cu un asteric, se obţine deci :

$$(78\ a) \qquad G_z = \left(j\,\frac{dW}{dz}\right)^{*} = \left(\frac{j}{\frac{dz}{dw}}\right)^{*}$$

Dacă partea reală U(x,y) a unei funcţiuni analitice w ar reprezenta în planul z potenţialul unui cîmp laplacian plan, expresiunea complexă a vectorului cîmp ar fi :

$$G'z = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + j\,\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Dacă se observă cea de a doua ecuaţie Cauchy-Riemann se obţine :

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial U}{\partial x} - j\,\frac{\partial U}{\partial y}$$

Comparînd cu expresiunea lui G'z se deduce :

$$(78\ b) \qquad G'_z = -\left(\frac{dW}{dz}\right)^{*} = -\left(\frac{1}{\frac{dz}{dW}}\right)^{*}$$

Se obţin expresiuni analoage dacă se consideră $z = z(W)$ ca funcţiune analitică de W. In acest caz, liniile $x = const$ şi $y = const.$ din planul W, corespund dreptelor $x = const.$ şi $y = const$ din planul z, iar expresiunile complexe ale intensităţii cîmpului sînt :

$$(78\ c) \qquad G_W = \left(j\,\frac{dz}{dW}\right)^{*} = \left(\frac{j}{\frac{dW}{dz}}\right)^{*}$$

Dacă y reprezintă potenţialul cîmpului laplacian plan în planul W, şi

$$(78\ d) \qquad G'_W = -\left(\frac{dz}{dW}\right)^{*} = -\left(\frac{1}{\frac{dW}{dz}}\right)^{*}$$

dacă x reprezintă potenţialul cîmpului în planul W.

Stabilim o expresiune a capacităţii referitoare la cîmpul dintre liniile de cîmp $U = U_1$ şi $U = U_2 < U_1$, dintre două conductoare cilindrice (prismatice) de lungimea l normală pe secţiune, în ipoteza că partea imaginară V a funcţiunii W(z) reprezintă potenţialul cîmpului electrostatic. Densitatea de suprafaţă ρ_s a sarcinii adevărate pe conductorul de potenţial U_2 are următoarea valoare absolută :

$$/\rho_s/ = \frac{\varepsilon}{\kappa} E_n = \frac{\varepsilon}{\kappa} \left/ \frac{dW}{dz} \right/_{V=0}$$

Capacitatea are deci următoarea expresiune :

$$(79) \qquad C = \frac{q}{V_0} = \frac{1}{V_0} \int_{z_2}^{z_1} /\rho_s/ \cdot /dz/ = \frac{\varepsilon l}{\kappa V_0} \int_{z_2}^{z_1} \left/ \frac{dW}{dz} \right/_{V=0} /dz/ =$$

$$= \frac{\varepsilon l}{\kappa V_0} \int_{z_2}^{z_1} /dW/_{V=0} = \frac{\varepsilon l}{\kappa V_0} \int_{u_2}^{u_1} /dU/ = \frac{\varepsilon l}{\kappa V_0} (U_1 - U_2)$$

Se obţin deci simplu şi forţele lagrangiene X_i corespunzătoare coordonatelor generale ξ_i :

$$(80) \qquad X_i = \frac{V^2_0}{2} \frac{\partial C}{\partial \xi_i} = \frac{\varepsilon l V_0}{2\kappa} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U_2}{\partial \xi_i} \right) .$$

Dacă în expresiunile analitice ale funcţiunilor de variabilă reală se înlocuieşte variabila reală x prin variabilă complexă $z = x + jy$, se obţin expresiuni ale unor funcţiuni de variabilă complexă, care sînt analitice (în afară de anumite puncte din planul z). Derivatele lor se obţin, în acest caz formal, ca şi derivatele funcţiunilor de variabilă reală. De ex. $\frac{dz^n}{dz} = n\, z^{n-1}$, etc.

Se pot indica deci simplu funcţiuni analitice şi acestea sînt soluţiile unor probleme de cîmpuri electrostatice plane, în dielectrici omogeni, isotropi şi fără sarcini adevărate. Dezavantajul procedeului consistă în faptul că abia după ce s-a ales funcţiunea analitică şi s-au separat părţile ei reală şi imaginară, se constată care e forma liniilor echipotenţiale ale cîmpului pe care-l descrie funcţiunea pe cînd în problemele de Electrostatică sînt date două (sau mai multe) linii echipotenţiale (liniile de contur ale conductoarelor) sau linii echipotenţiale şi anumite linii de cîmp, care determină un domeniu, şi se cere funcţiunea care reprezintă potenţialul scalar al cîmpului electrostatic laplacian plan care satisface aceste condiţiuni pe frontiera domeniului. Cu toate acestea, metoda indirectă a funcţiunilor analitice prezintă avantaje în calcule - şi se foloseşte deci în Electrostatică. Cu ajutorul reprezentării conforme se poate rezolva însă adesea şi problema determinării funcţiunii analitice care corespunde unor condiţiuni date pe frontieră, care determină univoc această funcţiune, conform teoremelor unicităţii în problemele Neumann şi Dirichlet.

19.3. <u>Efectul de ecran al grilajelor</u>. Considerăm un grilaj plan, din bare cilindrice paralele, la distanţa h de un perete conductor şi avînd barele la distanţele a una de alta, mari faţă de diametrul barelor şi studiem felul în care acest grilaj protejează domeniul dintre el şi perete contra cîmpurilor electrice omogene perpendiculare pe grilaj E_0 care există în interiorul lui (fig.72).

Partea reală a funcţiunii analitice

$$(a) \qquad W \equiv U + jV = A \ln \left(2 \sin \frac{\pi z}{a}\right)$$

unde A e o constantă care depinde de tensiunea dintre grilaj şi perete, reprezintă potenţialul cîmpului electrostatic din acest caz, dacă se alege axa Ox normală pe barele grilajului şi situată în planul lui. Pentru a analiza cîmpul pe care-l reprezintă w, se foloseşte relaţia

$$\sin \frac{\pi z}{a} = \sin \frac{\pi}{a}(x + jy) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{a} x \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} y + j \cos \frac{\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} y$$

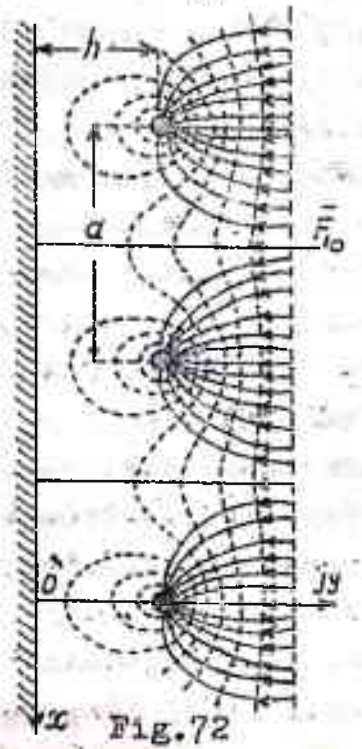


Fig.72

Efectul de ecran al unui grilaj metalic

Înlocuind în w şi separînd partea reală de cea imaginară, se obţine :

$$U = A \ln 2 \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{a} + \sin^2 \frac{\pi x}{a}} ;$$

$$V = A \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{th} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{a}}$$

Fie U potenţialul. Pentru x şi y mic, adică în jurul originii, se pot dezvolta în série funcţiunile trigonometrice şi hiperbolice şi se pot întrerupe dezvoltările la termenul al doilea :

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} y = \frac{\pi}{a} y ; \sin \frac{\pi}{a} x = \frac{\pi}{a} x$$

şi deci :

$$U = A \ln 2 \frac{\pi}{a} \sqrt{x^2 + y^2} = A \ln \frac{2\pi r}{a}$$

unde r e distanţa de la origine, adică expresiunea reprezintă în imediata apropiere a originii, potenţialul unui fir rectiliniu, care trece prin origine şi reprezintă una dintre barele grilajului. Expresiunea potenţialului rămîne neschimbată cînd se scrie $x' = x + ka$, unde k e întreg, ceea ce arată că în jurul tuturor punctelor $x = \pm ka$ ($k = 0,1,2,\ldots$) există potenţialul cîte unui fir rectiliniu, sau că există cîte o bară a grilajului în toate punctele $x = \pm Ka$.

Pentru valori mai mari ale lui y, adică departe de grilaj

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} y \approx \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2} y}$$

şi $$\sin \frac{\pi}{a} x \ll \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} y$$

adică $$U = A \frac{\pi}{a} y$$

ceea ce arată că în această regiune cîmpul este omogen, adică partea reală a funcţiunii W reprezintă în adevăr potenţialul cîmpului barelor echidistante ale grilajului, fiindcă satisface condiţiunile lui la limită, la depărtare mare de planul grilajului, şi, la suprafaţa barelor lui, cînd barele sînt cilindrice şi foarte subţiri, sau le satisface aproximativ la suprafaţa barelor, cînd acestea nu sînt cilindrice.

Influenţa peretelui plan conductor se reprezintă introducînd imaginile electrice ale barelor în raport cu el. Dacă barele au ordonatele $y = h$ şi imaginile lor electrice ordonatele $y = -h$, urma suprafeţei conductoare a peretelui e de-a lungul axei Ox, şi potenţialul barelor grilajului se obţine din expresiunea de mai sus a lui U înlocuind pe y cu $(y-h)$ iar potenţialul imaginelor lor electrice, înlocuind pe y cu $(y+h)$ şi schimbînd semnul lui U, fiindcă sarcinile lor sînt egale şi de nume contrare cu sarcinile barelor grilajului. La suma acestor două potenţiale care tinde către zero cînd y tinde către infinit, trebuie adunat potenţialul $E_o y$ al cîmpului omogen - E_o, perpendicular pe grilaj, de influenţa căruia urmează să fie protejat domeniul dintre el şi perete. Suma celor trei potenţiale e :

$$(b) \quad U = E_o y + A \ell n \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{a}(y-h) + \sin^2 \frac{\pi}{a} x}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{a}(y+h) + \sin^2 \frac{\pi}{a} x}}$$

iar potenţialul peretelui $y = 0$ e zero: $U = 0$. Cînd se protejează contra cîmpurilor electrice încăperile de comandă din laboratoarele de înaltă tensiune se pune grilajul şi peretele conductor la pămînt, adică ambele sisteme conductoare la potenţialul zero. In cazul acesta $U = 0$ pentru $y = h$ şi $x = r_o$ unde r_o e raza barelor şi e mică faţă de a şi h, adică :

$$U = E_0 h + A \ell n \frac{\sin \frac{\pi}{a} r_0}{\sqrt{sh^2 \frac{\pi}{a} 2h + \sin^2 \frac{\pi}{a} r_0}} \approx E_0 h + A \ell n \frac{\frac{\pi}{a} r_0}{sh \frac{2\pi}{a} h}$$

de unde rezultă

$$A = \frac{E_0 h}{\ell n \left(\frac{a}{\pi r_0} sh \frac{2\pi}{a} h \right)}$$

Cîmpul electric e maxim de-a lungul perpendicularelor pe perete prin mijlocul dintre bare, unde $x = \frac{a}{2} \pm ka$ şi deci $\sin \frac{\pi}{a} x = 1$, adică unde

$$(c) \quad U = E_0 y + E_0 h \frac{\ell n \frac{ch \frac{\pi}{a}(y-h)}{ch \frac{\pi}{a}(y+h)}}{\ell n \left(\frac{a}{\pi r_0} sh \frac{2\pi}{a} h \right)}$$

şi cîmpul electric de-a lungul ei este

$$(d) \quad E_y = - \frac{\partial U}{\partial y} = E_0 \left[1 + \frac{\pi}{a} h \frac{th \frac{\pi}{a}(y-h) - th \frac{\pi}{a}(y+h)}{\ell n \left(\frac{a}{\pi r_0} sh \frac{2\pi}{a} h \right)} \right]$$

Raportul $k = Ey : E_0$ dintre cîmpul electric la diferite distanţe $y < h$ de perete şi cîmpul electric omogen din exterior măsoară efectul de slăbire a cîmpului prin grilaj-ecran. Dacă argumentul e mare, tangenta hiperbolică are aproximativ valoarea unu şi sinusul hiperbolic se poate înlocui cu jumătate din exponenţiala aceluiaşi argument. Dacă $h \gg a > 2\pi r_0$ şi $y = 0$, urmează pentru perete

$$(e) \quad k' = \frac{E'y}{E_0} = \frac{a}{2\pi h} \ell n \frac{a}{2\pi r_0}$$

şi pentru mijlocul dintre barele grilajului, în planul lui :

$$(f) \quad k'' = \frac{E''y}{E_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{2\pi h} \ell n \frac{a}{2\pi r_0} \right) = \frac{1}{2} (1 + k')$$

Un grilaj ecran din bare cilindrice verticale, de rază $r_0 = 0{,}0025$ m şi la distanţa $a = 0{,}0425$ m una de alta şi protejînd un perete conductor la distanţa $h = 1$ m de ele,

reduce, pe perete, intensitatea unui cîmp electric exterior la următoarea fracţiune din valoarea sa iniţială :

$$k' = \frac{4,25}{2.3,14 \cdot 100} \ln \frac{4,25}{2.3,14 \cdot 0,25} = 0,00676$$

dar în planul grilajului reduce această valoare numai la fracţiunea

$$k'' = \frac{1}{2}(1 + 0,00676) = 0,50338$$

din ea.

19.4. Factorul de amplificare al triodelor. Considerăm o triodă cilindrică avînd catodul ca filament drept, anodul ca suprafaţă cilindrică şi grila formată din n fire paralele cu filamentul, formînd muchiile unei prisme cu baza în poligon cu n laturi (fig.73 a), sau dintr-un fir de elice (fig.74).

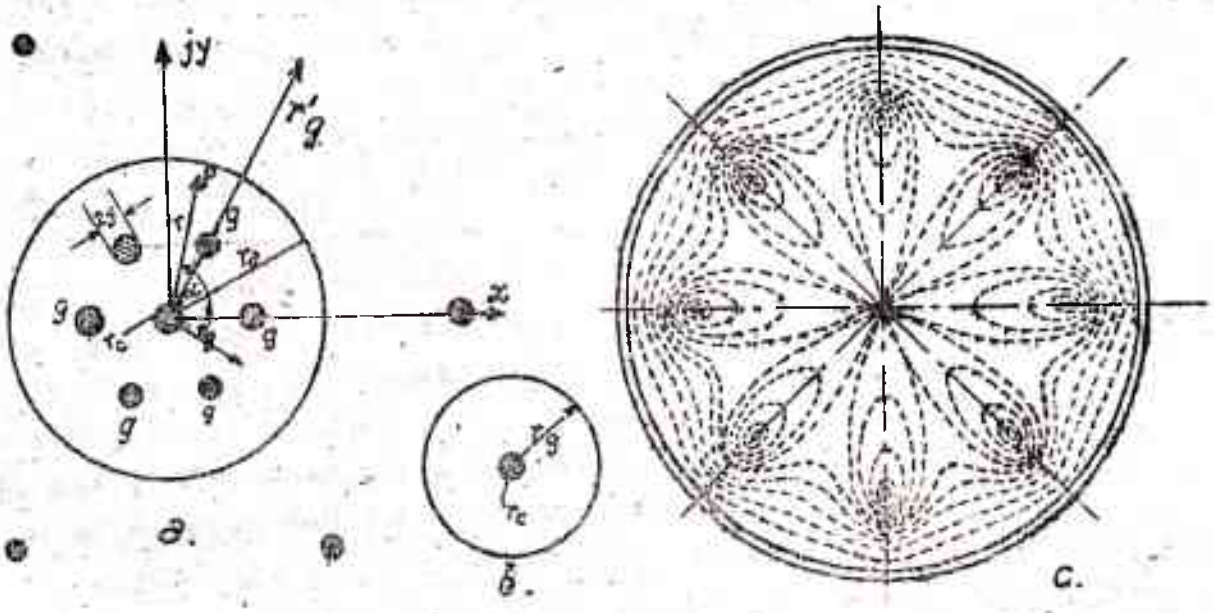


Fig.73

Secţiuni printr-o triodă cilindrică (a) prin dioda echivalentă (b) şi liniile echipotenţiale ale cîmpului electrostatic din triodă, în secţiunea (c) .

Ne imaginăm în loc de triodă o diodă (fig.73 b) avînd acelaşi filament şi anodul în locul grilei triodei. Dacă punem anodul diodei sub o astfel de tensiune, încît intensitatea cîmpului pe care-l stabileşte la catod să fie egală cu cîmpul electric pe care-l stabileşte anodul împreună cu grila triodei

la catod, identitatea condiţiunilor din apropierea catodului face să treacă acelaşi curent prin cele două tuburi şi tensiunea anodului diodei, determinată din această condiţiune, e tensiunea echivalentă sau de comandă a triodei.

Tensiunea echivalentă se calculează în funcţiune de tensiunea grilei şi a anodului, cu o aproximaţie suficientă cu ecuaţiile Electrostaticii pentru spaţiul vid ($\rho = 0; \varepsilon = 1$). Calculăm tensiunea echivalentă a lămpii v_e din condiţiunea ca un cilindru în locul grilei, sub tensiunea v_e faţă de catod să inducă pe catod aceleaşi sarcini ca şi tensiunea v_g a grilei împreună cu tensiunea v_a a anodului.

Facem calculul pentru un tub cilindric (fig.73) al cărui catod are raza r_0 cu grila cu n fire de raze g dispuse la distanţe egale de-a lungul generatoarelor unui cilindru coaxial cu catodul şi de rază r_g şi cu un anod cilindric de rază r_a. Fie ρ_c sarcina pe unitatea de lungime de catod (densitatea lineară de sarcină) şi ρ_g densitatea lineară de sarcină pe grilă, adică $\frac{1}{r}\rho_g$ pe fiecare din cele n fire ale grilei, presupuse în legătură conductoare unul cu altul - şi ρ_a densitatea lineară de sarcină a anodului. Dacă alegem tensiunea catodului drept origine a potenţialelor $v_c = 0$, v_g şi v_a sînt respectiv tensiunile grilei şi anodului faţă de catod. Tratăm problema numai într-o secţiune normală pe axa catodului (tubul cilindric foarte lung).

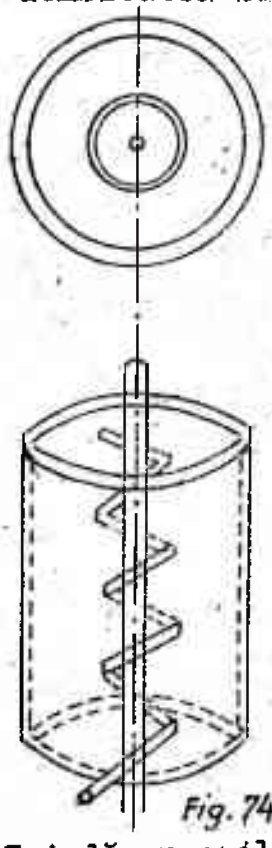


Fig. 74

Triodă cu grilă în elice

Un fir rectiliniu şi infinit lung încărcat cu densitatea lineară de sarcină produce în vid un cîmp electric, al cărui potenţial are, la distanţa r cm de fir, expresiunea :

$$(a) \quad V = c - \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0}\rho_c \ln r.$$

unde c e o constantă care depinde de originea potenţialului v.

In cazul diodei echivalente cu trioda, avem $u=v_c= 0$ pentru $r = r_c$ şi obţinem :

$$v_c = 0 = C - \frac{K}{2\pi\varepsilon_o}\rho_c \ell n r_c; \quad C = \frac{K}{2\pi\varepsilon_o}\rho_c \ell n r_c$$

şi deci :

$$(b) \qquad V = -\frac{K}{2\pi\varepsilon_o}\rho_c \ell n \frac{r}{r_c}$$

Pentru $r = r_g$ adică pe anodul diodei echivalente, avem $v = v_e$, adică tensiunea echivalentă, şi deci :

$$v_e = -\frac{K}{2\pi\varepsilon_o}\rho_c \ell n \frac{r_e}{r_c}$$

adică

$$(c) \qquad \rho_c = -\frac{2\pi\varepsilon_o v_e}{K \ell n \frac{r_E}{r_c}}$$

Calculăm acum pe ρ_c în funcţiune de v_g şi de v_a din triodă şi egalăm valoarea din (c) spre a obţine tensiunea echivalentă v_e în funcţiune de v_g şi v_a .

Funcţiunea analitică a cărei parte reală e (a) este

$$\ell nz = \ell n(r.e^{j\alpha}) = \ell n\, r + \ell n\, e^{j\alpha} = \ell n\, r + j\alpha$$

adică $\ell n\, r$, e partea reală a funcţiunii ℓnz, care se poate demonstra uşor că e analitică. Urmează că putem calcula cu mărimea complexă :

$$W = C - \frac{K}{2\pi\varepsilon_o}\rho \ell nz$$

în loc de (a).

Astfel putem scrie imediat potenţialul în funcţiune de razele vectoare z şi z_k, care duc din origine la punctul P, în care calculăm potenţialul, respectiv la firul k, al cărui potenţial îl calculăm. Funcţiunea analitică W, a cărei parte reală a potenţialului U, se poate pune sub forma :

$$(d) \qquad W = C - \frac{K}{2\pi\varepsilon_o}\rho_k \ell n (z - z_k)$$

Fiindcă partea reală a logaritmului natural al unei mărimi complexe e egală cu logaritmul natural al valorii absolute a mărimii complexe, şi valoarea absolută a vectorului $(z - z_k)$ e distanţa dintre firul k şi punctul P.

Construim funcţiunea complexă, a cărei parte reală e potenţialul dat de sarcinile catodului, ale grilei şi ale anodului, suprafeţele firelor grilei, catodului şi, anodului fiind suprafeţe echipotenţiale. Tinem cont de sarcinile anodului introducînd în calcul imaginile electrice ale firelor grilei, faţă de cilindrul anodului, dispuse la distanţe egale una de alta, de-a lungul generatoarelor unui cilindru de rază:

$$(e) \qquad r'_g = \frac{r_a^2}{r_g}$$

cum s-a arătat în calculul capacităţilor în serviciu ale cablurilor.

Potenţialul dat de sarcinile catodului e partea reală a funcţiunii :

$$W_1 = C_1 - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \rho_c \ln \frac{z}{r_c}$$

Potenţialul firelor grilei e partea reală a funcţiunii :

$$W_2 = C_2 - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_g}{n} \left[\ln (z-z_1) + \ln(z-z_2) + \ldots + \ln(z-z_n) \right] =$$

$$= C_2 - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_g}{n} \ln (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

unde $z_1, z_2, \ldots z_n$, sînt razele vectoare care duc din O la cele n fire ale grilei.

Potenţialul imaginilor electrice ale firelor grilei în raport cu anodul, încărcate cu sarcini egale şi de semne contrare cu ale firelor grilei, e partea reală a funcţiunii :

$$(f) \quad W_3 = C_3 + \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_g}{n} \ln (z-z'_1)(z-z'_2)(z-z'_3)\ldots(z-z'_n)$$

unde $z'_1, z'_2, \ldots z'_n$ sînt razele vectoare care duc din O la cele n imagini electrice ale firelor grilei în raport cu anodul.

Observăm că o eciație de formă $(z^n - r^n) = 0$ are n rădăcini complexe care se reprezintă prin cele n raze vectoare care duc din origine la n puncte dispuse la distanțe egale pe periferia unui cerc de rază r. Rezultă că $z_1, z_2, \ldots z_n$ sînt rădăcinile ecuației $(z^n - r_g^n) = 0$, și $z_1', z_2' \ldots z_n'$ sînt rădăcinile ecuației $(z^n - r'^n_g) = 0$. Cum un polinom de gradul n în z se poate scrie sub forma de produs a n factori, fiecare factor fiind diferența dintre z și o rădăcină a lui, deducem

$$(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = (z^n - r_g^n) ;$$

$$(z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_n') = (z^n - r'^n_g)$$

Adunînd funcțiunile W_1, W_2 și W_3 obținem funcțiunea a cărei parte reală reprezintă potențialul :

$$(g) \quad W = C - \left[\frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \rho_c \ln \frac{z}{r_c} + \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_g}{n} \ln \frac{z^n - r_g^n}{z^n - r'^n_g} \right.$$

unde $C = C_1 + C_2 + C_3$ e o constantă.

Rezultă că potențialul punctului $z = r e^{j\alpha}$ e :

$$(h) \quad U = C - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \rho_c \ln \frac{r}{r_c} - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_g}{n} \ln \left| \frac{z^n - r_g^n}{z^n - r'^n_g} \right|$$

Ecuația conține trei necunoscute C, ρ_c și ρ_g care se pot determina în funcțiune de cele trei condițiuni pe care trebuie să le satisfacă potențialul U și anume de a fi $U = v_c = 0$ la suprafața catodului egal cu v_g la suprafața firelor grilei și egal cu v_a la suprafața plăcii anodice.

La suprafața catodului avem, în punctul în care intersectează axa reală: $z = r$ și $r = r_c$ și deci, observînd relația (e) și neglijînd pe r_c față de r_g și r_g' .

$$0 = U_c = C - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\rho_g}{n} \ln \left(\frac{r_g}{r_a}\right)^{2n}$$

de unde rezultă valoarea constantei C. Introducînd în (k), obţinem :

$$(h') \quad U = -\frac{K}{2\pi\varepsilon_0}\rho_c \ell n \frac{r}{r_c} - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_g}{n} \ell n \left[\frac{z^n - r_g^n}{z^n - r'^n_g} \Big/ \left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n} \right]$$

La suprafaţa firului grilei care e situat pe axa reală pozitivă, putem scrie : $r = r_g, r = rg + g \approx r_g$, fiindcă g e foarte mic faţă de r, însă $/z - r_g/ = g$, fiindcă aici nu putem neglija raza firului. Deci avem :

$$\left[z^n - r_g^n\right] = \left[z - r_g\right]\left[z^{n-1} + r_g z^{n-2} + \ldots + r_g^{n-1}\right] = gn\, r_g^{n-1}$$

şi analog

$$\left[z^n - r'^n_g\right] = \left[r_g^n - \left(\frac{r_a^2}{r_g}\right)^n\right] = r_g^n\left[1 - \left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n}\right]$$

adică

$$\left[\frac{z^n - r_g^n}{z^n - r'^n_g}\right]\left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n} = \frac{ng}{r_g\left[1-\left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n}\right]}\left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n} = \frac{ng}{r_g\left[1-\left(\frac{r_g}{r_a}\right)^{2n}\right]};$$

$$r_g < r_a$$

şi obţinem :

$$(i) \quad V_g = -\frac{K}{2\pi\varepsilon_0}\rho_c \ell n \frac{r_g}{r_c} + \frac{K}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_c}{n} \ell n \frac{r_g\left[1-\left(\frac{r_g}{r_a}\right)^{2n}\right]}{ng}$$

La suprafaţa anodului avem, în punctul din partea pozitivă a axei reale: $z = r$ şi $r = r_a$ şi obţinem :

$$\left[\frac{z^n - r_g^n}{z^n - r'^n_g}\right]\left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n} = \left[\frac{r_a^n - r_g^n}{r_a^n - \frac{r_a^n}{r_g^n}}\right]\left(\frac{r_a}{r_g}\right)^{2n} = \left(\frac{r_a}{r_g}\right)^n$$

şi deci

$$(j) \quad V_a = -\frac{K}{2\pi\varepsilon_0}\rho_c \ell n \frac{r_a}{r_c} - \frac{K}{2\pi\varepsilon_0}\rho_g \ell n \frac{r_a}{r_g}$$

Rezolvînd pe (i) şi (j) în raport cu ρ_c obţinem :

$$\rho_c = \frac{2\pi\varepsilon_0}{K \ln \frac{r_g}{r_c}} \left(\frac{v_a + \mu v_g}{\alpha + \mu} \right)$$

unde

$$(k) \qquad \mu = \frac{n \ln \frac{r_a}{r_g}}{\frac{r_g \left[1 - \left(\frac{r_g}{r_a} \right)^{2n} \right]}{ng}}$$

$$(l) \qquad \alpha = \frac{\ln \frac{r_a}{r_g}}{\ln \frac{r_g}{r_c}}$$

Fiindcă în general $r_g : r_c \gg 3$ şi $r_a \gg 2\text{-}3\, r_g$ rezultă că $\alpha \approx 1$. Cum însă factorul de amplificare μ e de ordinul numărului lo rezultă că putem calcula, în primă aproximaţie, cu $\alpha = 1$. De cele mai multe ori poate fi neglijat şi α faţă de μ .

Dacă scriem $\alpha = 0$, obţinem :

$$\rho_c = -\frac{2\pi\varepsilon_0}{K \ln \frac{r_g}{r_c}} \cdot \frac{v_a + \mu v_g}{\mu} =$$

$$= -\frac{2\pi\varepsilon_0}{K \ln \frac{r_g}{r_c}} \left(v_g + \frac{v_a}{\mu} \right)$$

Egalînd valoarea din (c), obţinem tensiunea echivalentă a triodei :

$$(m) \qquad v_e = v_g + \frac{v_a}{\mu}$$

Din expresiunea (k) a factorului de amplificare al triodelor cilindrice cu grila din fire paralele cu filamentul

se poate calcula printr-o consideraţie simplă factorul de amplificare al triodelor cu grila în elice.

Dacă folosim notaţiile din figura 41 şi asimilăm elicea cu sistemul de fire drepte de acelaşi diametru la aceeaşi distanţă r_g de catod şi cu aceeaşi distanţă între ele ca şi pasul p al elicei, putem scrie în expresiune p în loc de distanţa dintre fire, care e egală cu cîtul dintre periferia cercului grilei : $2\pi r_g$ şi numărul n de fire ale grilei drepte, adică

$$p = 2\pi r_g : n \qquad \text{sau} \qquad n = \frac{2\pi r_g}{p}$$

Rezultă că, spre a obţine factorul de amplificare al unei triode cilindrice cu grila în elice, scriem în (k)

$$(n) \qquad \frac{r_g}{ng} = \frac{p}{2\pi g} \qquad \text{şi avem :}$$

$$(o) \qquad \mu = \frac{2\pi r_g}{p} \cdot \frac{\ell n \frac{r_a}{r_g}}{\ell n \left[\frac{p}{2\pi g}\left[1 - \left(\frac{r_g}{r_a}\right)^{\frac{4\pi r_g}{p}}\right]\right]}$$

Calculăm ca exemplu factorul de amplificare al unei triode cu grila din fire în poligon regulat, paralele cu filamentul, ştiind că raza cilindrului anodului e $r_a = 0{,}37$ cm, raza grilei $r_g = 0{,}16$ cm şi $n = 8$ fire. Expresiunea (k) ne dă valoarea :

$$\mu = \frac{8\,\ell n \frac{0{,}57}{0{,}16}}{\ell n \frac{0{,}16\left[1 - [0{,}16 : 0{,}37]^{16}\right]}{8 \cdot 0{,}008}} = 7{,}27$$

Mai calculăm ca exemplu factorul de amplificare al unei triode cu grila în elice, ştiind că raza cilindrului anodului e $r_a = 0{,}35$ cm, raza grilei $r_g = 0{,}15$ cm, raza firelor grilei $g = 0{,}005$ cm şi distanţa dintre firele grilei (pasul elicei) $p = 0{,}11$ cm. Expresiunea (o) ne dă : $\mu = 5{,}93$.

Triodele plane se obţin din cele cilindrice observînd că la ele r_a/r_g, e foarte apropiat de unitate, aşa încît :

$$n \frac{r_a}{r_g} = 1 n \left[1 + \frac{r_a - r_g}{r_g}\right] \approx \frac{r_a - r_g}{r_g} = \frac{D_{ag}}{r_g}$$

unde D_{ag} e distanţa dintre anod şi grilă, şi deci :

$$(p) \qquad \mu = \frac{2\pi}{p} \frac{D_{ag}}{\ell n \frac{p}{2\pi r_g}}$$

dacă în factorul de amplificare al triodelor cilindrice termenul $1 - (\frac{r_g}{r_a})^{2n}$ se pune aproximativ egal cu unitatea.

Factorul de amplificare al triodelor oarecari se obţine cum urmează : dacă S_a, S_g şi s_g reprezintă suprafaţa ocupată de anod, suprafaţa pe care se găseşte grila şi suprafaţa obturată de firele grilei, l_g lungimea totală a firelor grilei şi h lungimea suprafeţei S_g ocupată de grilă, avem în cazul triodelor cilindrice

$r_a/r_g = S_a/S_g$ şi $p/2\pi r_g = 2\pi r_g . np/2\pi r_g . n . 2\pi r_g = S_g/2\pi s_g$

şi deci

$$(q) \qquad \mu = \frac{l_g \ell n \frac{S_a}{s_g}}{n \ell n \frac{S_g}{2\pi s_g}}$$

poate fi considerată ca expresiune generală a factorului de amplificare.

2o. METODA REPREZENTARII CONFORME

2o.1. Reprezentarea conformă. O funcţiune analitică $w = w(z)$ asociază fiecărui punct al planului z cîte unul sau mai multe puncte ale planului w. In ultimul caz se poate calcula cu o ramură a funcţiunii analitice, de exemplu cu valoarea principală în cazul unei funcţiuni iraţionale, ca $w = \sqrt{z}$, spre a avea pentru fiecare punct din planul z cîte un singur punct în planul w. Condiţiunea de derivabilitate impune punctelor vecine din planul z să le corespundă puncte vecine în planul w, şi curbelor continue din planul z să le corespundă curbe continue în planul w. Figurilor compuse din linii continue alese în planul z le vor corespunde deci figuri compuse

din linii continue în planul w în virtutea reprezentării date de o funcţiune analitică. Ne interesează proprietăţile geometrice ale acestor reprezentări.

Dacă

$$w'(z) = \frac{dw}{dz}$$

e funcţiunea de z pe care o reprezintă derivata în raport cu z a funcţiunii analitice w(z), urmează :

$$(a) \qquad dw = w'(z) \cdot dz$$

unde w' (z) are aceeaşi valoare pentru z dat, oricare ar fi orientarea lui dz, adică oricare ar fi raportul dy : dx. Dacă se reprezintă deci, în planul z, diferenţiala dz prin săgeata care uneşte extremitatea razei vectoare z cu extremitatea razei vectoare z + dz, iar în planul w se reprezintă dw prin săgeata care uneşte extremitatea lui w cu extremitatea lui w+dw, cum arată figurile 75 a şi 75 b, se deduce următoarea relaţie geometrică: Pentru z şi w(z) dat, unghiul pe care-l formează dz din planul z cu dw corespunzător din planul w, cînd axele reale şi imaginare din cele două plane sînt respectiv paralele, e independent de orientarea lui dz şie egală cu unghiul derivatei w'(z), iar raportul dintre valoarea absolută a lui dz şi a lui dw corespunzător e independentă de orientarea lui dz şi e egală cu valoarea absolută a derivatei w'(z), cum rezultă din expresiunea geometrică a produsului, combinată cu relaţia dw = w'(z) dz. Dacă se trasează deci, dintr-un punct z al planului z, trei elemente de linie dz, dz' şi dz", extremităţile lor determină un triunghi elementar. Elementele de linie dw, dw' şi dw", care corespund în planul w elementelor dz, dz' şi dz" din planul z, sînt proporţionale cu ele şi formează aceleaşi unghiuri, fiindcă :

$$(b) \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{dw'}{dz'} = \frac{dw''}{dz''} = w'(z)$$

Urmează că triunghiul din planul w, determinat de extremităţile lui dw, dw' şi dw" e asemenea cu triunghiul din planul z, determinat de extremităţile lui dz, dz' şi dz" corespunzători (fig.75 a şi 75 b). Reprezentarea figurilor din planul z, pe

care o asigură o funcţiune analitică în planul w, e deci o reprezentare asemenea în infinitul mic sau cum se mai spune, o reprezentare conformă. Figurilor finite din planul z le corespunde însă în planul w în virtutea unei funcţiuni analitice, figuri finite care nu mai sînt în general, asemenea cu primele: Aceasta se datoresc faptului că scara la care se face reprezentarea elementelor infinit mici din figuri, dată de valoarea absolută a derivatei w'(z), variază în general cu z, adică variază din punct în punct - şi fiindcă, în general, variază cu z şi unghiul dintre elementele de linie corespunzătoare din cele două plane, care e dat de unghiul derivatei w'(z), care e în general, variabil cu z. Unghiul sub care se intersectează în planul z două curbe (care fac parte dintr-o figură) e egal însă cu unghiul sub care se intersectează în planul w cele două curbe corespunzătoare, fiindcă el e unghiul dintre elementele de linie dz, dz' şi dw, dw' dirijate respectiv de-a lungul tangentelor celor două perechi de curbe.

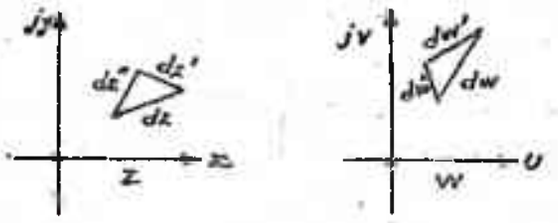


Fig.75 a,b
Planul variabilelor z=x+jy
şi w = u + jv

Două familii de curbe care sînt unele traiectoriile ortogonale ale celorlalte în planul z, sînt reprezentate deci de o funcţiune analitică, în planul w, prin două familii de curbe care sînt iarăşi unele traiectorii ortogonale ale celorlalte. Aceloraşi două familii de curbe traiectorii ortogonale, date în planul z, le corespund însă alte şi alte curbe traiectorii ortogonale în planul w, după cum se aleg funcţiunile analitice w(z). Aceeaşimfuncţiune w(z) reprezintă conform şi două familii de curbe dintre care unele sînt traiectorii ortogonale ale celorlalte în planul w, prin două familii de curbe care sînt unele traiectorii ortogonale, ale celorlalte în planul z. In particular, curbele u = const şi v = const

date de funcţiunea analitică w(z) în planul z, rezultă prin reprezentarea conformă dată de w(z), din dreptele u = const şi v = const în planul w = u + jv.

Exemplu. Considerăm, de exemplu, reprezentarea conformă a planului W = U + jV pe planul w = u + jv dată de funcţiunea exponenţială e^W, adică de funcţiunea

$$(c) \qquad w(W) = a\, e^{\frac{\pi W}{V_o}}$$

care are părţile reală şi imaginară :

$$u(U,V) = a\, e^{\frac{\pi U}{V_o}} \cos \frac{\pi V}{V_o} \qquad v(U,V) = a\, e^{\frac{\pi U}{V_o}} \sin \frac{\pi V}{V_o}$$

Ea reprezintă legătura dintre punctele de abscise U şi ordonate V din planul W, şi punctele de abscise u şi ordonate v din planul w. Dacă se consideră de exemplu familiile de curbe din planul w reprezentate de familiile de drepte ortogonale şi paralele cu axele de coordonate din planul W, date de U = const şi V = const, se obţine de mai sus :

$$u^2 + v^2 = a^2 e^{2\frac{\pi U}{V_o}} \quad ; \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} \frac{\pi V}{V_o}$$

adică dreptele U = const din planul W sînt reprezentate în planul w de cercurile concentrice cu originea $u^2 + v^2 = a^2 e^{2\frac{\pi U}{V_o}}$, cu rază mai mare decît a pentru U pozitiv şi mai mică decît a pentru U negativ, - iar dreptele V = const din planul W sînt reprezentate în planul w de dreptele care se intersectează în origine $\frac{v}{u} = \operatorname{tg} \frac{\pi V}{V_o}$. Cercurile şi dreptele considerate din planul w reprezintă două familii de curbe ortogonale între ele ca şi familiile de drepte corespunzătoare U = const şi V = const din planul W.

Figurile 76 a şi 76 b indică două perechi corespunzătoare de "dreptunghiuri" în cele două plane. Funcţiunea

considerată reprezintă conform fâşia dintre V = 0 şi V = V_o din planul W pe jumătatea superioară a planului w. Funcţiunea logaritmică :

$$w = \log W$$

ar realiza reprezentarea conformă a unor cercuri şi drepte concurente în originea sistemului de coordonate din planul W, pe două familii de drepte ortogonale u = const şi v = const în planul w.

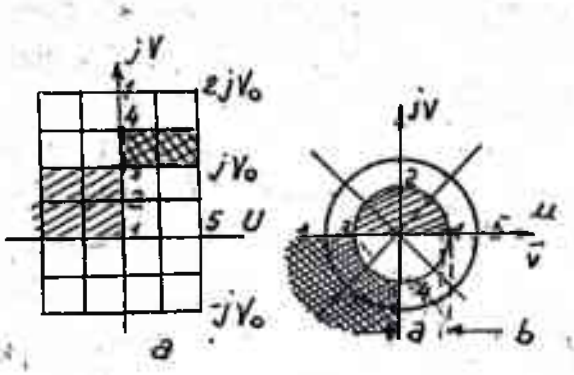


Fig.76
Reprezentare conformă

Exemplu. Considerăm şi reprezentarea conformă a planului $W = U + jV$ pe planul $w = u + jv$, dată de funcţiunea

$$(d) \qquad w(W) = a \operatorname{ch} \frac{\pi W}{V_o}$$

care are părţile reală şi imaginară :

$$u(U,V) = a \operatorname{ch} \frac{\pi U}{V_o} \cos \frac{\pi V}{V_o}; \quad v(U,V) = a \operatorname{sh} \frac{\pi U}{V_o} \sin \frac{\pi V}{V_o}$$

Dacă se consideră de exemplu familiile de curbe din planul w care reprezintă familiile de drepte ortogonale şi paralele cu axele de coordonate U = const şi V = const din planul W, se obţine :

$$\frac{u^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi U}{V_o}} + \frac{v^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi U}{V_o}} = 1$$

$$\frac{u^2}{a^2 \cos^2 \frac{\pi V}{V_o}} - \frac{v^2}{a^2 \sin^2 \frac{\pi V}{V_o}} = 1$$

Liniile U = const se transformă deci în elipse omofocale cu focarele în punctele $v = 0$, $u = \pm a$ în planul w.

iar liniile V = const se transformă în hiperbole omofocale cu focarele în aceleaşi puncte $u = \pm a$, $v = 0$.

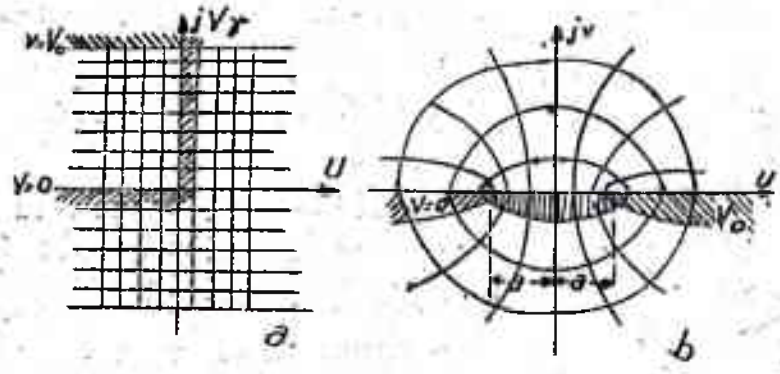


Fig. 77 a,b
Reprezentare conformă

Figura alăturată reprezintă cele două familii de curbe din planele W şi w. Se observă că funcţiunea considerată reprezintă conform jumătatea pozitivă a fâşiei V = 0, V = Vo din planul W pe jumătatea superioară a planului w.

2o.2. Principiul metodei reprezentării conforme. Se dă domeniul Dz din interiorul (sau din exteriorul) unei frontiere Γ_z în planul z (fig.78 a) şi anumite condiţiuni pe frontieră (de ex., condiţiunea ca anumite porţiuni ale frontierei să fie linii echipotenţiale cu anumite valori ale potenţialului, altele să fie linii de cîmp, etc.) - şi se cere să se determine funcţiunea analitică W = U + j V = W(z) a

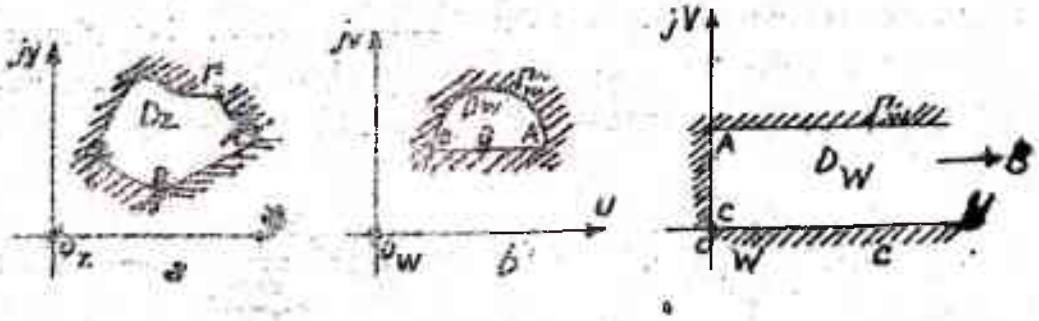


Fig.78
Principiul metodei reprezentării conforme
a. Planul z al problemei propuse. b. Planul transformării conforme intermediare. c. Planul potenţialului şi a liniilor de cîmp.

cărei parte imaginară V (x,y) este a cărei parte reală U(x,y) reprezintă potenţialul cîmpului [illegible] plan în interiorul

domeniului şi satisface condiţiunile impuse pe frontiera lui. Funcţiunea $W = W(z)$, rezolvată în raport cu z, adică $z = z(W)$ transformă deci conform domeniul D_z într-un astfel de domeniu D_W în planul W (fig.78 c), încît dreptele V = const (respectiv U = const) din D_W sînt reprezentate în D_z de liniile echipotenţiale care corespund condiţiunilor impuse pe frontiera Γ_z, obţinute punînd în funcţiunea $z = z(W)$ condiţiunea V = const (respectiv U = const). In această transformare, valorile potenţialului (de ex.V) şi ale funcţiunii liniilor de cîmp, (de ex.U) sînt deci egale în punctele corespunzătoare ale celor două domenii D_z şi D_W, adică şi în punctele corespunzătoare ale celor două frontiere Γ_z şi Γ_W; ele sînt repartizate în aceiaşi ordine pe cele două frontiere (dacă ambele sînt parcurse lăsînd domeniul D_z, respectiv D_W, de exemplu la mîna stîngă) ; numai lungimile de arc corespunzătoare ale celor două frontiere nu sînt respectiv egale. Reprezentarea trebuie făcută deci numai astfel, încît cele două frontiere să se corespundă (Metoda reprezentării conforme directe) şi punctele frontierei Γ_W să aibă absciselle U şi ordonatele V.

La formă mai complicată a frontierei Γ_z, se poate rezolva numai rareori direct problema de reprezentare conformă propusă. In astfel de cazuri, funcţiunea $z = z(W)$, care dă această reprezentare, se determină prin două reprezentări conforme. Se reprezintă mai întîi conform domeniului D_z pe domeniul D_w, în planul $w = u + jv$, determinat de frontieră mai simplă, dată Γ_w, cu ajutorul unei funcţiuni analitice auxiliare $z = z(w)$, care să se poată determina mai uşor decît $z = z(W)$; se reprezintă apoi conform, cu ajutorul unei noi funcţiuni analitice, mai uşor de determinat : $w = w(W)$ domeniul D_w din planul w pe un domeniu D_W, determinat în planul W de frontiera Γ_W şi care conţine în acest plan valorile pe care le are potenţialul (şi funcţiunea liniilor de cîmp) pe frontiera Γ_z. Funcţiunea analitică $w = w(w)$ transferă deci valorile date V şi U de pe frontiera Γ_z pe frontiera Γ_w, iar funcţiunea analitică $w = w(W)$ le transferă pe frontiera Γ_W care are în planul W punctele de abscise U şi de ordonate V.

Funcţiunea $z = z(W)$, care realizează reprezentarea conformă directă din planul z în planul W e deci :

$$z = z\left[w\ (W)\right]$$

Aceasta e metoda reprezentării conforme indirecte.

Dacă V = const sînt ecuaţiile liniilor echipotenţiale în planul z, vectorul cîmp G din acest plan are, conform relaţiei (78 a), următoarea expresiune în complex :

$$(82\ a)\quad G_z = \left(\frac{1}{\frac{dz}{dW}}\right)^* = \left(\frac{1}{\frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{dW}}\right)^* = \frac{G_w}{\left(\frac{dz}{dw}\right)^*}$$

$$G_w = \left(\frac{1}{\frac{dw}{dW}}\right)^*$$

unde G_w e vectorul cîmp corespunzător, în planul w.

Dacă U = const ar fi ecuaţiile liniilor echipotenţiale în planul z, am obţine analog din (78 b) :

$$(82\ b)\quad G'_z = -\left(\frac{1}{\frac{dz}{dW}}\right)^* = -\left(\frac{1}{\frac{dz}{dw}\cdot\frac{dw}{dW}}\right)^* = \frac{G'_w}{\left(\frac{dz}{dw}\right)^*}$$

$$G'_w = -\left(\frac{1}{\frac{dw}{dW}}\right)^*$$

unde G'_w ar fi vectorul cîmp corespunzător, în planul w.

<u>Exemplu:</u> Cîmpul electrostatic dintre două semiplane conductoare coplanare, cu muchiile paralele şi, la distanţa 2 a una de alta în planul z. Soluţia acestei probleme e reprezentată de funcţiunea

$$(a)\quad z(W) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi W}{V_0}$$

din ultimul exemplu de reprezentare conformă, în care s-a înlocuit w cu z, şi unde V_0 e diferenţa de potenţial dintre semiplane. Ca exemplu de aplicare a metodei reprezentării

conforme într-un plan intermediar w, reprezentăm însă întîi semiplanul superior din planul z pe jumătatea superioară a interiorului cercului de rază egală cu unitatea şi cu centrul în origine, în planul w, iar apoi reprezentăm domeniul reprezentat de această jumătate a interiorului cercului, pe jumătatea stîngă a fîşiei dintre dreptele $V = 0$ şi $V = V_0$ din planul W. Funcţiunea care efectuează prima reprezentare (fig.79 a,b) este

$$(b) \quad z(w) = \frac{a}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

Ea are părţile reală şi imaginară

$$(c) \quad x(u,v) = \frac{a}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2} + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\cos\alpha\,;$$

$$y(u,v) = \frac{a}{2}\left(\sqrt{u^2+v^2} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\sin\alpha\,,$$

unde $\alpha = \text{arc tg}\,\frac{v}{u}$. Funcţiunea z (w) asociază lui $u^2+v^2=\lambda^2$ din planul w (fig.79 b), elipsele omofocale cu centrele în

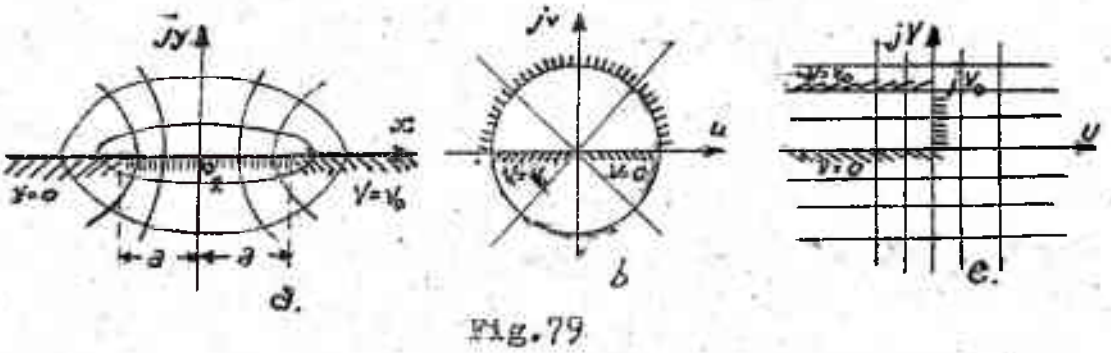


Fig.79

Exemplu de aplicare a metodei reprezentării conforme

a. Planul z al problemei propuse; b. Planul reprezentării conforme intermediare; c. Planul potenţialului şi al funcţiunii liniilor de cîmp.

origine şi cu focarele în punctele $z = \pm a$, $y = 0$ în planul z (fig.79 b), care se obţin din (c) prin eliminarea variabilei α:

$$\frac{4x^2}{a^2\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)} + \frac{4y^2}{a^2\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)} = 1$$

cercul care are raza unitate în planul w fiind reprezentat de segmentul de dreaptă - a $\leqslant$ x $\leqslant$ a, y = 0 în planul z. Se reprezintă atît interiorul cît şi exteriorul cercului, w avînd aceeaşi valoare atît pentru $w = w_1$, cît şi pentru $w = \frac{1}{w_1}$. Semiplanul superior al planului z, e reprezentat deci, în adevăr pe jumătatea superioară a interiorului cercului cu raza unitate şi cu centrul în originea coordonatelor din planul w. Funcţiunea z(w) asociază dreptelor α = arc tg $\frac{v}{u}$, pentru α = const care trec prin originea coordonatelor din planul w, hiperbolele omofocale cu centrele în origine şi cu focarele în punctele z = $\pm$ a, v = 0, în planul w, ale căror ecuaţii se ibţin eliminînd variabila $u^2 + v^2$ între ecuaţiile (c) :

$$\frac{4x^2}{a^2\cos^2\alpha} - \frac{4y^2}{a^2\sin^2\alpha} = 1$$

Pentru a obţine funcţiunea z = z (W) reprezentăm conform jumătatea superioară a interiorului cercului cu raza unitate şi centrul în originea coordonatelor din planul w, pe jumătatea stîngă a fâşiei dintre dreptele V = V_o şi V = 0 din planul W (fig.79 c). Funcţiunea respectivă e dată în primul nostru exemplu de reprezentare conformă (v. şi fig.76) :

$$w(W) = e^{\frac{\pi W}{V_o}}$$

Introducînd în (b) se obţine din nou funcţiunea (a) ale cărei valori z, dau în complex razele vectoare ale punctelor curbelor echipotenţiale, respectiv ale punctelor liniilor de cîmp, pentru V = const, respectiv pentru U = const.

In cele două exemple de reprezentare conformă din figurile 76 şi 77 am reprezentat conform porţiuni ale semiplanului superior, fie pe o fîşie dintre dreptele V = 0 şi V = V_o, fie pe jumătatea stîngă a acestei fîşii, în primul caz,liniile de frontieră sînt linii echipotenţiale, iar în cel de al doilea caz frontiera are două porţiuni echipotenţiale şi între ele o porţiune care reprezintă o linie de cîmp. Cu ajutorul acestor două exemple se rezolvă deci orice problemă de cîmp laplacian

plan, într-un plan z, în care frontiera e constituită din două linii echipotențiale, sau din două linii echipetențiale și o linie de cîmp dacă se poate face ca prin reprezentare conformă axa reală a unui plan w să corespundă frontierei din planul z. Cu ajutorul altor funcțiuni se pot rezolva probleme mai complicate. In principiu, problemele se pot rezolva și folosind mai multe reprezentări conforme intermediare.

20.3. Teorema lui Schwarz. Intr-un număr mare de probleme de cîmpuri laplaciene plane, liniile echipotențiale date (conturele date ale conductoarelor) respectiv liniile echipotențiale împreună cu una sau mai multe linii de cîmp, formează un poligon închis, și se cere cîmpul din interiorul poligonului. Aceste probleme se rezolvă cu ajutorul unei teoreme a lui Schwarz. Cu ajutorul acestei teoreme, se stabilește funcțiunea analitică $z = z(w)$ care reprezintă conform interiorul poligonul presupus situat în planul $z = x + jy$, pe semiplanul superior $v \geqslant 0$ al unui plan $w = u + jv$ și deci conturul poligonului îl reprezintă punct cu punct pe axa reală $v = 0$ a planului w (fig.8e a,b). In această reprezentare, vîrfurile de coordonate z_1, z_2, ..., z_k, ale poligonului din planul z corespund anumitor puncte u_1, u_2 ... de pe axa reală a planului w. Dacă latura poligonului cuprinsă între vîrfurile sale z_k și z_{k+1} e deci linie echipotențială în problema de

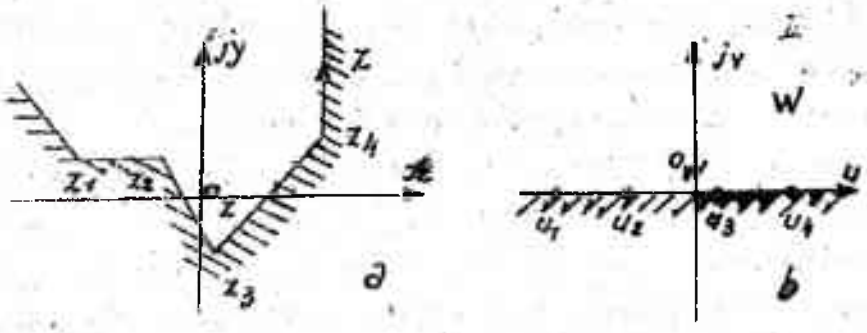


Fig.8e
Reprezentarea conformă din teorema lui Schwarz
a. Planul z ; b. Planul w.

electrostatică propusă, şi segmentul dintre u_k şi u_{k+1} al axei reale din planul w va trebui să fie linie echipotenţială în planul w; dacă latura respectivă a poligonului e linie de cîmp şi în problema propusă, şi segmentul corespunzător de pe axa reală din planul w va trebui să fie linie de cîmp. Funcţiunea $z = z(w)$, care rezultă din teorema lui Schwarz permite deci să se rezolve problema propusă, dacă se cunoaşte în planul w cîmpul laplacian care are, în acest plan, anumite segmente din axa reală ca linii echipotenţiale, şi anumite alte segmente ca linii de cîmp, cum sînt cele două exemple de reprezentare conformă considerate mai sus.

Conform teoremei lui Schwarz, funcţiunea z (w), care reprezintă conform interiorul unui poligon cu n vîrfuri din planul z pe semiplanul superior din planul w, are următoarea derivată în raport cu w.

$$(83)\quad \frac{dz}{dw} = C\,e^{j\alpha_0}(w-u_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} \cdot (w-u_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \cdot (w-u_3)^{\frac{-\alpha_3}{\pi}} \ldots (w-u_n)^{\frac{-\alpha_n}{\pi}}$$

În aceasta mărimile α_k sînt unghiurile pe care le formează laturile (k) şi (k+1) ale poligonului a căror intersecţiune formează vîrful k al poligonului din planul z, pozitive pentru unghiurile care intră în conductor şi negative pentru cele care ies din cîmp, u_k sînt abscisele punctelor axei reale v=0 care corespunde vîrfurilor z_k ale poligonului în planul z, C este o constantă reală, iar α_0 e unghiul format de ultima latură a poligonului cu axa Ox ; dacă vîrfurile se numerotează astfel încît, cînd sînt parcurse în ordinea crescătoare a numărului de ordine, cîmpul să rămînă la mîna stîngă, sînt satisfăcute inegalităţile $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$.

Demonstrăm că la trecerea variabilei w, prin valori reale crescătoare, prin valorile u_k, elementele de arc ale frontierei Γ_z se rotesc cu unghiurile α_k, şi că în rest ele nu se rotesc, că adică Γ_z formează în adevăr frontiera poligonală propusă. Introducem notaţia :

$$P_k(u) = \left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=u} \cdot (u-u_k)^{\frac{\alpha_k}{\pi}}.$$

adică

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=u} = F_k(u)\,(u-u_k)^{-\frac{\alpha_k}{\pi}}$$

Presupunem $u_{k-1} < u < u_k$. In aceste condiţiuni $(u-u_k) < 0$ şi deci

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=u} = F_k(u)\,/u-u_k/^{-\frac{\alpha_k}{\pi}}\, e^{-j\alpha_k}$$

Cînd u creşte şi trece prin valoarea u_k, dar rămîne mai mic decît u_{k+1}, nu se schimbă unghiul funcţiunii $F_k(u)$ dar $(u-u_k) > 0$ şi deci, în acest caz :

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=u} = F_k(u) - /u-u_k/^{-\frac{\alpha_k}{\pi}}$$

Rezultă că la trecerea lui u, prin valori crescătoare, prin valoarea u_k, elementul de arc dz al frontierei Γ_z se roteşte cu unghiul (pozitiv sau negativ) α_k în sens matematic pozitiv. Pentru $u > u_n$, toate produsele din expresiunea (83) sînt pozitive, şi unghiul format de ultima latură cu axa Ox este α_o.

Cînd "poligonul" din teorema lui Schwarz se extinde pînă la infinit, ultima latură, şi unghiul dintre ea şi prima, nu contează în expresiunea derivatei (83). In acest caz, numărul de ordine al acestei laturi e n+1, şi unghiul ei cu axa Ox este α_o.

Aplicaţie. Determinăm cîmpul electrostatic dintre un conductor plan, de potenţial nul, şi un conductor în semiplan de potenţial V_o, paralel cu planul de potenţial nul, în planul z. Reprezentăm întîi planul z pe un plan w, astfel încît semiplanului conductor să-i corespundă semiaxa reală negativă $u < 0$, $v = 0$ iar planului să-i corespundă semiaxa reală pozitivă $u > 0$; $v = 0$; Folosim apoi reprezentarea conformă din fig.76 între planele w şi W, cu $a = 1$, adică funcţiunea $w = e^{\frac{\pi W}{V_o}}$. In reprezeptarea conformă a cîmpului condensatorului din planul z pe jumătatea superioară a semiplanului w, muchia semiplanului o reprezentăm în punctul $u_1 = -1$ de pe axa reală a planului w.

Alegem sistemul de coordonate ca în fig.81 şi observăm că cele două conductoare au în total (n+1) = 3 laturi

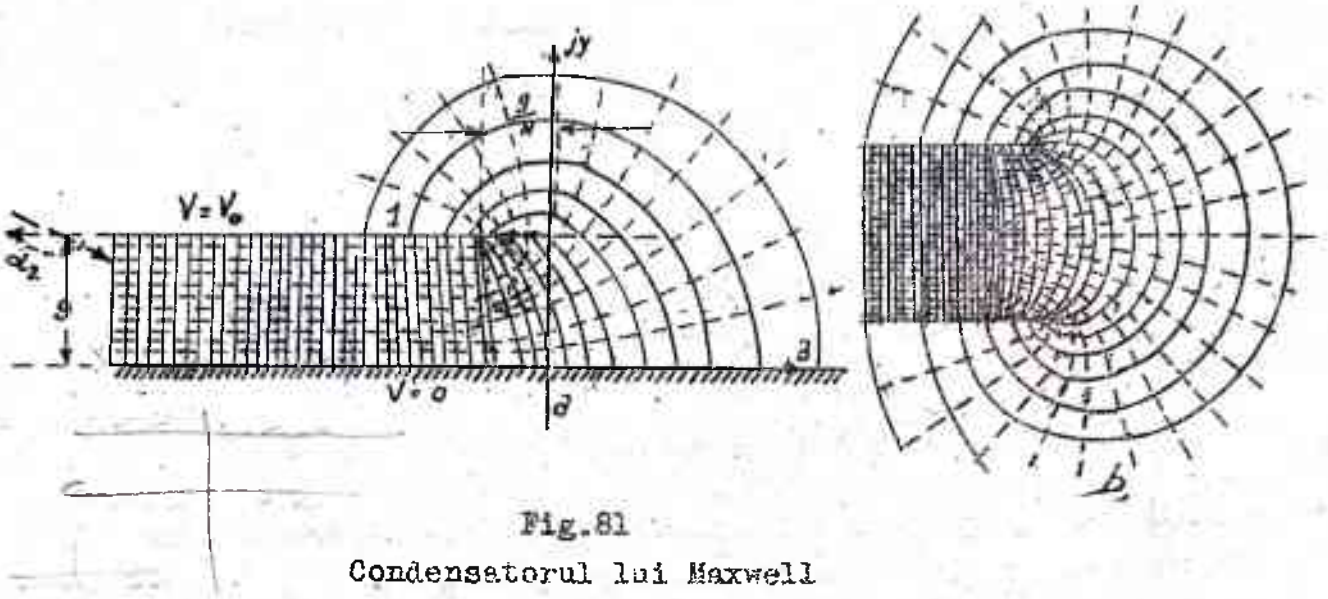


Fig.81

Condensatorul lui Maxwell

adică n = 2, şi numerotăm laturile în ordinea în care le parcurgem, începînd cu semiplanul de potenţial V_o, cînd ţinem cîmpul la mîna stîngă. Obţinem astfel $\alpha_1 = -\pi$ adică $\frac{\alpha_1}{\pi} = -1$, fiindcă unghiul intră în cîmp, şi $\alpha_2 = \pi$ adică $\frac{\alpha_2}{\pi} = 1$. Alegem $u_1 = -1$ fiindcă sîntem pe planul de nivel V_o. Avem $u_2 = 0$ fiindcă "muchia" respectivă se reprezintă în originea din planul w. Unghiul format de latura (n+1) = 3 şi cu axa Ox este : $\alpha_o = 0$. Mai notăm $\alpha = \frac{\pi}{V_o}$ şi obţinem $\frac{dz}{dw} = C_o' \frac{w+1}{w}$, adică

$$z = C_o' \int \frac{w+1}{w}\, dw = C_o \int \frac{e^{\frac{\pi}{V_o} w}\, dW}{\left(e^{\frac{\pi}{V_o} w} + 1\right) \ell^{-1} \frac{\pi}{V_o} w} + z_o =$$

$$= C_o \left(W + \frac{V_o}{\pi} e^{\frac{\pi W}{V_o}}\right) + z_o$$

Determinăm constantele C_o şi $Z_o = x_o + jy_o$. Pentru V = 0, adică pentru W = U, negăsim pe plan, adică z = x, şi deci :

$$(a) \quad x = C_o \left(U + \frac{V_o}{\pi} e^{\frac{\pi u}{V_o}}\right) + x_o + jy_o$$

de unde rezultă $y_o = 0$. Pentru a face $x_o = 0$, impunem condiţiunea ca pentru $W = 0$ să avem $x = C_o \frac{V_o}{\pi}$. Pentru a determina pe C_o, observăm că pentru $U = -\infty$ sau e $\frac{\pi W}{V_o} = 0$, adică pentru regiuni foarte depărtate de marginea semiplanului, avem un cîmp uniform, care e dat de $z = \frac{g}{V} W$. Formula noastră devine pentru $U = -\infty$; $z = C_o W$, fiindcă $z_o = 0$, şi deci avem $C_o = \frac{g}{V_o}$, adică :

$$Z = \frac{g}{V_o} \left(W + \frac{V_o}{\pi} e^{\frac{\pi W}{V_o}} \right)$$

Partea imaginară V (x,y) a funcţiunii $W = W(z)$, definită de această relaţie, reprezintă potenţialul cîmpului. Dacă separăm părţile reale şi imaginare, obţinem :

$$x = \frac{g}{V_o} \left(U + \frac{V_o}{\pi} e^{\frac{\pi u}{V_o}} \cos \frac{\pi V}{V_o} \right) ;$$

$$y = \frac{g}{V_o} \left(V + \frac{V_o}{\pi} e^{\frac{\pi u}{V_o}} \sin \frac{\pi V}{V_o} \right) .$$

Dăm potenţialului V diferite valori constante, variem pe U, şi construim punct cu punct liniile de nivel V = const. Dăm apoi funcţiunii U a liniilor de cîmp valori constante, variem pe V, şi construim liniile de cîmp. Cu ajutorul lor ne putem orienta în cîmp (fig.81). Expresiunea vectorului cîmp e:

$$E = \left(\frac{j V_o}{g\left(e^{\frac{\pi W}{V_o}} + 1\right)} \right)^* = \left[\frac{j V_o}{g\left[1 + e^{\frac{\pi U}{V_o}} \left(\cos \frac{\pi V}{V_o} + j \sin \frac{\pi V}{V_o}\right)\right]} \right]^*$$

şi valoarea lui absolută este :

$$|E| = \frac{V_o}{g} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\frac{2\pi U}{V_o}} + 2 e^{\frac{\pi U}{V_o}} \cos \frac{\pi V}{V_o}}}$$

In partea uniformă a cîmpului, adică pentru $U = -\infty$, avem $|E| = V_o : g = E_o$. Raportul dintre E şi E_o este :

$$\frac{|E|}{E_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\frac{2\pi U}{V_o}} + 2 e^{\frac{\pi U}{V_o}} \cos \frac{\pi V}{V_o}}}$$

pentru regiunile apropiate de marginile semiplanului $/E/ > E_o$. Dacă vrem ca intensitatea cîmpului din spre margine să nu fie mai mare decît în partea centrală dintre cele două conductoare, alegem în locul semiplanului un conductor care umple cîmpul pînă la o linie de nivel pentru care /E/ e cel mult egal cu E_o. Determinăm întîi maximul raportului $/E/:E_o$ pentru un V dat, la U variabil, sau minimul expresiunii R de sub radicalul din numitorul raportului, anulîndu-i derivata în raport cu U.

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{2\pi}{V_o} e^{\frac{\pi U}{Vo}} \left(e^{\frac{\pi U}{Vo}} + \cos \frac{\pi V}{Vo} \right) = 0$$

de unde rezultă :

$$e^{\frac{\pi U}{Vo}} = - \cos \frac{\pi V}{Vo}$$

adică valoarea lui $\cos \frac{\pi V}{Vo}$ trebuie să fie negativă, sau $\frac{Vo}{2} < V < Vo$, fiindcă e $\frac{\pi U}{Vo} > 0$. Introducînd această valoare a lui $e^{\frac{\pi U}{Vo}}$ în expresiunea raportului, obţinem :

$$\frac{/E/}{E_o} = \frac{1}{\sin \frac{\pi V}{Vo}}$$

Variind pe V pînă cînd acest raport devine egal cu unitatea, adică alegînd $V = \frac{Vo}{2}$, obţinem linia de nivel care are jumătate din tensiunea dintre plan şi semiplan, şi cel puţin pînă la care trebuie să plasăm un conductor care închide semiplanul pentru a obţine $/E/ \leq E_o$ în restul cîmpului, fiindcă pentru $V < \frac{Vo}{2}$ cîmpul la margine e mai slab decît în regiunea de cîmp uniform.

Aplicaţia rezolvă şi problema cîmpului dintre două semiplane simetrice (fig.81 b, condensatorul lui Maxwell).

21. METODE DE APROXIMARE A FORMEI LINIILOR CIMPULUI ELECTROSTATIC

21.1. Aproximarea formei liniilor de cîmp prin arce de cerc şi segmente de dreaptă. Pentru numeroase pro-

bleme de determinare a cîmpului electrostatic din dielectricul omogen şi isotrop dintre două conductoare poliedrice avînd sarcini adevărate egale şi de semne contrare, care nu se pot rezolva exact prin calcul se poate obţine o aproximaţie a soluţiei, dacă se aproximează liniile de cîmp prin combinaţii între arce de cerc şi segmente de dreaptă, astfel încît suprafeţele conductoarelor să fie suprafeţe de nivel, determinîndu-se apoi valoarea absolută a intensităţii cîmpului electric dealungul fiecărei linii de cîmp.

Arcele de cerc, respectiv segmentele de dreaptă, prin care se aproximează liniile de cîmp, se construesc cum urmează pentru două conductoare prismatice cu muchii paralele: Se consideră drept feţe de bază ale celor două conductoare poliedrice perechea de feţe ale lor care sînt cele mai apropiate, şi se consideră planele acestor feţe, prelungite pînă la dreapta lor de intersecţiune (fig.82 a). Cu centrul pe această dreaptă se trasează în planele perpendiculare pe ea, arcele de cerc cuprinse în unghiul diedru dintre cele două plane. Cînd cele două plane sunt paralele, arcele de cerc devin drepte (fig.82 b), iar cînd cele două conductoare prezintă două muchii foarte apropiate, paralele, se trasează planele de bază ca plane care trec prin muchii şi sunt perpendiculare pe planul celor două muchii (fig.82 c).

Aceiaşi construcţie se face în unghiurile diedre dintre planele de bază şi feţele adiacente şi se continuă în unghiurile diedre dintre feţele succesive ale conductoarelor, dacă muchiile respective ies în dielectric (fig.82 a,b,c). Pentru trei feţe consecutive, k-1, k şi k+1, care prezintă între ele o muchie care iese în dielectric şi una care intră în conductor (ca feţele 3 şi 4 din fig.82 d), construcţia arcelor de cerc se face cum urmează: Se trasează arcele de cerc din unghiul diedru al muchiei eşinde (unghiul diedru dintre planul k-1 şi faţa k din fig.82 d), pînă la arcul de cerc C' (în linie întreruptă în fig.82 d) pentru care se poate trasa şi în unghiul diedru format de faţa k + 1 care urmează după muchia intrîndă în conductor, cu faţa k - 1 care precede muchiei ieşindă din conductor, un arc de cerc C", care să

bleme de determinare a cîmpului electrostatic din dielectricul omogen şi isotrop dintre două conductoare poliedrice avînd sarcini adevărate egale şi de semne contrare, care nu se pot rezolva exact prin calcul se poate obţine o aproximaţie a soluţiei, dacă se aproximează liniile de cîmp prin combinaţii între arce de cerc şi segmente de dreaptă, astfel încît suprafeţele conductoarelor să fie suprafeţe de nivel, determinîndu-se apoi valoarea absolută a intensităţii cîmpului electric dealungul fiecărei linii de cîmp.

Arcele de cerc, respectiv segmentele de dreaptă, prin care se aproximează liniile de cîmp, se construesc cum urmează pentru două conductoare prismatice cu muchii paralele: Se consideră drept feţe de bază ale celor două conductoare poliedrice perechea de feţe ale lor care sînt cele mai apropiate, şi se consideră planele acestor feţe, prelungite pînă la dreapta lor de intersecţiune (fig.82 a). Cu centrul pe această dreaptă se trasează în planele perpendiculare pe ea, arcele de cerc cuprinse în unghiul diedru dintre cele două plane. Cînd cele două plane sunt paralele, arcele de cerc devin drepte (fig.82 b), iar cînd cele două conductoare prezintă două muchii foarte apropiate, paralele, se trasează planele de bază ca plane care trec prin muchii şi sunt perpendiculare pe planul celor două muchii (fig.82 c).

Aceiaşi construcţie se face în unghiurile diedre dintre planele de bază şi feţele adiacente şi se continuă în unghiurile diedre dintre feţele succesive ale conductoarelor, dacă muchiile respective ies în dielectric (fig.82 a,b,c). Pentru trei feţe consecutive, k-1, k şi k+1, care prezintă între ele o muchie care iese în dielectric şi una care intră în conductor (ca feţele 3 şi 4 din fig.82 d), construcţia arcelor de cerc se face cum urmează: Se trasează arcele de cerc din unghiul diedru al muchiei eşinde (unghiul diedru dintre planul k-1 şi faţa k din fig.82 d), pînă la arcul de cerc C' (în linie întreruptă în fig.82 d) pentru care se poată trasa şi în unghiul diedru format de faţa k + 1 care urmează după muchia intrînd în conductor, cu faţa k - 1 care precede muchiei ieşindă din conductor, un arc de cerc C", care să

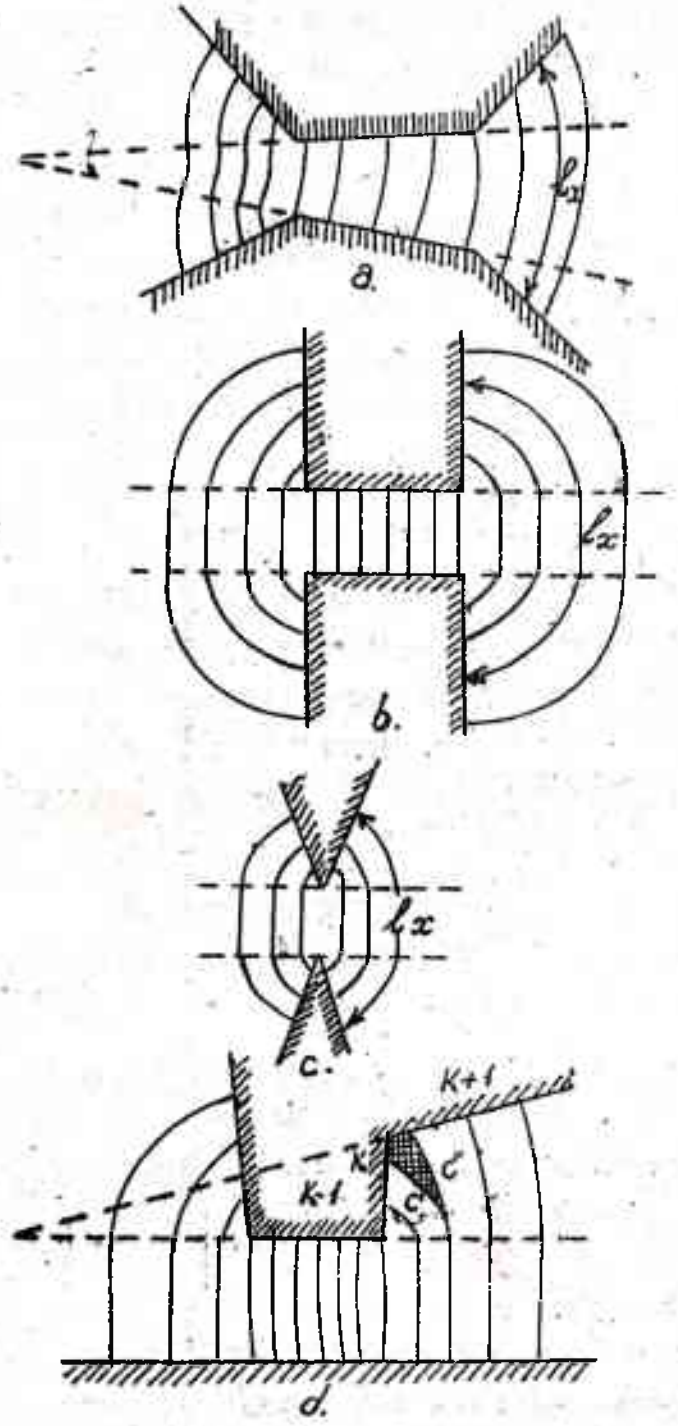


Fig.82

Aproximarea formei liniilor de cîmp ale cîmpului electrostatic dintre conductoare poliedrice.

plece din același punct al feței k-1 ca și arcul C' din diedrul k-1, k și să se termine pe latura k+1, la aceiași distanță de muchia întrîndă ca și arcul C' pe latura k. De la acest arc C", construcția se continuă între fețele k-1 și k+1, ca și între două fețe adiacente, cu muchie ieșindă între ele.

Pentru conductoare poliedrice se consideră, de asemenea, cele două plane pe bază determinate de cele două fețe de bază, mai apropiate una de alta, ale celor două conductoare și se construesc arcele de cerc din diferitele unghiuri diedre. Pentru liniile de cîmp care se termină pe fețele de închidere, ale conductoarelor, opuse regiunii dintre ele, trebuie ca aceste fețe să fie descompuse în triunghiuri cu vîrfurile în centrele lor de greutate, și să se considere aceste triunghiuri

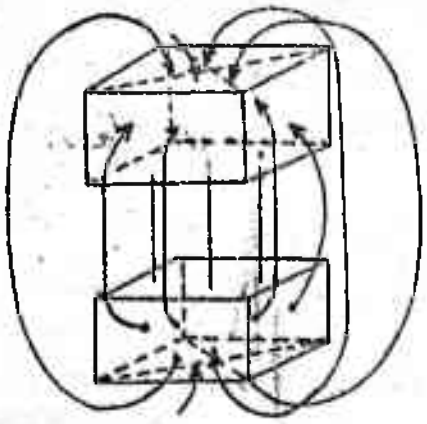


Fig. 83
Cîmp electrostatic între conductoare poliedrice.

aparţinînd unghiurilor diedre care au muchiile pe laturile feţei descompuse (fig.83).

Dacă l_x e lungimea unei linii de cîmp între cele două conductoare poliedrice, între care există o diferenţă de potenţial de valoare absolută U, valoarea absolută E_{mx} a intensităţii cîmpului electric de-alungul liniei de cîmp este

$$(a) \qquad E_{mx} = \frac{U}{l_x}$$

fiindcă liniile de cîmp sînt echidistante pe toată lungimea lor, şi densitatea de suprafaţă ρ_{sx} a sarcinii adevărate în punctul în care linia de cîmp pleacă de la conductorul încărcat pozitiv, este:

$$(b) \qquad \rho_{sx} = \frac{D_{nx}}{\varkappa} = \frac{\varepsilon U}{\varkappa l_x} ,$$

dacă $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ e permitivitatea dielectricului. Dacă dA_x este elementul de arie al suprafeţei Σ a conductorului încărcat pozitiv, sarcina lui adevărată este

$$(c) \qquad q = \int_\Sigma \rho_{sx}\, dA_x = \frac{\varepsilon U}{\varkappa} \int_\Sigma \frac{dA_x}{l_x}$$

şi capacitatea electrostatică a sistemului de două conductoare are expresiunea

$$(83) \qquad c = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon}{\varkappa} \int_\Sigma \frac{dA_x}{l_x}$$

Aceste formule nu se pot aplica în cazul conductoarelor care nu sînt poliedrice, chiar dacă se aproximează liniile de cîmp prin combinaţii de segmente de dreaptă şi arce de cerc, fiindcă liniile de cîmp nu mai sînt echidistante.

21.2. <u>Condensatorul cu armături dreptunghiulare coplanare</u>. Două plăci dreptunghiulare coplanare şi cu muchiile paralele formează un condensator cu dielectric omo-

gen, în care liniile de cîmp au o formă care se aproximează prin cîte două arce de un sfert de cerc unite prin cîte un segment de dreaptă cu lungimea egală cu distanţa dintre muchii, centrele cercurilor arcelor sfert de cerc fiind situate pe muchiile apropiate ale plăcilor (fig.84). In figură sînt desenate numai liniile de cîmp de deasupra plăcilor, pe cele două porţiuni dreptunghiulare egale, de laturi a şi b. Lungimea l_x a liniilor de forţă care se termină pe plăci la distanţa x de muchiile lor are expresiunea

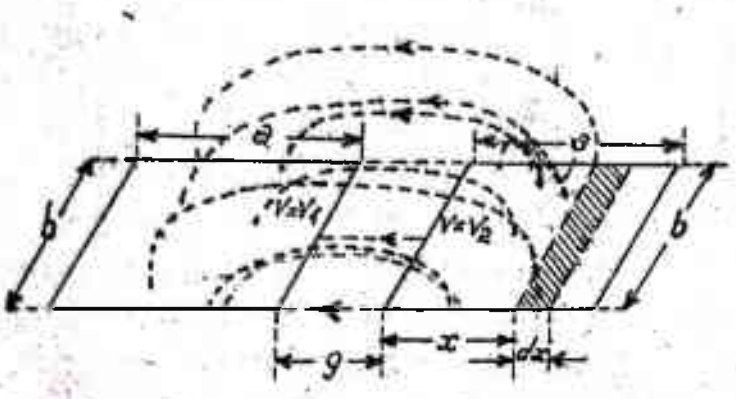


Fig. 84
Condensator din plăci coplanare

$$l_x = \pi x + g$$

dacă g e distanţa între muchii, adică sarcina adevărată q_2 a unei feţe de armătură care are elementul de arie $dA_x = bdx$, este conform relaţiei (c) :

$$q_2 = \frac{\varepsilon(V_2 - V_1)}{\chi} \int_{x=0}^{a} \frac{bdx}{g+\pi x} = \frac{\varepsilon U}{k} \; b \; \ln\left(1 + \frac{\pi a}{g}\right)$$

sarcina celor două feţe ale armăturii e egală cu dublul acestei valori, şi deci capacitatea condensatorului e:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2q_2}{U} = \frac{2\varepsilon b}{\chi} \; \ln\left(1 + \frac{\pi a}{g}\right).$$

Forţa de atracţiune dintre cele două armături se obţine din cea de a doua teoremă a forţelor lagrangiene, prin derivare în raport cu coordonata generală g:

$$F = \frac{\partial}{\partial g}(W_e)_{v=const} = \frac{(V_2-V_1)^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g} = \frac{\pi\varepsilon b(V_2-V_1)^2}{\chi}\left[\frac{1}{g+\pi a} - \frac{1}{g}\right]$$

21.3. Condensatorul cu armaturi troconice coaxiale. Două armături în formă de suprafeţe laterale ale unor trunchiuri de con care au generatoare de lungimi egale şi semideschiderile α_1 şi $\alpha_2 > \alpha_1$ au un vîrf comun al conurilor generatoare şi formează un condensator cu dielectric omogen. Extremităţile generatoarelor trunchiurilor de con se găsesc la distanţele R_1 şi R_2 de vîrful comun al conurilor lor generatoare (fig.85). Liniile de cîmp ale cîmpului electric dintre armături sînt arce de meridiane situate pe sfere care au centrul în vîrful conurilor generatoare şi polii pe axa acestor conuri (dacă se neglijează efectul de margine). Ele nu sînt echidistante pe lungimea lor. Dacă V e potenţialul dintre armături şi E este intensitatea cîmpului electric într-un punct la distanţa r de vîrful conurilor şi la unghiul α faţă de axa lor, şi dacă $ds = r\,d\alpha$ e elementul de arc al liniei de cîmp care trece prin acel punct, avem:

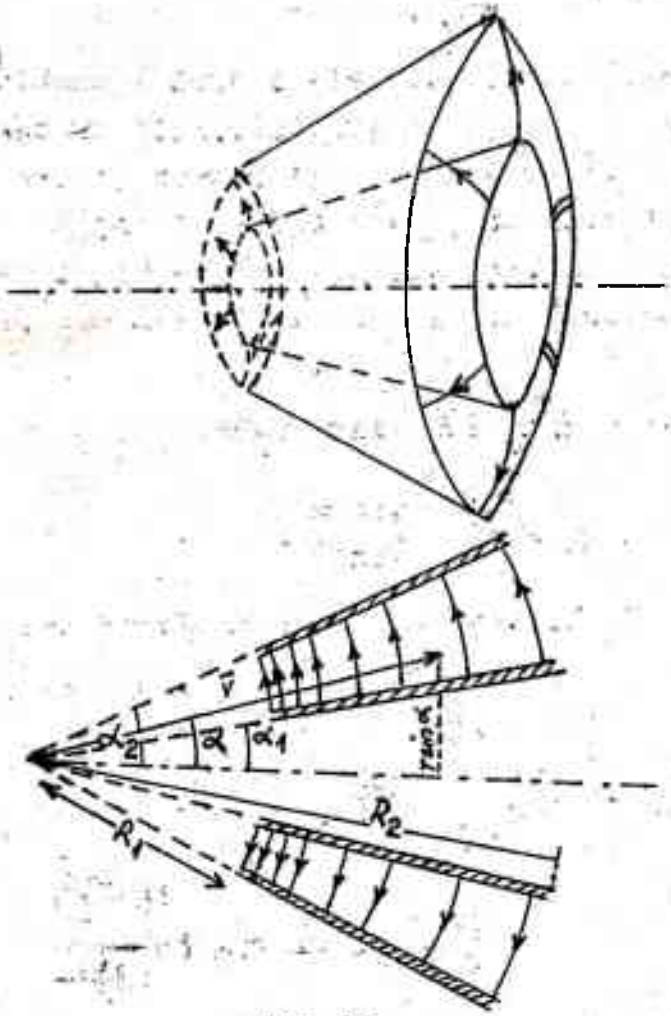


Fig.85
Cîmpul electrostatic dintre două armături tronconice.

$$E = -\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \alpha}$$

iar pe faţa interioară a armăturii exterioare, unde presupu-

nem densitatea de suprafaţă ρ_{s2} a sarcinii, care variază cu r:

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon} = \kappa \frac{\rho_{s2}}{\varepsilon}$$

Fluxurile electrice prin suprafeţele laterale a două trunchiuri de con de deschideri α_2 şi α, care au generatoarele dr egale, cuprinse între sferele cari au razele r şi r + dr şi centrele în vîrful conurilor generatoare, sînt egale, fiindcă acestea reprezintă secţiuni printr-un acelaşi tub de linii de cîmp. Fiindcă secţiunile acestor tuburi sînt $2\pi r \sin\alpha_2 dr$ şi $2\pi r \sin\alpha_1 dr$, rezultă:

$$\varepsilon E\, 2\pi r \sin\alpha\, dr = \varepsilon E_2\, 2\pi r \sin\alpha_2 dr.$$

şi deci:

$$E = E_2 \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha} = \kappa \frac{\rho_{s2}}{\varepsilon} \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha}$$

Diferenţa de potenţial $V_2 - V_1$ dintre cele două armături are deci expresiunea:

$$V_1 - V_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E\alpha\, r\, d\alpha = \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho_{s2} \sin\alpha_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho_{s2} r \sin\alpha_2 \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}$$

Sarcina adevărată q_2 a armăturii exterioare e deci:

$$q_2 = \int_{R_1}^{R_2} \rho_{s2}\, 2\pi r \sin\alpha_2 dr = \frac{2\pi\varepsilon}{\kappa} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}} \int_{R_1}^{R_2} dr =$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon}{\kappa} \frac{V_1 - V_2}{\ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}} (R_2 - R_1)$$

Capacitatea condensatorului are deci următoarea expresiune:

$$C = \frac{q_2}{V_2 - V_1} = \frac{2\pi\varepsilon}{K} \frac{R_2 - R_1}{\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}}}$$

21.4. Metoda grafică pentru cîmpurile electrostatice plane. Metodele analitice de determinare a intensităţii cîmpului electric şi inducţiei electrice se pot aplica numai dacă suprafeţele conductoarelor sînt relativ simple şi se cunosc ecuaţiile lor. In celelalte cazuri se aplică fie aproximarea formei liniilor de cîmp prin arce de cerc şi segmente de dreaptă, fie metode grafice de determinare a formei liniilor de cîmp, în cazurile în care dielectricii izotropi şi omogeni din cîmp nu au sarcina şi nici polarizaţie electrică permanentă. Metoda grafică e aplicabilă în special cîmpurilor plane şi cîmpurilor în care suprafeţele conductoarelor sînt de revoluţie cu o aceeaşi axă.

Liniile de cîmp şi liniile echipotenţiale ale celor două clase de cîmpuri electrostatice trebuie să satisfacă în secţiunile plane în care sînt cuprinse următoarele cinci condiţiuni care se folosesc în construcţia lor grafică:

1. Contururile conductoarelor ("electrozilor") sînt linii echipotenţiale.

2. Liniile de cîmp şi liniile inducţiei electrice au aceeaşi direcţie şi sînt normale pe liniile echipotenţiale, şi deci şi pe contururile conductoarelor.

3. Liniile de inducţie care determină tuburile de flux electric sînt linii continue între conductoare, fiindcă nu există sarcini adevărate în dielectrici.

4. Fluxul electric trebuie să aibe aceeaşi valoare prin toate secţiunile unui tub de linii de inducţie care pleacă de pe un conductor şi se termină pe un altul, pentru a fi satisfăcută legea fluxului electric.

5. La suprafaţa dintre doi dielectrici trebuie să fie satisfăcută teorema refracţiei liniilor de cîmp.

Construcţia se efectuează în felul următor: Se construesc pe baza cunoştinţelor obţinute din soluţiile analitice,

două familii de curbe, astfel încît unele să fie traiectoriile ortogonale ale celorlalte, şi se corectează apoi forma acelor curbe pînă cînd satisfac cele cinci condiţiuni. Liniile echipotenţiale se aleg astfel încît între oricari două linii echipotenţiale consecutive să existe aceeaşi diferenţă de potenţial. Dacă se trasează deci v linii echipotenţiale între contururile a două conductoare între care există diferenţa de potenţial U, diferenţa de potenţial ΔV dintre două linii echipotenţiale consecutive e

$$\Delta V = \frac{U}{v+1}$$

Liniile de inducţie se aleg astfel, încît tuburile de flux determinate de oricari două linii de cîmp consecutive să fie străbătute de fluxuri electrice egale. Dacă n e numărul de linii de inducţie care au extremităţile pe un conductor care are sarcina adevărată q, fluxul electric care trece prin fiecare tub de linii de cîmp, e deci:

$$\Delta\psi = \frac{\gamma}{n} q$$

Condiţiunea a patra conduce la reguli de construcţie diferite pentru cîmpurile electrostatice plane şi pentru cele care prezintă simetrie axială.

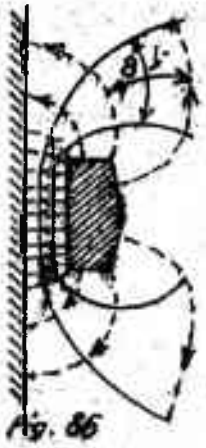


Fig. 86

Cîmpul electrostatic dintre două conductoare prismatice.

Fie, de exemplu, un cîmp electrostatic plan (fig.86) şi fie într-un punct dat a, distanţa dintre două linii de inducţie consecutive. Inducţia electrică în acel punct e deci D=c/a, unde c e o constantă.

Deci intensitatea cîmpului electric din acel punct este E=c: (ξ a), iar diferenţa de potenţial dintre cele două linii echipotenţiale consecutive între care se găseşte punctul la distanţa l una de alta, e :

$$\Delta V = \frac{U}{v+1} = E\,l = c\,\frac{l}{\varepsilon a}$$

Fiindcă această diferenţă de potenţial e aceeaşi între oricari două linii echipotenţiale şi în dreptul oricărui punct, rezultă că raportul a:l trebuie să satisfacă condiţiunea

$$(84) \qquad \varepsilon r\,\frac{a}{l} = c\,\frac{v+1}{\varepsilon_0 U} = k$$

In fiecare dielectric omogen, ε_r = const şi deci raportul a:l e constant, adică dreptunghiurile curbilinii formate de cele două familii de linii sînt toate asemenea. Se desenează deci după simţ vreo cîteva linii echipotenţiale respectînd condiţiunea 1 şi se construesc linii de inducţie dintre ele, respectînd condiţiunile 2 şi 3 şi ultima relaţie. Fiindcă această construcţie nu se poate face corect dacă liniile alese după simţ nu sînt exact echipotenţiale, se corectează liniile echipotenţiale, apoi liniile de inducţie, etc. şi se indesesc liniile, construind şi linii intermediare. In cîmpul determinat în acest fel se obţine, conform legilor fluxului electric şi polarizaţiei electrice, pentru sarcina adevărată q a unui conductor.

$$q = \frac{n\,\Delta\Psi}{K} = \frac{n}{K} L\,a\,\varepsilon\frac{\Delta V}{l} = \frac{n}{K} L\,\frac{\varepsilon a}{l}\cdot\frac{U}{v+1} = \frac{\varepsilon_0}{K}\,\frac{n}{v+1}\,k\cdot LU,$$

dacă L e lungimea electrozilor perpendicular pe planul figurii rezultă pentru capacitatea (parţială) corespunzătoare

$$(85) \qquad C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0}{K}\,\frac{n}{v+1}\,k\,L$$

21.5. <u>Metoda grafică pentru cîmpurile electrostatice cu simetrie axială</u>. In cîmpurile electrostatice care prezintă simetrie în jurul unei axe (fig.87) inducţia electrică într-un punct la distanţa r de axa de simetrie, în dreptul căreia distanţa dintre două linii de inducţie consecutive este a are expresiunea : $D = \frac{c}{2\pi ra}$ unde c e o constantă. Deci intensitatea cîmpului electric în acel punct e $E = C:(\varepsilon 2\pi ra)$ iar diferenţa de potenţial dintre cele două linii echipotenţiale consecutive, la distanţa e una de alta şi între care se găseşte punctul, e:

$$\Delta V = \frac{V}{v+1} = E\ell = C\,\frac{\ell}{2\pi r a\,\varepsilon}$$

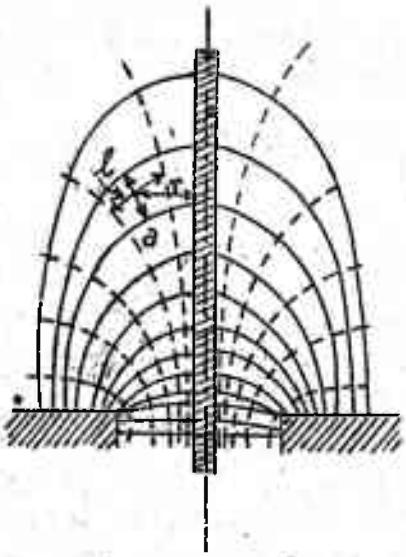


Fig. 87

Cîmpul electrostatic dintre două conductoare coaxiale, care prezintă simetrie axială.

Fiindcă această diferenţă de potenţial e aceeaşi între ori cari două linii echipotenţiale şi în dreptul oricărui punct rezultă:

$$(86)\quad \varepsilon_r \cdot r \cdot \frac{a}{\ell} = \frac{C(v+1)}{\varepsilon_0 U} = k'$$

In fiecare dielectric omogen ε_r = const. şi deci mărimea $r\,\frac{a}{\ell}$ e constantă, adică raportul dintre lăţimile a şi lungimile ale dreptunghiurilor curbilinii formate de cele două familii e invers proporţional cu distanţele lor de la axa de simetrie. Se desenează deci, după simţ, vreo cîteva linii echipotenţiale şi se construesc liniile de inducţie dintre ele, respectînd condiţiunile 2 şi 3, şi ultima relaţie. Fiindcă această construcţie nu se poate face corect dacă liniile alese după simţ nu sînt echipotenţiale, se corectează liniile echipotenţiale, apoi liniile de inducţie, etc. şi se îndesesc liniile, construind şi linii intermediare. In cîmpul determinat în acest fel se obţine:

$$q = \frac{n\Delta\Psi}{K} = \frac{n}{K}\,2\pi r a \cdot \varepsilon \cdot \frac{\Delta V}{\ell} = \frac{n}{K}\,\frac{2\pi r a}{\ell}\,\frac{U}{v+1} = 2\pi\,\frac{\varepsilon_0}{K}\cdot\frac{n}{v+1}\cdot k'\cdot U$$

de unde rezultă pentru capacitatea (parţială) corespunzătoare:

$$(87)\qquad C = \frac{q}{U} = 2\pi\,\frac{\varepsilon_0}{K}\,\frac{n}{v+1}\,k'$$

PARTEA A DOUA

MAGNETOSTATICA

22. MOMENTUL MAGNETIC, INTENSITATEA CÎMPULUI MAGNETIC IN VID SI PERMEABILITATEA MAGNETICA A VIDULUI

22.1. Magnetizarea şi cîmpul magnetic. Există bucăţi de oxid salin de fier care au proprietatea că exercită între ele şi asupra corpurilor de fier, de nichel, cobalt sau de anumite aliaje de mangan din apropierea lor, forţe şi momente care nu se exercitau mai înainte.

Se spune că în aceste condiţiuni sistemul format de bucăţile de oxid de fier e magnetizat, se mai spune că există un cîmp magnetic în regiunea de spaţiu susceptibilă de a se exercita în ea aceste forţe şi momente asupra corpurilor magnetizate şi nemagnetizate. Bucăţile de oxid salin de fier exercită forţe şi asupra celorlalţi compuşi dar acestea sînt atît de mici încît nu pot fi puse cu uşurinţă în evidenţă.

Oxidul salin de fier nu e singura substanţă care poate fi magnetizată. Si oţelul dur, nichelul, cobaltul şi alte substanţe pot fi magnetizate. Un fir conductor care are extremităţile introduse în două locuri de concentraţie diferită ale unei soluţii electrolitice se magnetizează de asemenea dar numai cît concentraţiile soluţiei din dreptul extremităţilor lui sînt foarte diferite. Experienţa arată că, independent de lungimea firului conductor, acţiunile lui magnetice tind către zero cînd vectorul arie al suprafeţei pe care o conturează tinde către zero. Prin experienţă se arată că în jurul corpurilor magnetizate există totdeauna cîmp magnetic. Acele corpuri produc deci totdeauna cîmp magnetic. Prin experienţă se mai arată că prezenţa corpurilor magnetizate nu e o condiţiune necesară pentru prezenţa, într-o anumită regiune a

cîmpului magnetic. Deci un cîmp magnetic poate fi produs şi prin alte mijloace decît cu ajutorul corpurilor magnetizate.

22.2. Explorarea cîmpului magnetic în vid. Cîmpul magnetic se explorează macroscopic măsurînd în fiecare loc din el momentul static al forţelor care se exercită asupra unor corpuri de probă magnetizate. Acest moment se poate măsura cu ajutorul balanţei magnetice de torsiune. Ea este asemănătoare cu balanţa electrică de torsiune, dar pendulul ei de torsiune are la extremitatea inferioară un mic corp de probă, magnetizat (ac magnetic). Starea de magnetizare a corpurilor de probă magnetizate trebuie să fie invariabilă; aceasta se constată prin forţe şi momentele de natură magnetică egale, care se exercită asupra lor în condiţiuni externe egale; starea lor trebuie aleasă astfel încît să nu modifice sensibil starea iniţială; corpurile de probă trebuie să fie cît mai mici spre a permite măsurarea momentului rezultînd dintr-o regiune cît mai mică a cîmpului magnetic.

Pentru descrierea rezultatelor explorării cîmpului magnetic, şi pentru definirea a ceea ce se înţelege prin regăsirea aceluiaşi punct din cîmp se foloseşte acelaşi criteriu ca pentru cîmpul electric.

Experienţa arată că momentul static $\bar{C}$ care se exercită asupra micului corp magnetizat depinde ca valoare absolută şi orientare, atît de starea de magnetizare a corpului (pe care o indicăm printr-un simbol λ , care nu reprezintă un număr) cît şi de poziţia corpului în cîmp (determinată de raza ei vectoare $\bar{r}$ faţă de originea sistemului de referinţă admis) şi de orientarea care i se dă corpului în cîmp.

Explorarea sistematică a cîmpului magnetic urmăreşte să determine experimental felul acestei dependenţe. Se arată experimental următoarele (de exemplu cu ajutorul balanţei magnetice de torsiune, care se deosebeşte de cea electrică prin faptul că are suspendat de firul de torsiune un mic corp magnetizat) :

1.- Dacă se aduce, într-o poziţie oarecare din cîmp, un mic corp magnetizat în condiţiuni oarecare, şi i se dă o

orientare oarecare în cîmp, el are o axă (fig.88) care are totdeauna aceeaşi orientare relativă faţă de corp, astfel încît dacă se roteşte corpul în jurul ei, momentul static al forţelor pe care cîmpul magnetic îl exercită asupra lui rămîne neschimbat atît în valoare absolută, cît şi ca orientare. Direcţia acestei axe numită axa magnetică a corpului, depinde deci numai de starea de magnetizare a corpului şi nu depinde de cîmp. Cele două sensuri de pe axă nu sînt echivalente. Intr-adevăr dacă se roteşte corpul cu două unghiuri drepte, încît axa lui magnetică să ajungă antiparalelă cu poziţia ei iniţială, se inversează şi sensul momentului static care se exercită asupra corpului într-un punct al unui cîmp magnetic invariabil. Sensul axei magnetice se alege astfel încît să fie îndreptat aproximativ spre nordul geografic dacă micul corp magnetizat se poate roti liber la suprafaţa pămîntului. Versorul u_λ al sensului axei magnetice a unui mic magnet depinde deci numai de starea de magnetizare a corpului.

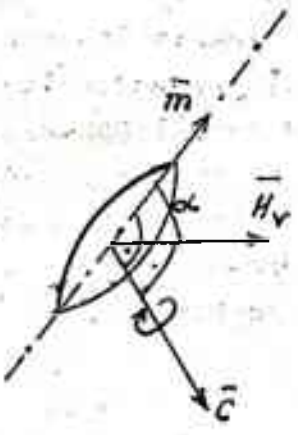


Fig.88
Cuplul care se exercită asupra unui corp magnetizat.

Cuplul exercitat asupra unui mic corp magnetizat, introdus într-un cîmp magnetic, depinde deci de starea lui de magnetizare λ de orientarea dată de versorul $\bar{u}_\lambda$ al axei lui magnetice, şi de poziţia lui în cîmp, dată de raza vectoare $\bar{r}$:

$$a)\quad \bar{C} = \bar{C}\,(\,\lambda,\ \bar{u}_\lambda\ ,\ \bar{r}\,)$$

2.- Dacă în experienţa de mai sus făcută cu două mici corpuri magnetizate în condiţiuni inegale, se variază orientarea în cîmp a axei lor magnetice, se constată că există, în fiecare punct din cîmp, o singură direcţie a axei lor magnetice, pentru care momentul lor de natură magnetică e nul; această direcţie e aceeaşi pentru ambele corpuri, dar variabilă

odată cu varierea poziţiei lor în cîmp. Aceasta arată că direcţia privilegiată nu depinde de starea de magnetizare a corpurilor, ci numai de poziţia lor în cîmp. Dacă se variază, în punctul dat din cîmp, orientarea axei magnetice, abătînd-o din direcţia privilegiată, valoarea absolută a momentului static creşte pînă la un maxim local, care depinde de starea de magnetizare şi de poziţia în cîmp : $C_M(\lambda, \bar{r})$, maxim la care ajunge cînd axa magnetică e cuprinsă în planul perpendicular pe direcţia privilegiată; dacă α e unghiul pe care-l formează axa magnetică într-o anumită orientare nouă, cu unul din sensurile de pe direcţia privilegiată, valoarea absolută a momentului static C în noua orientare e egală cu produsul maximului local prin valoarea absolută a sinusului unghiului α .

$$(b) \qquad C = C_M \ (\lambda, r) \ . \ \sin\alpha$$

Orientarea momentului static C în poziţia α e totdeauna normală, atît pe axa magnetică a corpului, cît şi pe direcţia ei privilegiată, locală în cîmp. Să alegem deci pe direcţia privilegiată, în fiecare punct din cîmp, un sens care, urmat de orientarea cuplului şi de a axei magnetice a corpului formează în această ordine un sistem drept de coordonate şi să notăm cu $\bar{u}_r$ versorul acestui sens pe orientarea privilegiată. In aceste condiţiuni $\bar{u}_r$ depinde numai de poziţia în cîmp şi produsul vectorial $\bar{u}_\lambda \times \bar{u}_r$ are orientarea cuplului $\bar{C}$ şi valoarea absolută sin α adică

$$(c) \qquad \bar{C}\ (\lambda, \bar{u}_\lambda, \bar{r}) = \bar{u}_\lambda \times \bar{u}_r \ C_M\ (\lambda, \bar{r})$$

3.- Oricare ar fi starea de magnetizare a unui mic corp raportul dintre valorile absolute ale maximelor momentelor care se exercită asupra lui în două puncte oarecare din cîmpul magnetic, de raze vectoare $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_k$, e acelaşi; el nu depinde deci de starea de magnetizare a corpului sau de orientarea axei lui magnetice în planul perpendicular pe versorul local $\bar{u}_r$ ci numai de cele două raze vectoare ale

punctelor :

$$(d) \qquad \frac{C_M(\lambda, \bar{r}_i)}{C_M(\lambda, \bar{r}_k)} = \psi(\bar{r}_i, \bar{r}_k)$$

unde e o funcţiune mereu pozitivă. Ea depinde numai de variabilele $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_k$, fiind egală cu cîtul a două funcţiuni pozitive dintre care una nu depinde de $\bar{r}_k$, iar cealaltă nu depinde de $\bar{r}_i$, trebuie să fie egală cu cîtul unei funcţiuni pozitive de $\bar{r}_i$, printr-o funcţiune pozitivă de $\bar{r}_k$.

$$\frac{C_M(\lambda, \bar{r}_i)}{C_M(\lambda, \bar{r}_k)} = \psi(\bar{r}_i, \bar{r}_k) = \frac{\left[H_v(\bar{r}_i)\right]}{\left[H_v(\bar{r}_k)\right]}$$

Funcţiunea $C_M(\lambda, \bar{r})$ trebuie să conţină deci drept factor scalar, o funcţiune pozitivă numai de starea de magnetizare $m(\lambda)$ adică trebuie să fie de forma

$$(e) \qquad C_M(\lambda, \bar{r}) = m(\lambda) \left[H_v(\bar{r})\right]$$

pentru ca această funcţiune - factor să se simplifice în cîtul valorilor absolute $C_M(\lambda, \bar{r}_i)$ şi $C_M(\lambda, \bar{r}_k)$, ale funcţiunii C_M, valori în care $\bar{r}_i$ şi $\bar{r}_k$ sînt oarecare.

Introducînd această valoare $C_M(\lambda, \bar{r})$ în expresiunea momentului, se obţine :

$$(f) \qquad \bar{C} = m(\lambda)\, \bar{u}_\lambda \times \bar{u}_r \cdot \left[H_v(\bar{r})\right]$$

E util să se opereze cu următoarele două mărimi de stare vectoriale :

$$(g) \qquad \bar{m}_p(\lambda) = \bar{\omega}_\lambda\, m(\lambda) \; ; \; \bar{H}_v(\bar{r}) = \bar{u}_r \left[H_v(\bar{r})\right]$$

Mărimea vectorială $\bar{m}_p(\lambda)$ se numeşte momentul magnetic permanent al corpului de probă; ea depinde, ca valoare absolută şi orientare, numai de starea de magnetizare a corpului. Mărimea vectorială $\bar{H}_v(\bar{r})$ se numeşte intensitatea cîmpului magnetic în vid; ea depinde ca valoare absolută şi orientare, numai de poziţia în cîmp. Se obţine deci :

$$(h) \qquad \bar{C} = \bar{m}_p(\lambda) \times \bar{H}_v(\bar{r})$$

Suprimînd notarea explicativă a variabilelor λ şi r, adică reţinînd că $\bar{m}_p$ depinde numai de starea de magnetizare a corpului, iar $\bar{H}_v$ numai de poziţia în cîmp, se obţine

$$C = \bar{m}_p \times \bar{H}_v$$

22.3. Momentul magnetic permanent şi intensitatea cîmpului magnetic în vid. Momentul forţelor care se exercită în vid, într-un cîmp magnetic, asupra unui mic corp magnetizat, e egal în fiecare moment cu produsul vectorial al unei mărimi de stare vectorială $\bar{m}_p$, care depinde numai de starea de magnetizare, inclusiv de axa magnetică a corpului şi se numeşte momentul lui magnetic permanent, printr-o mărime de stare vectorială $\bar{H}_v$, care depinde numai de poziţia lui în cîmp şi se numeşte intensitatea cîmpului magnetic în vid (sau şi "cîmpul magnetic" în vid) în locul respectiv :

$$\bar{C}_p = \bar{m}_p \times \bar{H}_v \qquad (88)$$

Intensitatea cîmpului magnetic depinde de alte mărimi de stare şi de poziţie în spaţiu, într-un fel care se determină cu ajutorul legilor Magnetismului.

In magnetostatică se foloseşte o unitate de moment magnetic permanent, care se determină cum urmează : Se aleg două mici corpuri de probă cu momente magnetice egale (trecîndu-le succesiv în acelaşi punct al unui cîmp magnetic de intensitate invariabilă, se exercită deci asupra lor acelaşi cuplu maxim). Dacă se trec cele două mici corpuri în vid, la distanţă foarte mare de alte corpuri şi la distanţa de 1 cm unul de altul, astfel încît axele lor magnetice să fie perpendiculare una pe alta şi axa unui dintre ele să arate spre celălalt (fig.89-a), şi dacă momentele sînt alese astfel încît corpurile să exercite unul asupra celuilalt momentul de natură magnetică de $2(\frac{K}{4\pi})^2$ dine - centimetri, fiecare dintre ele are unitatea magnetostatică absolută de moment magnetic raţionalizată ($K = 1$) respectiv nerafionalizată ($K = 4\pi$). Momentul magnetic e deci o mărime a cărei

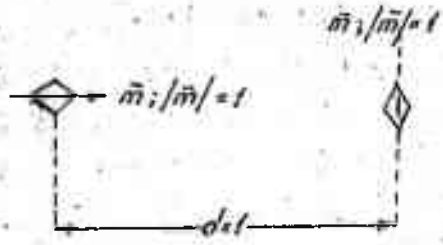


Fig.88 a
Experienţă pentru determinarea unităţii de moment magnetic.

unitate e afectată de raţionalizare.

In sistemul de unităţi MKSC se foloseşte o unitate de moment magnetic de 10^{10} ori mai mare, numită newton- metru pe milioersted în unităţi nerafionalizate (Nm/m Oe). Ea se determină cum urmează: Intre două mici corpuri cu momente magnetice egale cu această unitate MKSA, situate în vid la unitatea de lungime (m) unul de altul, momentul unuia din corpuri fiind orientat spre celălalt, se exercită cuplul de $2\pi_0(\frac{K}{4\pi})^2 = 2.10^{+7}(\frac{K}{4\pi})^2$ newtoni-metri, unde $\pi_0=10^{+7}$, dacă momentele sînt perpendiculare unul pe altul. Unitatea MKSC raţionalizată de moment magnetic se numeşte weber-metru (Wbm).

Unitatea de intensitate a cîmpului magnetic e oerstedul în unităţi magnetice CGS nerafionalizate şi 4π oerstezi în unităţi magnetice CGS raţionalizate. In sistemul MKSC nerafionalizat, unitatea e milioerstedul (mOe), iar în sistemul MKSC raţionalizat, amperspira pe metru (As/m). Milioerstedul e egal cu intensitatea cîmpului magnetic într-un punct din cîmp în care s-ar exercita momentul maxim de un newton metru asupra unui mic corp cu momentul magnetic de un newton metru pe milioersted.

Dacă se introduce într-un cîmp magnetic un mic corp cu unitatea de moment magnetic permanent, momentul maxim C_M care se exercită asupra lui e numeric egal cu valoarea locală H_v a intensităţii cîmpului magnetic în vid. Aceasta permite să se măsoare intensitatea. Dacă se aduce un alt corp magnetizat, în acelaşi punct din cîmp, se măsoară momentul maxim $C_M=m_p H_v$ care se exercită asupra lui şi se împarte cu momentul maxim C_M care se exercită asupra corpului care are unitatea de moment magnetic, cîtul celor două momente maxime C_M.

$m_p H_v : (1.H) = m_p$ este numeric egal cu momentul magnetic permanent al ultimului corp. Aceasta permite măsurarea

momentului magnetic permanent

Starea fizică specifică descrisă de intensitatea cîmpului magnetic în vid, este starea unui sistem fizic diferit de corpuri, numit cîmp electromagnetic, care există în toată regiunea din spaţiu susceptibilă de a se exercita în ea, asupra corpurilor, forţe şi momente de natură magnetică. Acest sistem fizic are şi alte proprietăţi, diferite de manifestarea lui prin forţele pe care le exercită asupra corpurilor magnetizate; de exemplu, cînd intensitatea cîmpului magnetic în vid variază în timp, se produce cum vom arăta, un cîmp electric.

Termenul cîmp magnetic se foloseşte uneori în accepţiunea de regiune a spaţiului susceptibilă de a se exercită în ea, asupra corpurilor, forţe şi momente de natură magnetică; alteori termenul se foloseşte în accepţiunea de stare fizică specifică din acea regiune, iar alteori, în accepţiunea de cîmp electromagnetic considerat numai sub raportul stărilor sale magnetice, accepţiunea pe care o folosim în viitor. Intensitatea cîmpului magnetic în vid $\bar{H}_v$ e una dintre mărimile de stare ale cîmpului electromagnetic, ca şi intensitatea cîmpului electric în vid. Intr-o regiune din spaţiu există sistemul fizic numit cîmp electromagnetic, şi starea sa caracterizată de intensitatea cîmpului magnetic în vid, independent de prezenţa corpurilor de probă magnetizate; prezenţa acestor corpuri e numai una dintre ocaziunile în care cîmpul electromagnetic se manifestă într-un mod observabil pentru noi, şi anume, în cazul considerat, prin forţele de natură magnetică pe care le exercită asupra corpurilor. Experienţa arată că prin mijloace adecvate, intensitatea cîmpului magnetic în vid poate fi anulată în orice domeniu din spaţiu.

22.4. Forţa magnetică. Pentru a varia cu $d\alpha$ unghiul dintre $\bar{m}_p$ şi $\bar{H}$ trebuie efectuat asupra corpului magnetizat lucrul mecanic $C. d\alpha = m_p H_v \sin\alpha d\alpha$. Aceasta măreşte cu o cantitate egală: $dW_m = m_p H_v \sin\alpha d\alpha$ energia W_m a corpului cu moment magnetic permanent, faţă de poziţia sa iniţială $\bar{m}_p$, în cîmpul magnetic, dacă această variaţie nu e însoţită de

o circulaţie de energie în cîmpul magnetic. Această circulaţie lipseşte dacă $\bar{H}$ e un cîmp potenţial, cum va rezulta din legea energiei cîmpului electromagnetic. Energia momentului magnetic permanent în cîmpul magnetic irotaţional de intensitate $\bar{H}_v$ e deci:

$$W_m = \int d W_m = \int m_p H_v \sin \alpha \, d\alpha = - m_p H_v \cos\alpha + C' = - \bar{m}_p \bar{H}_v + C'$$

unde mărimea C' poate depinde numai de poziţia în cîmp. Ea e nulă pentru că asupra unui sistem de două corpuri de momente magnetice egale şi de sensuri contrare nu se exercită cuplu, adică energia lor în cîmp e constantă (de ex. nulă):

$$W_m + W'_m = \bar{m}_p \bar{H}_v + C' + \bar{m}_p \bar{H}_v + C' = \text{const.}$$

de unde urmează în condiţiuni particulare. C = 0 şi deci

$$(a) \qquad W_m = - \bar{m}_p \cdot \bar{H}_v$$

Forţa $\bar{F}_{mp}$ care se exercita asupra corpului magnetizat se obţine egalînd lucrul mecanic interior $\bar{F}_{mp} d\bar{r}$, care se efectuează asupra corpului cînd acesta se deplasează cu dr fără a-i varia orientarea momentului în cursul deplasării (pentru ca cuplul să nu efectueze lucrul mecanic), cu scăderea corespunzătoare a energiei magnetice:

$$(b) \quad \bar{F}_{mp} \, d\bar{r} = - dW_m = + d(\bar{m}_p \bar{H}_v) = d\bar{r} \, \text{grad} \, (\bar{m}_p \bar{H}_v) =$$

$$= d\bar{r} \left[(\bar{m}_p \, \text{grad}) \, \bar{H}_v + \bar{m}_p \times \text{rot} \, \bar{H}_v \right]$$

adică fiindcă $d\bar{r}$ e arbitrar şi rot $\bar{H} = 0$.

$$(b) \quad \bar{F}_{mp} = (\bar{m}_p \, \text{grad}) \, \bar{H}_v .$$

Această relaţie permite să se determine momentul magnetic în cîmpul neuniform chiar dacă acesta are direcţia locală, a cîmpului $\bar{H}_v$. Forţa $\bar{F}_{mp}$ depinde, într-un punct dat al unui cîmp magnetic invariabil, şi de orientarea axei magnetice a corpului magnetizat.

Nici un corp nu poate fi adus, prin nici un mijloc într-o stare în care să se exercite asupra lui o forţă într-un loc dintr-un cîmp magnetic omogen sau în cîmpul magnetic neo-

mogen o forţă care să fie independentă de orientarea care se dă corpului în acel loc din cîmp. Dacă se rupe de exemplu, un corp magnetizat fiecare parte are moment magnetic, adică în cîmpul magnetic se exercită asupra ei o forţă (b) care depinde şi de orientarea în cîmp a acelei părţi. Există deci o deosebire esenţială între forţele magnetice şi forţele care se exercită în cîmpul electric, asupra micilor corpuri nepolarizate electric şi încărcate cu sarcini electrice adevărate. Cîmpul electric exercită această forţă chiar şi cînd e omogen sau cînd e neomogen, el exercită şi o forţă independentă de orientarea acelor corpuri în cîmp. Se spune că nu există sarcină magnetică adevărată, prin opoziţie cu sarcină electrică adevărată. Cînd se spune aceasta, se presupune că, dacă ar exista sarcina magnetică adevărată q_m, s-ar exercita asupra corpului care ar avea-o într-un loc din vid în care intensitatea cîmpului magnetic este $\bar{H}_v$, forţa

$$(c) \qquad \bar{F}_m = q_m \bar{H}_v$$

e. Momentul magnetic temporar. Din relaţia (b) rezultă că, dacă un mic corp are moment magnetic permanent, se exercită asupra lui, în cîmpul magnetic din vid, în general, un cuplu $\bar{C}_M$ iar în cîmpul magnetic neuniform din vid şi o forţă $\bar{F}_m$.

Se arată însă experimental că, dacă se introduc în vid într-un cîmp magnetic neuniform mici corpuri fără moment magnetic permanent se exercită asupra lor în general, totuşi o forţă $\bar{F}_{mt}$, care are o expresiune analoagă cu (b)

$$(d) \qquad \bar{F}_{mt} = (\bar{m}_t \text{ grad }) \bar{H}_v$$

In această expresiune mărimea de stare $\bar{m}_t$ a corpurilor fără moment magnetic permanent se numeşte momentul lor magnetic temporar.

22.5. Corpuri dia- para- şi feromagnetice. Momentele magnetice temporare induse de un cîmp magnetic sînt omoparalele cu $\bar{H}_v$ pentru anumite materiale isotrope, care se numesc materiale paramagnetice şi antiparalele cu $\bar{H}_v$, pentru

alte materiale isotrope care se numesc materiale diamagnetice. Materialele de natura celor paramagnetice al căror moment magnetic indus e foarte mare şi nu se anulează complect cînd le scoatem din cîmp, se numesc materiale feromagnetice. Forţa $\bar{F}_{mt}$ care se exercită asupra materialelor paramagnetice sau feromagnetice nepolarizate permanent în prealabil şi introdus într-un cîmp magnetic neuniform le atrage deci spre regiunile de cîmp magnetic mai intens; forţa care se exercită asupra corpurilor din materiale diamagnetice, nepolarizate magnetic permanent şi introduse într-un cîmp magnetic neuniform, le atrage spre regiunile de cîmp magnetic mai slab. Aceasta e, de exemplu, forţa care se exercită asupra pilitului de fier nepolarizate permanent, care e un material feromagnetic cînd aceasta se găseşte într-un cîmp magnetic.

22.6. Momentul magnetic. Suma vectorială dintre momentul magnetic permanent $\bar{m}_p$ şi momentul magnetic temporar m_t al unui mic corp se numeşte momentul magnetic $\bar{m}$ a corpului.

$$\bar{m} = \bar{m}_p + \bar{m}_t \qquad (89\ a)$$

Produsul vectorial al momentului magnetic prin intensitatea locală în vid, a cîmpului magnetic, e egal cu momentul forţelor care exercită asupra dîcului corp de probă situat în cîmpul magnetic din vid:

$$\bar{G}_{mv} = \bar{m} \times \bar{H}_v \qquad (89)$$

Locul în care partea pozitivă, respectiv negativă, a axei momentului magnetic magnetic $\bar{m}$ intersectează suprafaţa unui corp se numeşte polul său Nord magnetic, respectiv Sud magnetic.

Forţa care se exercită în cîmpul magnetic neuniform din vid asupra unui corp cu momentul magnetic $\bar{m}$ este

$$\bar{F}_{mv} = (\bar{m}\ \mathrm{grad})\ \bar{H}_v \qquad (90)$$

22.7. Spectrele magnetice. Dacă se desenează pe fiecare unitate de arie normală pe intencitatea locală a cîmpului magnetic în vid, un număr de linii de cîmp propor-

tional cu intensitatea locală a cîmpului magnetic astfel încît aceasta să fie pretutindeni tangentă la ele se obţine spectrul liniilor de cîmp ale intensităţii cîmpului magnetic în vid. Un ac magnetic magnetizat în lung se aşează în fiecare loc cu axa sa magnetică după tangenta la linia de cîmp locală. El poate servi deci pentru construirea spectrului magnetic.

Spectrele magnetice pot fi reprezentate şi cu ajutorul pilitului unui corp feromagnetic; de exemplu cu pilitura de fier, presărată pe o placă subţire neferomagnetică introdusă într-un cîmp magnetic. Se bate uşor în placă, şi se observă că pilitura se aranjează în şiruri dealungul liniilor de cîmp, cu dimensiunile mai mari dealungul lor, şi că pilitura e mai rară sau mai deasă, după cum cîmpul magnetic local e mai slab sau mai intens.

Figura 89 reprezintă spectrul magnetic al unui magnet permanent drept, polarizat magnetic în sens longitudinal, obţinut cu pilitură de fier (fig.89 a), respectiv cu acul magnetic (fig.89 b).

Figura 90 reprezintă spectrul cîmpului magnetic terestru, într-un plan meridian, în care se indică Nordul şi Sudul magnetic şi geografic.

22.8. Combinarea momentelor magnetice. Momentele magnetice se combină aditiv, adică un mic corp format din reunirea mai multor corpuri ale căror momente $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \ldots \bar{m}_n$ nu variază cînd sînt reunite, are un moment magnetic $\bar{m}$ egal cu suma vectorială a momentelor corpurilor reunite în el:

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \ldots \bar{m}_n \qquad (91)$$

22.9. Polarizaţia magnetică. Limita cîtului dintre suma vectorială $\Delta \bar{m} = \sum \bar{m}_i$ a momentelor magnetice ale materialului dintr-un volum Δ_v şi dintre acest volum cînd el tinde către zero, adică densitatea de volum vectorială a momentelor magnetice, se numeşte polarizaţie magnetică sau intensitate de magnetizaţie $\bar{M}$:

$$\bar{M} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta \bar{m}}{\Delta v} = \frac{d\bar{m}}{dv} \qquad (92)$$

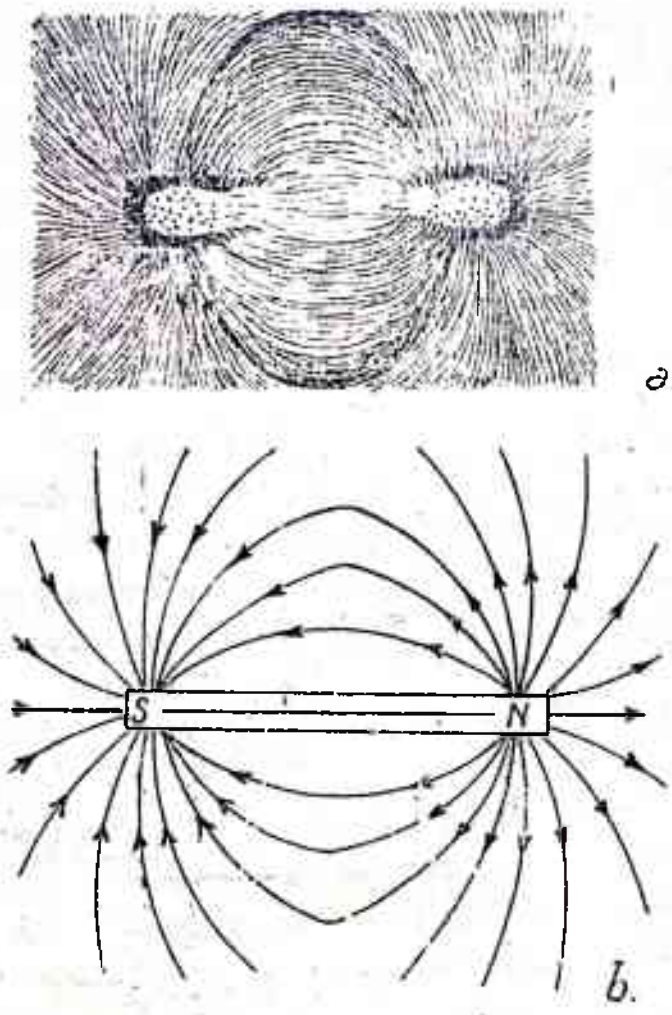


Fig. 89 a,b,
Spectrul magnetic al unui magnet drept, obţinut cu pilitură de fier (a) şi cu acul magnetic (b)

Un corp în care polarizaţia magnetică e diferită de zero se numeşte corp polarizat magnetic. Polarizaţia lui magnetică poate fi permanentă, adică independentă de intensitatea locală a cîmpului magnetic, cum este cu o anumită aproximaţie, polarizaţia magnetică a anumitor oţeluri dure; în acest caz corpul se numeşte magnetizat. Polarizaţia magnetică poate depinde de intensitatea locală actuală a cîmpului magnetic, ca polarizaţia celor mai multe corpuri, sau poate depinde de succesiunea stărilor prin care a trecut corpul, ca polarizaţia magnetică a corpurilor feromagnetice (fierul, nichelul, cobaltul, anumite aliaje, etc.)

Unitatea MKSC de polarizaţie magnetică se numeşte newton pe milioersted metru pătrat (N/mOe $\cdot$ m^2) în unităţi neraţionalizate şi weber pe metru pătrat în unităţi raţionalizate.

22. lo. Permeabilitatea absolută a vidului. Fie $2\pi_0\left(\frac{K}{4\pi}\right)^2$ mărimea proprie vidului, egală în fiecare sistem de unităţi, cu valoarea absolută a cuplului care se exercită între două corpuri magnetizate, care au cîte o unitate de moment magnetic, axele magnetice perpendiculare una spre alta

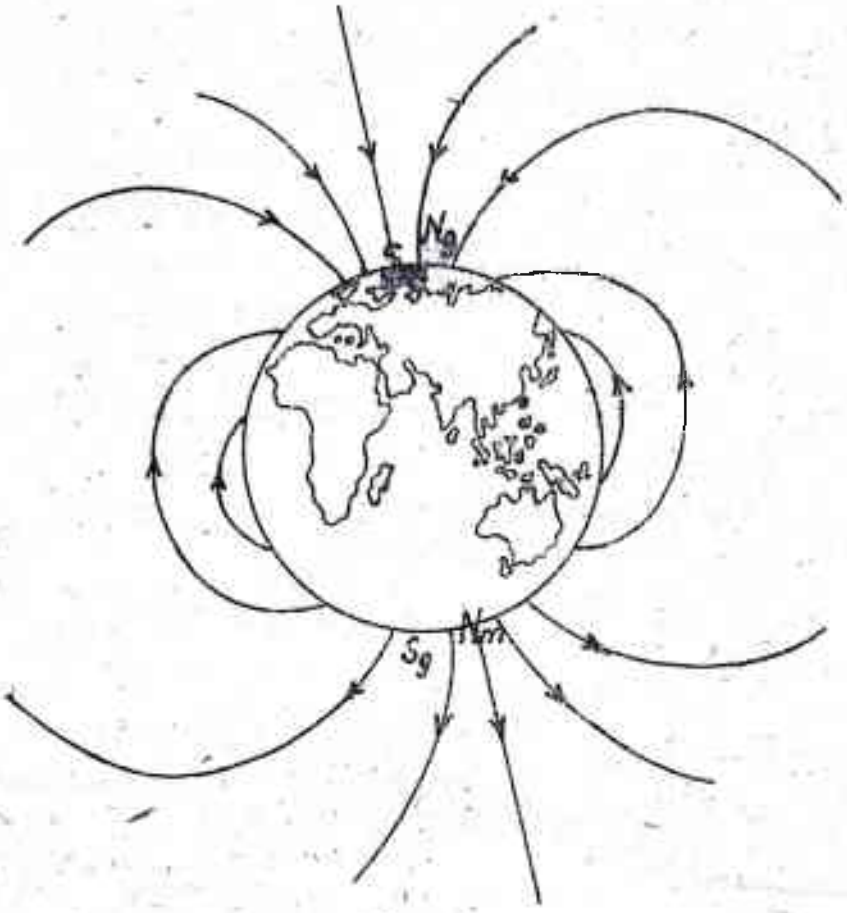


Fig. 9o
Spectrul magnetic al Pămîntului

şi una dintre aceste axe fiind cuprinsă în dreapta care le uneşte, situate în vid, la unitatea de distanţă unul de altul. Mărimea proprie vidului care are în sistemul considerat de unităţi pentru forţă, lungime şi moment magnetic, valoarea

(93) $\mu_0 = \frac{4\pi}{K\,\pi_0}$

se numeşte permeabilitatea magnetică absolută a vidului, K fiind coeficientul de raţionalizare.

De exemplu, în sistemul de unităţi MKSC, în care $\pi_0 = 10^7$, rezultă că $\mu_0 = 10^{-7}$ dacă se consideră sistemul de unităţi neraţionalizat ($K = 4\pi$), şi $\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7}$ dacă se consideră sistemul de unităţi raţionalizat; în primele unităţi, unitatea de permeabilitate se numeşte weber pe milioersted metru pătrat (Wb/mOe m^2) iar în ultimele henry pe metru (H/m).

22.11. Sistemele hibride de unităţi. In aceste sisteme unitatea de cuplu utilizată în definirea unităţii de moment magnetic diferă de unitatea de cuplu utilizată în calculul momentului electric. Dacă τ_0 unităţi de cuplu care intervin în formulele cu moment electric sînt egale cu ν_0 unităţi de cuplu care intervin în formulele cu moment magnetic, expresiunea cuplului asupra corpurilor polarizate magnetic

în unităţi de cuplu folosite în cazul polarizaţiei electrice este:

$$\bar{C}_m = \frac{\chi_m}{\gamma_0} \bar{m} \times \bar{H} \qquad (89\ a)$$

iar forţa este:

$$\bar{F}_{mv} = \frac{\chi_m}{\gamma_0} (\bar{m}\ \mathrm{grad})\ \bar{H}_v \qquad (90\ a)$$

23. SARCINILE MAGNETICE DIPOLARE, DE POLARIZAŢIE ŞI LIBERE

23.1. Sarcinile magnetice dipolare. Dacă ar exista sarcini magnetice adevărate q_m şi s-ar exercita asupra lor în cîmpul magnetic de intensitate $\bar{H}_v$, forţa $\bar{F}'_m = q_m \bar{H}_v$, s-ar pune problema dacă se poate găsi o repartiţie de sarcini magnetice echivalentă cu un moment magnetic $\bar{m}$, adică astfel încît, dacă s-ar stabili acea repartiţie în corpul magnetizat, să se exercite asupra lui în cîmpul magnetic acelaşi cuplu $\bar{C} = \bar{m} \times \bar{H}$, ca asupra corpului cu momentul $\bar{m}$.

Cea mai simplă repartiţie care satisface această condiţiune ar fi constituită, ca în cazul analog din cîmpul electric, din două sarcini magnetice egale şi de nume contrare, numite sarcini magnetice dipolare: q_{md} şi $-q_{md}$, situate în corp, pe axa lui magnetică, la distanţă foarte mică dar macroscopic nedeterminată l, una de alta, raza vectoare $\bar{l}$ cu originea în $-q_{md}$ şi cu extremitatea în q_{md} satisfăcînd condiţiunea:

$$\bar{m} = q_{md} \bar{l} \qquad (94)$$

Rezultă:

$$q_{md} = \frac{m}{l} \qquad (94)$$

Sarcinile magnetice dipolare sînt mărimi fictive; ele nu sînt definite complect de momentul magnetic $\bar{m}$, fiindcă în relaţia dintre ele şi moment intervine mărimea arbitrară şi foarte mică l, care poate fi făcută şi să tindă şi către zero;

experienţa microscopică arată că nu există sarcini magnetice dipolare. Ele sînt numai mărimi utile în anumite cazuri.

23.2. Sarcina magnetică de polarizaţie. Dacă polarizaţia magnetică a unui corp e uniformă, sarcinile lui magnetice dipolare de un nume pot fi, local, în exces faţă de cele de nume contrar; acest exces, care reprezintă o mărime fictivă se numeşte sarcină magnetică de polarizaţie q_{mp}. Relaţiile fiind aceleaşi ca în cazul polarizaţiei electrice, unde p trebuie înlocuit cu m, P cu M, q_d cu q_{md} şi q_p cu q_{mp}, urmează următoarele: sarcina magnetică de polarizaţie q_{mp} dintr-o suprafaţă închisă Σ e egală şi de semn contrar cu fluxul polarizaţiei magnetice prin acea suprafaţă:

$$(95) \qquad q_{mp} = - \int_{\Sigma} \bar{M} \, d \, \bar{A}$$

Densitatea ei de volum ρ_{mp} e egală şi de semn contrar cu valoarea locală a divergenţei polarizaţiei magnetice:

$$(95\ a) \qquad \rho_{mp} = - \operatorname{div} \bar{M}$$

Densitatea ei de suprafaţă σ_{smp} e egală şi de semn contrar cu valoarea locală a divergenţei de suprafaţă a polarizaţiei magnetice:

$$(95\ b) \qquad \sigma_{smp} = - \operatorname{div} s \, \bar{M} = - (\bar{M}_{na} + \bar{M}_{nb})$$

unde $\operatorname{div} s \, \bar{M} = \bar{M}_{na} + \bar{M}_{nb}$ e egală cu suma componentelor polarizaţiei magnetice $\bar{M}$ după normalele la acea suprafaţă, pe cele două feţe a şi b ale ei considerate pozitive cînd sînt îndreptate dinspre suprafaţă spre exterior.

23.3. Sarcina magnetică liberă. Neexistînd sarcină magnetică adevărată ($q_{ma}=0$), sarcina magnetică de polarizaţie ($q_{mp} = q_{ma} + q_{mp}$) se poate numi şi sarcină magnetică liberă prin analogie cu sarcina electrică liberă:

$$(96) \qquad q_{ml} = q_{mp}$$

Suma sarcinilor magnetice de polarizaţie sau libere ale unui corp polarizat, plasat în vid, e nulă.

In adevăr, situînd în vid o suprafaţă închisă care închide corpul în vid, M = 0 şi deci:

$$(96\ a) \qquad q_{mlt} = q_{mpt} = -\int_{\Sigma_e} \bar{M} \cdot d\bar{A} = 0$$

Unitatea MKSC de sarcină magnetică (dipolară, de polarizaţie sau liberă) se numeşte Newton pe milioersted (N/mOe) în unităţi nerafionalizate, şi Weber (Wb), în unităţi raţionalizate.

24. CÎMPUL MAGNETOSTATIC IN VID AL CORPURILOR POLARIZATE MAGNETIC.

24.1. Bazele calculului intensităţii cîmpului magnetostatic în vid. Am arătat că din punctul de vedere al forţelor care se exercită în cîmpul magnetic asupra unui corp polarizat magnetic, starea unui mic corp, în care acesta are un moment magnetic $\bar{m}$, e echivalentă cu starea lui în care ar avea o pereche de sarcini magnetice dipolare egale şi de nume contrare q_{md} şi $(-q_{md})$, situate la o mică distanţă ℓ una de alta, astfel încît:

$$(97) \qquad q_{md}\ \bar{\ell} = \bar{m}\ ,$$

adică $q_{md} = m : \ell$, unde ℓ rămîne nedeterminat. Această echivalenţă ar exista dacă ar exista sarcini magnetice adevărate şi dacă s-ar exercita în cîmpul magnetic asupra unui corp care ar avea o astfel de sarcină forţa.

$$(a) \qquad \bar{F}'m = q_m \cdot \bar{H}_v$$

Expresiunile (96) şi (a) sînt analoage cu expresiunile (36) şi (1) din cazul cîmpului electric. Pe baza acestei analogii putem încerca să calculăm intensitatea cîmpului magnetostatic în vid al corpurilor polarizate magnetic după o metodă analoagă cu aceea folosită în calculul intensităţii cîmpului electrostatic în vid al corpurilor polarizate electric, urmînd ca experienţe să infirme sau să nu infirme această încercare.

Prin analogie cu expresiunea coulombiană (8) a intensităţii cîmpului electrostatic $\overline{E}$ pe care-l produce în vid un mic corp care are sarcina electrică adevărată q:

$$(8) \qquad \overline{E}_v = \frac{K}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\overline{R}}{R^3}$$

Vom admite că, dacă ar exista sarcină magnetică adevărată, un mic corp care ar avea o astfel de sarcină q_m ar produce în vid un cîmp magnetostatic a cărui intensitate $\overline{H}'_v$ ar avea expresiunea

$$(b) \qquad \overline{H}_v = \frac{K}{4\pi\mu_0} \frac{q_m\overline{R}}{R^3}$$

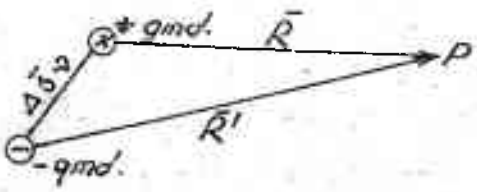
care arată că $\overline{H}_v$ derivă dintr-un potenţial magnetostatic

$$(c) \quad V_{H_v} = \frac{K}{4\pi\mu_0} \frac{q_m}{R}$$

Vom admite apoi că există echivalenţă între momentul magnetic şi sarcinile magnetice dipolare ale dubletului magnetic corespunzător şi din punctul de vedere al cîmpului magnetostatic produs. Dacă există echivalenţă, şi din acest punct de vedere, cîmpul magnetostatic produs de un corp care are momente magnetice e identic cu cîmpul electrostatic pe care l-ar produce acel corp, conform formulei (b), dacă momentele magnetice ale părţilor lui ar fi nule şi corpul ar avea, ca sarcini magnetice adevărate, sarcinile magnetice dipolare corespunzătoare momentelor magnetice. Experienţa nu infirmă în nici un caz încercarea de a calcula în acest fel intensitatea cîmpului magnetostatic în vid, dacă se operează cu dubletul magnetic elementar corespunzător momentului magnetic, deşi formulele (a) şi (b) utilizate în analogii şi calcule, nu exprimă nici un fapt experimental, fiindcă nu există sarcină magnetică adevărată. Acestor construcţii intermediare nu le corespunde deci nici o realitate; ele au o simplă valoare de ghid în găsirea expresiunii intensităţii cîmpului electrostatic în vid.

24. 2. Formula lui Coulomb pentru corpurile cu moment magnetic. Considerăm un mic corp care are momentul

magnetic $\bar{m}$ şi calculăm intensitatea $\bar{H}_{vp}$ a cîmpului magnetostatic pe care-l produce în vid, asimilîndu-l cu un dublet magnetic, folosind formulele (b) şi (c) şi considerînd apoi cazul limită al dubletului elementar echivalent (fig.9o a). Fie $\bar{R}$ şi $\bar{R}'$ razele vectoare cu originile în q_{md} şi în $-q_{md}$, şi extremităţile în punctul P din vid, în care calculăm intensitatea cîmpului magnetostatic. Potenţialul magnetostatic în P al corpului care ar avea cele două sarcini magnetice dipolare ca sarcini magnetice adevărate ar fi, conform formulei (c):



$$V_{Hv} = \frac{K}{4\pi\mu_o} q_{md}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

Dublet magnetic.

Cu notaţiile din figură rezultă

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{d}{ds_v}\left(\frac{1}{R}\right)\Delta\bar{s}_v = \frac{1}{R} - \Delta\bar{s}_v \text{ grad } \frac{1}{R}$$

unde simbolul "prim" (') arată că gradientul se calculează deplasînd cu $\Delta\bar{s}_v$ punctul în care se găseşte sarcina magnetică dipolară ($-q_{md}$). Deci:

$$(d) \quad V_{Hv} = \frac{K}{4\pi\mu_o} q_{md}\,\Delta\bar{s}_v \text{ grad } \frac{1}{R} = \frac{K}{4\pi\mu_o}\bar{m} \text{ grad } \frac{1}{R} = \frac{K}{4\pi\mu_o}\bar{m}\cdot\frac{\bar{R}_{xy}}{R^3}$$

Intensitatea cîmpului magnetostatic în vid, corespunzătoare, se calculează cu formula $\bar{H}_v = -\text{grad } V_{Hv}$ şi are expresiunea

$$(e) \quad \bar{H}_v = -\text{grad } V_{Hv} = -\frac{K}{4\pi\mu_o}\left[(\bar{m}.\bar{R})\text{ grad }\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R^3}\text{ grad }(\bar{m}\,\bar{R})\right] = \frac{K}{4\pi\mu_o}\left[3\frac{(\bar{m}\bar{R})}{R^5}\bar{R} - \frac{\bar{m}}{R^3}\right]$$

Intensitatea acestui cîmp depinde deci de direcţia faţă de m şi e invers proporţională cu puterea a treia a distanţei R de la mieul corp polarizat magnetic, putînd fi extrem de

intens în imediata apropiere a acestui corp. Aceasta prezintă mare importanţă în studiul cîmpurilor magnetice din interiorul corpurilor.

Dacă se descompune intensitatea într-o componentă radială H_{vr} şi în una meridională $H_{v\vartheta}$ perpendiculară pe H_{vr}, şi dacă ϑ e unghiul format de vectorii $\bar{m}$ şi $\bar{R}$, se obţine de mai sus:

$$H_{vr} = \frac{K}{4\pi\mu_0}\frac{2\,m\cos\vartheta}{R^3} \quad ; \quad H_{v\vartheta} = \frac{K}{4\pi\mu_0}\frac{m\sin\vartheta}{R^3}$$

24.3. Cîmpul electrostatic în vid. Fie un sistem oarecare de corpuri care au momentele magnetice discrete $\bar{m}_i$, polarisaţia magnetică $\bar{M}$ şi puterile $\bar{M}_s$ ale foiţelor magnetice. Aplicînd principiul superpoziţiei, stabilim expresiunea generală a potenţialului lor magnetostatic în vid:

$$(97) \quad V = \frac{K}{4\pi\mu_0}\left[\int \bar{M}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\,d.v' + \int \bar{M}_s\,\mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,d.A' + \sum_{k=1}^{m}\bar{m}_k\,\mathrm{grad}'\frac{1}{R_k}\right]$$

Această expresiune se poate transforma în aşa fel, încît să apară în ea sarcina magnetică de polarizaţie, aplicînd identitatea:

$$\frac{\bar{M}}{R} = \bar{M}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,\mathrm{div}'\bar{M} = \bar{M}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R} - \frac{\rho_{mpv}}{R}$$

Deducem din această identitate

$$\int \bar{M}\,\mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,d.v' = \int\frac{\rho_{mpv}}{R}\,dv' + \int \mathrm{div}\left(\frac{\bar{M}}{R}\right)dv'$$

Extinzînd integrala asupra spaţiului întreg (ffindcă numai elementele dv' în care $\bar{M}$ diferă de zero au contribuţie la integrală) şi aplicînd teorema lui Gauss şi Ostrogradski, se obţine

$$\int \bar{M}\,\mathrm{grad}'\frac{1}{R}\,d.v' = \int\frac{\rho_{mp.v}}{R}\,d.v' + \int\frac{\bar{M}}{R}\,d\bar{A}_\infty = \int\frac{\rho_{mp\,v}}{R}\,dv'$$

fiindcă pe suprafaţa $\sum_\infty \bar{M} = 0$, dacă întregul sistem de corpuri polarizate se găseşte la distanţă finită. Se arată analog că dacă polarizaţia are divergenţa de suprafaţă ea poate fi înlocuită în calculul potenţialului magnetostatic cu sarcinile magnetice de polarizaţie corespunzătoare, presupuse repartizate cu densitatea superficială ρ_{mps}. Se obţine

deci şi următoarea expresiune generală a potenţialului magnetostatic:

$$(97\ a)\quad V_{Hv} = \frac{K}{4\pi\mu_0}\left[\int \frac{\rho_{mpv}}{R}\,dv' + \int \frac{\rho_{mps}}{R}\,dA' + \int \bar{M}_s \operatorname{grad}' \frac{1}{R} dA' + \sum_{k=1}^{m} m_k \operatorname{grad}' \frac{1}{R_k}\right]$$

Intensitatea cîmpului magnetostatic în vid se calculează cu formule $H_v = -\operatorname{grad} V_{Hv}$. Utilizînd ultima expresiune, obtinem:

$$(97\ b)\quad \bar{H}_v = \operatorname{grad} V_{Hv} = \frac{K}{4\pi\mu_0}\left[\int \frac{\rho_{mpv}\,\bar{R}}{R^3}\,dv' + \int \frac{\rho_{mps}\,\bar{R}}{R^3}\,dA' - \operatorname{grad}\int \bar{M}s \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\,dA' + \sum_{k=1}^{m}\left(3\frac{(\bar{m}_k \bar{R}_k)}{R_k^3}\bar{R} - \frac{\bar{m}_k}{R_k^3}\right)\right]$$

Formulele stabilite mai sus pot fi aplicate numai rareori direct în calculul intensităţii cîmpurilor magnetostatice, fiindcă polarizaţia magnetică temporară depinde de însăşi starea care urmează să fie determinată pe baza acestui calcul.

Pe baza formulelor stabilite se poate demonstra însă o teoremă a lui Gauss referitoare la fluxul magnetic în cîmpurile magnetostatice, prin suprafeţe situate în întregime în vid. Suma sarcinilor magnetice de polarizaţie din orice corp izolat e nulă, conform relaţiei (98 a), iar sarcina magnetica adevărată nu există. Rezultă, analog ca în electrostatică:

$$\int_{\Sigma} \bar{H}_v\,d\bar{A} = 0$$

dacă suprafata Σ e situată în întregime în vid.

25. INTENSITATEA CIMPULUI MAGNETIC SI INDUCTIA MAGNETICA

25.1. Explorarea cîmpului magnetic în corpuri

Vectorul cîmp magnetic într-un corp ar urma să fie definit prin limite către care tinde intensitatea cîmpului magnetic

dintr-o cavitate locală vidă, cînd dimensiunile acesteia tind către zero. Prin această definiţie se obţin însă în fiecare punct şi la starea magnetică dată, infinit de multe valori, corespunzătoare diferitelor orientări posibile ale unei cavităţi de formă dată, şi la infinit de multe mulţimi de astfel de valori, corespunzătoare diferitelor forme posibile ale acestor cavităţi. Din acest punct de vedere, relaţiile sînt analoage cu cele din cîmpul electric. De aceea starea dintr-un cîmp magnetic în corpuri nu poate fi descrisă macroscopic complect cu ajutorul unui singur cîmp de vectori; e deci nevoie de cel puţin două cîmpuri de vectori, din două mici cavităţi vide, de forme diferite.

Facem calculul acestor vectori cîmp în cazul particular al regimului magnetostatic, fiindcă în acest caz cunoaştem expresiunea generală (97) a potenţialului magnetostatic în vid, şi deci a intensităţii cîmpului magnetostatic în vid. Folosim ca referinţă, ca şi în calculul corespunzător din cîmpul electrostatic, expresiunea formală a intensităţii cîmpului magnetostatic $\bar{H}$, pe care am obţine-o aplicînd formula (97) şi punctelor din interiorul corpurilor, şi calculînd gradientul cu semn schimbat al potenţialului V_{Hv} în ipoteza că nu s-ar practica nici o cavitate în corp. Calculăm apoi, în condiţiuni în rest egale, vectorul cîmp magnetic dintr-o cavitate vidă, de suprafaţă Σ, în ipoteza că s-a scos materialul din cavitate, că adică s-a suprimat, în acest fel, polarizaţia magnetică din cavitate, pentru a putea introduce corpul de probă. Calculul e analog cu cel care conduce la formula (38 c) valabilă pentru cîmpurile electrostatice, - şi rezultatul e acelaşi. Intensitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic din cavitatea , cînd aceasta se restrînge asupra punctului în care se calculează $\bar{H}$, are următoarea expresiune importantă:

$$(99) \qquad \bar{H}_{\Sigma} = \bar{H} + \frac{\chi}{4\pi\mu_0} \lim_{\Sigma \to 0} \int \frac{(\bar{N}\, d\bar{A}')}{R^3} \bar{R}$$

unde $\bar{N}$ e constant la efectuarea integralei, $\bar{R}$ e raza vectoare cu originea în elementele de arie $d\bar{A}'$ ale suprafeţei

şi extremitatea în punctul în care se calculează $\bar{H}_\Sigma$. Se obţine deci iarăşi o integrală semiconvergentă în expresiunea mărimii $\bar{H}_\Sigma$, care e determinată astfel prin două mărimi: $\bar{H}$ şi $\bar{M}$. Se utilizează în locul acestor două valori, $\bar{H}_\Sigma$ în două cavităţi diferite, fiindcă acestea $\bar{H}_\Sigma$ se pot măsura. Prin convenţiunea generală, se alege în acest scop, începînd cu Maxwell, un canal drept, foarte scurt şi extrem de strîmt, care are axa paralelă cu $\bar{M}$ şi în care, ca şi în cîmpul electrostatic:

$$\bar{H}_{cp} = \bar{H} \qquad (99\ a)$$

Se alege apoi o fantă foarte mică şi extrem de plată, normală pe $\bar{M}$ şi în care, ca şi în cîmpul electrostatic:

$$\bar{H}_{fp} = \bar{H} + \frac{\varkappa}{\mu_0}\bar{M}. \qquad (99\ b)$$

Din ultimele două relaţii se calculează $\bar{H}$ şi $\bar{M}$ în funcţiune de $\bar{H}_c$ şi $\bar{H}_f$, care pot fi măsuraţi. Generalizăm şi pentru cazul cîmpurilor care nu sînt magnetostatice, fără a utiliza relaţia (99) dintre $\bar{H}_{cp}$ şi $\bar{H}_{fp}$

25.2. Intensitatea şi intensitatea-inducţie a cîmpului magnetic. Prin convenţiune generală se aleg, ca şi în cîmpul electric, drept cavităţi vide, pentru care se definesc cele două cîmpuri de vectori, un canal şi o fantă perpendiculară pe axa canalului; orientarea comună a axei canalului şi a normalei pe fantă e aleasă astfel, încît să fie paralelă cu diferenţa vectorială dintre cele două intensităţi ale cîmpului magnetic, în fantă şi în canal. Se obţin astfel următoarele definiţii ale vectorilor cîmp şi celor două cîmpuri, care se numesc intensitatea cîmpului magnetic şi intensitatea inducţie a cîmpului magnetic.

Intensitatea cîmpului magnetic într-un corp $\bar{H}$ e o mărime vectorială de stare a cîmpului magnetic, prin care trebuie înmulţit vectorial momentul magnetic $\bar{m}$ al unui mic corp de probă magnetizat, pentru a obţine cuplul $\bar{C}_{cp}$ care s-ar exercita asupra corpului de probă, cînd acesta s-ar găsi în imobilitate relativă într-un scurt canal

vid şi foarte strîmt a cărui axă are direcţia privilegiată pe care o indicăm mai jos.

(99 c) $$\bar{C}_{cp} = \bar{m} \times \bar{H}$$

Intensitatea-inductie a cîmpului magnetic într-un corp $\bar{H}$: o mărime vectorială de stare a cîmpului magnetic prin care trebuie înmulţită vectorial momentul magnetic $\bar{m}$ al unui mic corp de probă magnetizat, pentru a obţine cuplul $\bar{C}_c$ care s-ar exercita asupra corpului de proba cînd acesta s-ar găsi imobilizate relativă, într-o mică fantă vidă şi foarte plată carei normală are direcţia axei canalului folosit pentru definirea intepsităţii cîmpului magnetic; această direcţie e direcţia diferenţei vectoriale $\bar{B}' - \bar{H}$ dintre intensitatea-inductie $\bar{B}'$ şi intsăsitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic, cum rezultă acestea în fantă şi în canal:

(99 d) $$\bar{C}_{fp} = \bar{m} \times \bar{B}$$

In materialeia isotrope, $\bar{H}$ şi $\bar{B}'$ sînt paralele şi paraleli cu axa canalului, respectiv cu normala pe fanta folosit pentru definirea lui $\bar{H}$, respectiv a lui $\bar{B}$, la toate cazurile, la $\bar{H}$ dat diferenţa $\bar{B}' - \bar{H}$ depinde de proprietăţi locale şi acestea cel mult de evolutia din trecut a perţiurii locale de material.

In vid există totdeauna identitatea $\bar{B}' = \bar{H}$.

Calitativ, diferenţa dintre mărimile $\bar{B}'$ şi $\bar{H}$ se poate pune în evidenţă cu ajutorul experientei spectrelor magnetice cu pilitură de fier. Folosim un magnet permanent în formă de potcoavă avînd între cele două braţe o placă pătrată de otel moale, avînd o fantă paralelă cu două laturi ale plăcii, şi care o strabate; placa şi fanta sunt acoperite cu o foaie subţire de hîrtie Dacă fanta are diricţia N S magnetului (fig.91 a), spectrul magnetic e uniform în dreptul fantei care are functiunea canalului pentru definirea intensităţii cîmpului magnetic, cu şi golul de deasupra plăcii. Dacă fanta e perpendiculară pe direcţie N-S a magnetului pilitura de fier se ingramădeste în dreptul fantei indicînd în interiorul ei un vector cîmp magnetic $\bar{B}'$

mai mare decît $\bar{H}$ de deasupra plăcii (fig.91 b).

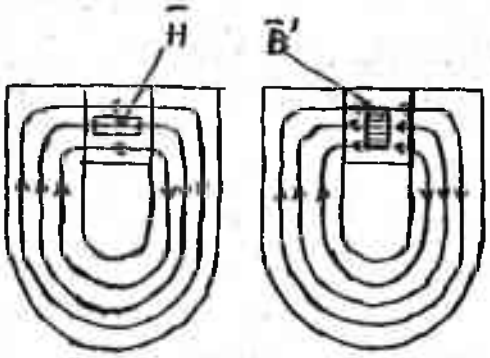


Fig. 91

Intensitatea şi intensitatea-inducţie a cîmpului magnetic într-un corp.

25.3. Inducţia magnetică în corpuri. In sistemele de unităţi de măsură (de exemplu MKSC), unităţile de moment magnetic se definesc astfel, încît cînd două corpuri au cîte o unitate de moment magnetic şi sînt situate în vid, la o distanţă egală cu unitate de lungime unul de altul astfel încît momentele lor să fie perpendiculare unul pe altul şi momentul unuia dintre ele să fie dirijat spre celălalt, cuplul care se exercită între ele nu e egal cu două unităţi de cuplu. Spre a compensa această deosebire faţă a două unităţi, adesea nu se operează cu intensitatea-inducţie $\bar{B}'$ a cîmpului magnetic, ci cu o mărime egală cu produsul dintre permeabilitatea magnetică absolută a vidului şi intensitatea - inducţie $\bar{B}'$ a cîmpului magnetic:

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{B}' \qquad (99\ e)$$

Unitatea ei nu e afectată de raţionalizare. In sistemul magnetostatic, unitatea de inducţie magnetică se numeşte Gauss; în sistemul MKSC, ea e de 10^4 ori mai mare şi se numeşte weber pe metru pătrat (Wb/m^2).

Vom folosi de obiceiu inducţia magnetică, fiindcă foarte multe expresii care intervin în electrotehnică sînt, în general, mai simple dacă sînt exprimate cu $\bar{B}$, în loc de a fi exprimate cu $\bar{B}'$. Tuburile de linii de cîmp ale induc-

ţiei magnetice se numesc şi tuburi de flux magnetic.

26. LEGEA LEGĂTURII DINTRE INDUCŢIE, INTENSITATE ŞI POLARIZAŢIE ÎN CÎMPUL MAGNETIC.

26.1. Legea. Considerăm două corpuri identice şi în stări fizice identice, situate în două cîmpuri magnetice identice, şi ne fixăm atenţiunea asupra unui punct din unul dintre corpuri şi asupra omologului său din celălalt corp. Presupunem că în jurul punctului din primul corp e evacuată partea din canalul folosit pentru a defini intensitatea $\overline{H}$ a cîmpului magnetic în acel punct, şi că din jurul punctului omolog din cel de al doilea corp e evacuată din fanta folosită pentru a defini intensitatea-inducţie $\overline{B}'$. Am arătat în (99 b) că în cîmpul magnetostatic există între $\overline{B}$,$\overline{H}$ şi relaţia :

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H} + \varkappa \overline{M} \qquad (100)$$

Experienţa arată că această relaţie e valabilă şi în cîmpurile care nu sînt magnetostatice: In orice moment şi în orice punct, inducţia magnetică e deci egală cu suma dintre produsul permeabilităţii magnetice absolute a vidului prin intensitatea locală instantanee a cîmpului magnetic şi dintre produsul coeficientului de raţionalizare prin polarizaţia magnetică locală instantanee a materiei (legea dependenţei dintre inducţia magnetică, intensitatea cîmpului magnetic şi polarizaţia magnetică).

Rezultă că mărimile $\overline{B}'$ şi $\overline{H}$ dintr-un punct diferă una de alta numai în punctele în care materialul din vecinătatea punctului e polarizat magnetic şi că, deci în vid $\overline{B}'_v = \overline{H}_v$. Mai rezultă că direcţia comună a axei canalului vid, folosit pentru a defini intensitatea cîmpului magnetic, şi a normalei pe fanta folosită pentru a defini intensitatea-inducţie a cîmpului magnetic, e direcţia polarizaţiei magnetice locale instantanee, atît în cîmpurile magnetostatice, cît şi în cele nemagnetostatice.

26.2. Relaţiile cu teoria electronilor. În teoria electronilor, intensitatea cîmpului magnetic se defineşte ca mărime derivată, printr-o ecuaţie de definiţie:

$$\bar{H} = \mu_0^{-1}\bar{B} - \chi\mu_0^{-1}\bar{M}$$

identică relaţia (loc), care nu apare deci ca lege. Faptul că într-un anumit canal vid, momentul static al forţelor care se exercită asupra unui mic corp de probă e egal cu produsul vectorial al momentului său magnetic prin intensitatea - cîmpului magnetic rezultă ca o consecinţă, în această teorie. În teoria macroscopică nu se dispune însă de mijloacele necesare pentru a face ca relaţia (loc) să apară ca simplă relaţie de definiţie a unei mărimi derivate. Se observă însă analogia cu relaţia (4o c) din Introducerea matematică. Dacă se înlocuieşte în acea relaţie $\bar{G}_{rp}$ cu $\bar{B}'$, $\bar{G}_{op}$ cu $\bar{H}$ şi $\bar{P}$ cu $\frac{\chi}{4\pi}\bar{M}$ se obţine relaţia (loc).

27. Legea fluxului magnetic

27.1. Teorema fluxului magnetic. Dacă se variază direcţia normalei feţei în care s-a definit intensitatea-inducţie $\bar{B}'$ se obţine, pentru fiecare nouă orientare a ei, ceea ce un alt vector cîmp magnetic $\bar{H}_f$, diferit de $\bar{B}'$. Se demonstrează, cu ajutorul expresiunii (99), analog ca în cîmpul electrostatic, că în cîmpul magnetostatic, oricare ar fi orientarea ν, totdeauna proiecţia ortogonală a intensităţii-inducţii locale $\bar{B}'$ pe orientarea ν e egală cu proiecţia ortogonală a vectorului cîmp magnetic $\bar{H}_f$. Această relaţie se poate pune sub forma :

$$\bar{u}_\nu \bar{H}_{f\nu} = \bar{u}_\nu \bar{B}' \qquad (99\ f)$$

Experienţa arată că această relaţie e valabilă în orice cîmp. Aceasta rezultă şi din legile fenomenelor magnetice şi constituie teorema tensiunii magnetice.

Dacă versorul $\bar{u}_\nu$ indică, de exemplu, orientările normalelor pozitive ale elementelor de arie dA ale unei suprafeţe S care trece prin corp ($d\bar{A} = \bar{u}_\nu\, dA$) şi dacă s-a eva-

cuat materialul dintr-o fantă foarte strîmtă care îmbracă acea suprafaţă, pentru a putea măsura deslungul ei vectorii cîmp magnetic $\bar{H}_{f_v}$, fluxul acestui vector cîmp magnetic S(fig. 85) se poate pune sub forma:

$$(99\ g) \qquad \int_S \bar{H}_{fv} \cdot d\bar{A} = \int_S \bar{H}_{fv} \bar{u}_v \, dA = \int_S \bar{B} \bar{u}_v \, dA = \int_S \bar{B} \, d\bar{A}$$

adică e egal cu fluxul intensităţii- inducţie a cîmpului magnetic prin suprafaţa S. Din aceste motive, B este un vector cîmp important pentru calculul fluxurilor vectorilor cîmp magnetic în corpuri. Se observă a analogia dintre (99f) şi relaţia(4o b) din Introducerea matematică, dacă se ţine seama de analogia dintre (99) şi relaţia (4o c) din acea Introducere.

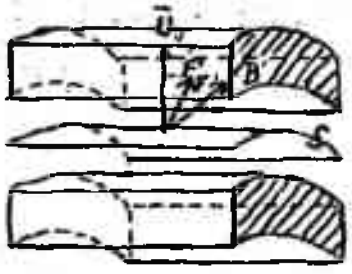


Fig. 91
Figură pentru calculul integralei de suprafaţă a vectorului cîmp magnetic $\bar{H}_{fv}$

27.2. Legea fluxului magnetic

Cîmpurile magnetice sînt produse de momente magnetice, de curenţi electrici, sau de cîmpuri de inducţie electrică variabile în timp. Se constată experimental că, oricare ar fi felul incidental în care sînt produse cîmpurile magnetice, totdeauna e valabilă următoarea lemă. In vid, fluxul cîmpului magnetic $\bar{H}_v$ are aceiaşi valoare prin toate suprafeţele deschise care au acelaşi contur S_r, adică depinde numai de contur, nu şi de configuraţia suprafeţei mărginite de el, dacă e contat pozitiv după normalele asociate după regula burghiului drept unui sens unic , ales pozitiv pe contur:

$$\int_{S_r} \bar{H}_v d\bar{A} = \int_{S'_r} \bar{H}_v dA$$

Fiindcă oricare două suprafeţe deschise care au acelaşi contur formează o suprafaţă închisă, urmează că, dacă fluxul prin suprafeţele închise e contat pozitiv cînd intensitatea cîmpului magnetic e îndreptată spre exteriorul lor, fluxul cîmpului magnetic în vid e nul prin toate suprafeţele închi-

se cari se pot trasa în cîmp:

$$(a) \quad \int_{\Sigma} \bar{H}_v \, d\bar{A} = 0$$

Dacă suprafaţa Σ e situată în parte sau în întregime în corpuri, spre a-i aplica legea referitoare la suprafaţa situată în vid, trebuie presupus că se depărtează materia de imediata ei apropiere, şi anume dintr-o fantă care îmbracă suprafaţa; în aceste se măsoară însă un vector cîmp magnetic $\bar{H}_v$ al cărui flux e egal cu fluxul intensităţii-inducţii a cîmpului magnetic $\bar{B}'$ şi legea fluxului magnetic ia următoarea formă:

$$(b) \quad \int_{\Sigma} \bar{B}' \, d\bar{A} = 0 \; ;$$

Dacă se operează cu ajutorul inducţiei magnetice $\bar{B} = \mu_o \bar{B}'$ în locul intensităţii inducţie $\bar{B}'$ a cîmpului magnetic, se obţine de aici prin inmulţire cu μ_o:

$$(1o1) \quad \int_{\Sigma} \bar{B} \, d\bar{A} = 0$$

Deci: Fluxul magnetic, adică fluxul inducţiei magnetice e nul prin toate suprafeţele închise care se pot trasa într-un cîmp magnetic(forma integrală a lemei fluxului magnetic). Unitatea MKSA de flux magnetic se numeşte Weber (Wb) şi nu e afectată de raţionalizare.

Lema fluxului magnetic exprimă că toate liniile unitate de cîmp ale inducţiei magnetice sînt închise. Dacă intră deci printr-o parte flux magnetic într-o suprafaţă închisă, acelaşi flux magnetic iese în acelaşi moment prin altă parte din ea. Legea se enunţă deci şi sub forma: Fluxul magnetic are aceiaşi valoare prin toate suprafeţele deschise care au acelaşi contur, adică depinde numai de contur şi nu de forma suprafeţei mărginite de el.

Aplicînd vectorului cîmp $\bar{B}$ teorema lui Gauss şi Ostrogradski, se obţine:

$$\int_{V_\Sigma} \operatorname{div} \bar{B} \, dv = 0$$

sau fiindcă volumul V_Σ e arbitrar :

(lol a) $\operatorname{div} B = 0$,

In fiecare moment şi în fiecare loc, divergenţa inducţiei magnetice e deci nulă (prima formă diferenţială a lemei fluxului magnetic).

Folosind expresiunea divergenţei de suprafaţă $\operatorname{div} \bar{B} = B_{na} + B_{nb}$ se obţine din (lol) :

$$\int_S (\bar{B}_{na} + \bar{B}_{nb})\, dA = 0$$

sau, fiindcă porţiunea S de suprafaţă e arbitrară :

(lol b) $B_{na} + B_{nb} = 0$

In orice moment şi în fiecare loc divergenţa de suprafaţă a inducţiei magnetice e nulă sau: Componentele normale pe o suprafaţă ale inducţiei magnetice pe cele două feţe ale oricărei suprafeţe sînt egale paralele şi îndreptate în acelaşi sens. Acest fapt se mai exprimă spunînd că, la trecerea prin orice suprafaţă, componenta normală pe acea suprafaţă a inducţiei magnetice variază continuu.

Fiindcă nu există sarcină magnetică adevărată, urmează că, dacă nu se găsesc într-un cîmp alte sisteme care produc cîmp magnetic, acesta e stabilit numai de prezenţa în cîmp a corpurilor polarizate magnetic. Dacă există şi alte sisteme care produc cîmp magnetic, prezenţa corpurilor magnetizate se manifestă prin faptul că ele determină, în locul intensităţii H_v, a cîmpului magnetic în vid intensitatea - inducţie $\bar{B}'$ căreia îi corespunde, în general, o intensitate $\bar{H}$ a cîmpului magnetic, diferită de H_v. Această modificare a intensităţii e echivalentă cu prezenţa în vid a unor sarcini magnetice de polarizaţie q_{mp}, în ipoteza că corpurile care au aceste sarcini magnetice ar influenţa cîmpul magnetic după o lege analogă cu legea fluxului electric, după care corpurile cu sarcini electrice influenţează cîmpul electric.

In adevăr ţinînd seama de expresiunea sarcinii magnetice de polarizaţie, în funcţiune de polarizaţia magnetică, se obţine din forma integrală a legii fluxului magnetic:

$$\int_{\Sigma} \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{A} = \int_{\Sigma} \vec{H} d\vec{A} + \frac{\chi}{\mu_0} \int_{\Sigma} \vec{M}_p d\vec{A} = \int_{\Sigma} H dA + \frac{\chi}{\mu_0} I_{mp\Sigma} = 0$$

adică

$$(1o2) \qquad \int_{\Sigma} \vec{H} d\vec{A} = -\frac{\chi}{\mu_0} I_{mp\Sigma} = \frac{\chi}{\mu_0} q_{m\ell_2}$$

unde $q_{m\ell_2}$ e sarcina magnetică liberă, egală cu sarcina de polarizație.

Aplicînd teorema lui Gauss pt Ostrogradski, rezultă că divergența intensității cîmpului magnetic e proporțională cu densitatea de volum $\rho_{m\ell}$ a sarcinii magnetice libere:

$$(1o2\ a) \qquad \operatorname{div} \vec{H} = \frac{\chi}{\mu_0} \rho_{m\ell}$$

Mai urmează că divergența de suprafață a intensității cîmpului magnetic e proporțională și de același semn cu densitatea de suprafață a sarcinii magnetice libere.

$$(1o2\ b) \qquad H_{na} + H_{nb} = \frac{\chi}{\mu_0} \rho_{sm\ell}$$

Legea fluxului magnetic nu determină complet inducția magnetică a cîmpului produsă de corpurile polarizate magnetic, fiindcă oricărui cîmp $\vec{B}$ care satisface i se poate adăugi un cîmp de divergență nulă, și legea rămîne satisfăcută.

In corpurile mobile, suprafețele închise cărora li se aplică legea pot fi considerate antrenate de materie în mișcarea ei și enunțul legii rămîne același.

28. LEGEA POLARIZAȚIEI MAGNETICE

Se arată experimental că în materialele izotrope care se găsesc la o anumită temperatură uniformă, nu sînt supuse nici unei tensiuni mecanice și nu au polarizație magnetică permanentă, polarizația magnetică temporară a corpurilor e paralelă cu intensitatea locală a cîmpului magnetic

$$(1o5) \qquad \vec{M}_t = k \chi_m \vec{H} \mu_0$$

unde χ_m e o mărime de material care se numește susceptiv-

bilitate magnetică.

Se obţine deci cu ajutorul relaţiei (1oo):

$$\bar{B} = \mu_o \bar{H} + \chi \bar{\mathfrak{M}}_t = \mu_o (1 + \chi \chi_m) \bar{H} \quad ,$$

unde mărimea

(1o5 a) $\mu_r = 1 + \chi \chi_m$

se numeşte permeabilitate magnetică relativă. Mărimea

(1o5 b) $\mu = \mu_o \mu_r$

se numeşte permeabilitate magnetică absolută.

Determinarea experimentală a legăturii dintre inducţie şi intensitatea cîmpului se poate face, în principiu, folosind un corp lung care are un scurt canal vid longitudinal şi o mică fantă vidă, perpendiculară pe canal, situată în apropierea lui (v.fig.93 a). Corpul se introduce într-un cîmp magnetic şi i se dă o astfel de orientare, încît vectorul cîmp magnetic din canal, să fie paralel cu axa canalului, adică să reprezinte intensitatea locală "interioară" a cîmpului magnetic. Se constată că, în aceste condiţiuni, vectorul cîmp magnetic din fantă e normal pe fantă şi deci paralel cu axa canalului, adică reprezintă intensitatea- inducţie a cîmpului magnetic; deplasînd corpul în regiuni în care cîmpul magnetic exterm e mai intens, respectiv mai slab, se constată că intensitatea inducţie e proporţională cu intensitatea cîmpului magnetic interior, respectiv exterior, în corpurile isotrope (cu excepţiunea unui grup restrîns de corpuri, ca fierul, nichelul, cobaltul şi aliajele lor cu caracter metalic, anumite bronzuri de mangan şi cupru, etc, numite corpuri feromagnetice). Factorul de proporţionalitate dintre intensitatea - inducţie a cîmpului magnetic e o mărime de material scalară, pozitivă, fără dimensiune, cu o valoare apropiată de unitate; permeabilitatea relativă μ_r a materialului: $\bar{B} = \mu_r \bar{H}$.

Se obţine deci următoarea expresiune a legii polarizaţiei magnetice:

(1o5 c) $\bar{B} = \mu \bar{H}$.

După valoarea permeabilităţii lor relative, mate-

rialele neferomagnetice se impart în două grupuri: materiale diamagnetice, cu permeabilitate subunitară , şi materiale paramagnetice, cu permeabilitatea supraunitară. În corpurile feromagnetice isotrope inducţia magnetică nu depinde liniar de intensitatea cîmpului magnetic, în ele,inducţia depinde şi de succesiunea stărilor lor magnetice trecute.Se spune că aceste corpuri prezintă istereziu magnetic.Dacă se defineşte în ele, într-o stare exterioară dată, şi după o anumită succesiune de stări, o permeabilitate magnetică absolută după relaţia de mai sus, aceasta e foarte mare.

In corpurile neferomagnetice cristalizate, care se găsesc la o anumită temperatură uniformă şi nu sînt supuse nici unei tensiuni mecanice, inducţia magnetică este, în cazul cel mai general, omoparalelă cu intensitatea cîmpului magnetic numai dacă aceasta are una din trei direcţii triortogonale privilegiate ale cristalului, numite direcţiile principale ale permeabilităţii magnetice. Relaţiile sînt analoage cu cele de la polarizaţia electrică. Proprietăţile de polarizare magnetică temporară pot fi descrise deci în acest caz cu ajutorul a nouă mărimi scalare $\mu_{xx}, \mu_{xy}, \mu_{xz}, \mu_{yx}, \mu_{yy}, \mu_{yz}, \mu_{zx}$, μ_{zy}, μ_{zz},numite componentele scalare cartesiene ale tensorului permeabilitate magnetică absolută. Acesta e simetric, ca şi tensorul permitivitate, adică sînt satisfăcute relaţiile de simetrie:

$$(106\ a)\quad \mu_{xy} = \mu_{yx}\ ;\ \mu_{yz} = \mu_{zy}\ ;\ \mu_{zx} = \mu_{xz}\ .$$

iar relaţiile dintre componentele inducţiei magnetice şi intensităţii cîmpului magnetic sînt:

$$(106\ a)\quad \begin{cases} B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} \cdot H_y + \mu_{xz} \cdot H_z\ ; \\ B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z\ ; \\ B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z\ . \end{cases}$$

Se constată experimental că permeabilitatea magnetică relativă a corpurilor diamagnetice e independentă de temperatură, şi că permeabilitatea relativă a corpurilor paramag-

netice scade cînd creşte temperatura.

In corpurile feromagnetice, intensităţi ale cîmpului magnetic relativ slabe dau o inducţie magnetică B foarte mare, la intensităţi iniţiale nu prea mari; se stabileşte în ele o inducţie magnetică $\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + k\bar{M}$ a cărei creştere cu H provine numai din creşterea lui $\mu_0 \bar{H}$, polarizaţia magnetică $\bar{M}$ numită polarizaţie de saturaţie, ne mai putînd fi depăşită oricît s-ar mări cîmpul magnetic în care se găseşte corpul.

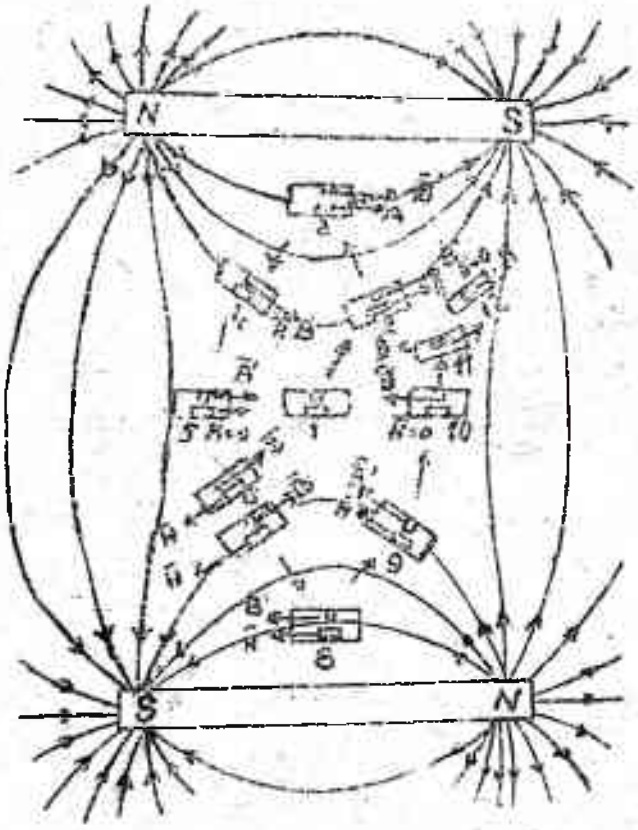


Fig. 92

Principiul efectuării ciclurilor de magnetizare

Experienţa pentru stabilirea legăturii dintre B şi H se poate imagina efectuată în principiu, ca în fig.92, care reprezintă un ciclu de magnetizare, efectuat cu un corp lung, echipat cu canalul longitudinal pentru măsurarea intensităţii cîmpului magnetic şi cu faţete perpendiculară pe canal pentru măsurarea intensităţii-inducţie a cîmpului magnetic. Corpul e purtat în cîmp în felul indicat de săgeţi, pentru a parcurge ciclul de magnetizare. (Practic ciclurile se efectuează cu corpul de încercare imobil, stabilind în el un cîmp magnetic alternativ de intensitate variabilă, cu ajutorul unui curent electric variabil în timp).

Legătura dintre inducţia magnetică şi intensitatea cîmpului magnetic se reprezintă grafic prin curbele de magnetizare (cu B în ordonate şi H în abscise). Legătura corespunzătoare dintre polarizaţia magnetică şi cîmpul magnetic se

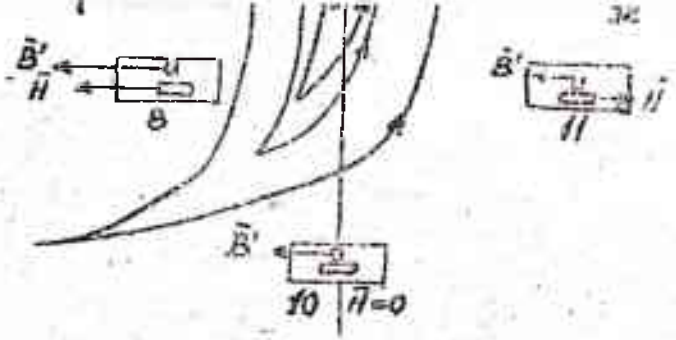


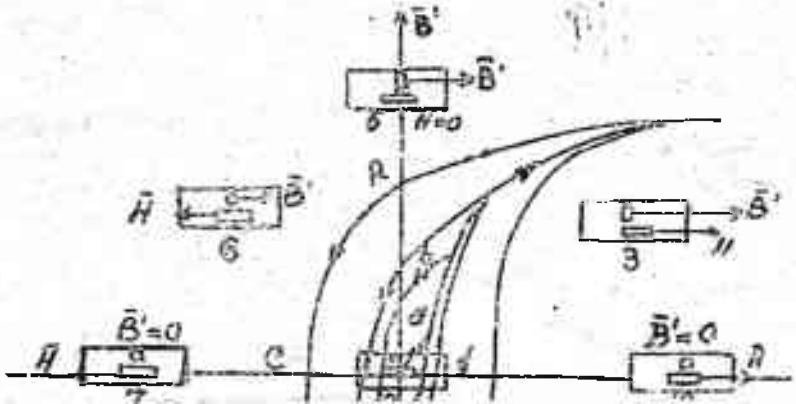
Fig. 93

Curbă de magnetizare primă și cicluri de magnetizare

încît să varieze vectorul cîmp magnetic, în canalul longitudinal față de el, se constată următoarele: Cînd intensitatea cîmpului magnetic crește începînd cu valoarea zero, inducția magnetică B crește la început liniar, iar apoi mai repede decît liniar, după porțiunea a unei curbe (Fig.93) care are concavitatea în sus.

Curba atinge un maxim de inclinație(punctul de inflexiune),după care creșterea lui B cu H e mai încetă și se apropie de o valoare la care polarizația M rămîne constantă: polarizația magnetică de saturație. Se obține astfel curba de primă magnetizare. Dacă se variază apoi astfel poziția corpului feromagnetic în cîmp, încît intensitatea cîmpului magnetic

reprezintă grafic prin curbele de polarizaţie (cu $\vec{B}$ în ordonate şi $\vec{H}$ în abscise). Trebuie observat că $\vec{B}$ din corpul de lungime finită, e intensitatea cîmpului magnetic care se stabileşte de fapt în interiorul corpului feromagnetic, în canalul longitudinal.El diferă, în general, de cîmpul magnetic exterior, afară de cazul cînd experienţele se fac cu un corp foarte lung sau formînd circuit închis, cum presupunem noi. Dacă un corp feromagnetic lung, complect demagnetizat, echipat cu canalul vid şi cu fantă vidă perpendiculară pe canal pentru măsurarea intensităţii şi a intensităţii inducţie a cîmpului magnetic, se introduce în cîmpul magnetic neuniform şi se variază poziţia lui în cîmp astfel



să scadă, inducţia magnetică scade, dar nu în măsura în care a crescut dealungul curbei de primă magnetizare. De aceia pentru valori date ale intensităţii H, valorile inducţiei B sînt mai mari (curba B) decît ale inducţiei corespunzătoare pe curba de primă magnetizare. Inducţia magnetică nu scade la zero, cînd H devine nul, ci păstrează o valoare OR (fig.93) numită inducţia magnetică, remanentă. Rămînerea în urmă a inducţiei faţă de variaţia intensităţii cîmpului magnetic constituie ceiace se numeşte isterezis magnetic. Spre a anula inducţia magnetică, trebuie să se schimbe sensul intensităţii cîmpului magnetic, şi să i se dea o intensitate de sens contrar O C (fig.93), care se numeşte cîmp magnetic coeroitiv (sau "forţă" coercitivă). Dacă se merge pînă la o intensitate destul de mare a cîmpului magnetic de sens schimbat, inducţia magnetică îşi schimbă sensul şi poate creşte în valoare absolută pînă la valoare ei de saturaţie. Dacă se scade din nou cîmpul, se revine la remanenţa negativă (R'), şi dacă i se schimbă sensul, la cîmpul coercitiv pozitiv (C'), spre a se descrie apoi o curbă diferită de curba de primă magnetizare şi a putea ajunge din nou la saturaţie în sens pozitiv. Dacă se repetă ciclul între inducţii de saturaţie, se descrie curba închisă exterioară din figură, numită ciclu limită de isterezis. Dacă nu se merge în acest ciclu pînă la saturaţie dar se variază cîmpul magnetic între valori absolute egale şi de sensuri contrare, se obţin cicluri simetrice de isterezis, care se găsesc toate în interiorul ciclului limită. Spre a parcurge însă un ciclu de isterezis, trebuie să se repete de vreo cîteva ori procesul de variere a cîmpului magnetic între maximile corespunzătoare, fiindcă la început nu se parcurge ciclul care se stabileşte după un număr destul de mare de alternanţe. Un ciclu de isterezis nu poate fi parcurs decît într-un singur sens; el e ireversibil, şi are o curbă ascendentă (c), şi una descendentă (b).

Curbele de isterezis sînt singurele care se folosesc în tehnică; în consideraţiile teoretice e avantajos să se considere şi curba de polarizare, care are polarizaţia magnetică în ordonate şi intensitatea cîmpului în abscise.

Deosebirea consistă în faptul că $\bar{M} = \frac{1}{\chi}(\bar{B} - \mu_0 \bar{H})$, adică, dacă $\bar{B}$ ajunge la valoarea de saturaţie, $\bar{M}$ nu mai creşte cu $\bar{H}$, ci rămîne constant (polarizaţia de saturaţie). Inducţia care s-ar produce la polarizaţia magnetică de saturaţie, dacă intensitatea cîmpului magnetic ar fi nulă, e constantă, proporţională cu polarizaţia, şi se numeşte inducţia magnetică de saturaţie ea e diferenţa dintre $\bar{B}$ şi $\mu_0 \bar{H}$, adică $\bar{B}_s = \bar{B} - \mu_0 \bar{H} = k\bar{M}$. Pentru fier $B_s \approx 2{,}2$ Wb/m^2; pentru nichel $B_s = 0{,}6$ Wb/m^2; pentru cobalt $B_s = 1{,}8$ Wb/m^2, aproape independent de tratamentul materialului.

Dacă se unesc punctele de răspăr ale ciclurilor de isterezis, se obţine curba de comutaţie; ea dă legătura dintre inducţia magnetică şi cîmpul magnetic, dacă acesta e comutat (dacă i se schimbă valoarea din H în -H), şi diferă foarte puţin de curba de primă magnetizare (fig.94).

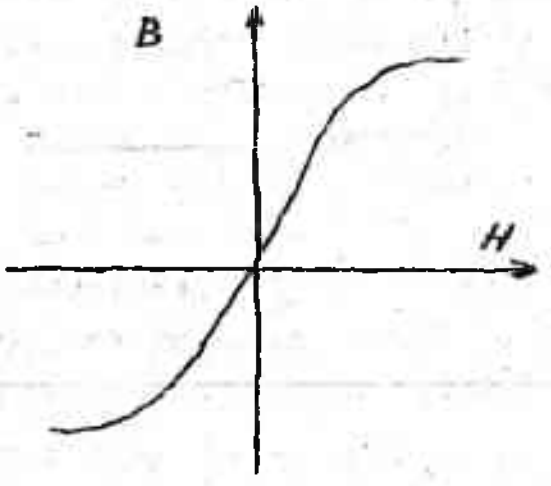


Fig.94

Curba de comutaţie a unui corp feromagnetic.

Dacă se măreşte cîmpul magnetic cu o cantitate ΔH cînd se magnetizează un corp dealungul unui ciclu de isterezis, se împarte creşterea corespunzătoare ΔB a inducţiei magnetice prin ΔH, şi se ia limita acestui raport cînd ΔH tinde către zero, se obţine permeabilitatea magnetică relativă diferenţială a corpului feromagnetic, pentru punctul considerat:

$$\mu_{rd} = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H}$$

Aceasta e proporţională cu inclinaţia curbei de inducţie faţă de axa absciselor. Ea diferă de permeabilitatea magnetică definită de relaţia $\mu = B : (\mu_0 H)$, care e proporţională cu înclinarea faţă de axa absciselor a acordei care uneşte originea cu punctul considerat de pe curba de magnetizare.

Dacă se măreşte cîmpul magnetic pînă într-un

punct oarecare, cînd se magnetizează un corp dealungul unei curbe de primă magnetizare sau dealungul unui ciclu de isterezis, şi se scade apoi cîmpul cu o cantitate destul de mică $\Delta H'$, corpul nu mai descrie curba ascendentă, dacă punctul nu se găseşte în regiunea saturată, ci o dreaptă mai apropiată de orizontală decît tangenta în acel punct la curba ascendentă; ea are proprietatea că poate fi descrisă din nou cînd se măreşte H cu $\Delta H'$, adică reprezintă o transformare reversibilă mărimea

$$\mu_{rev} = \frac{\Delta B'}{\mu_0 \Delta H}$$

se numeşte permeabilitate magnetică reversibilă a materialului în starea respectivă. Ea depinde numai de inducţia magnetică, nu şi de intensitatea cîmpului magnetic, adică are aceeaşi valoare în punctele de pe aceeaşi ordonată din curbele de magnetizare. Permeabilitatea reversibilă are valoarea maximă cînd inducţia magnetică are valoarea zero, şi scade cînd creşte inducţia. Maximul ei coincide deci cu permeabilitatea în origine a corpului dealungul curbei de primă magnetizare , care se numeşte permeabilitate iniţială.

Curbele de polarizaţie şi cele de magnetizare nu sînt netede ci au trepte extrem de mici, cum arată cercetările experimentale mai precise.

Fenomenul de isterezis permite să se construească magneţi permanenţi. In adevăr dacă se magnetizează un corp feromagnetic omogen, introducîndu-l într-un cîmp magnetic, şi se anulează apoi cîmpul exterior, corpul nu ajunge, în general în punctul de intersecţiune al curbei de isterezis cu axa coordonatelor, care ar corespunde valorii $H = 0$.

29. TEOREMA POTENTIALULUI MAGNETOSTATIC

29.1. Teorema tensiunii magnetice. Dacă se variază direcţia axei canalului în care s-a definit H, se obţine, pentru fiecare nouă orientare a ei, cîte un alt vector cîmp H_c, diferit de H. Se demonstrează cu ajutorul relaţiei (99) că în cîmpul magnetostatic, ca şi în cîmpul electrostatic, ori care ar fi orientarea, totdeauna proiecţia ortogonală a lui H local pe orientarea u_v e egală cu proiecţia ortogonală a lui H_c, pe orientarea u_v. Dacă u_v e versorul orientării v, această relaţie se poate pune sub forma:

(106 d) $$H_{cv} u_v = Hu_v$$

Experienţa arată că această relaţie e valabilă şi în cîmpurile magnetice care nu sînt magnetostatice. Aceasta urmează şi din legile fenomenelor electrice şi constituie teorema tensiunii magnetice.

Dacă versorul u_v indică, de exemplu, orientările elementelor de arc dr ale unei curbe care trece prin materie ($\bar{dr} = u_v ds$) şi dacă s-a evacuat materialul dintr-un canal foarte strîmt care îmbracă acea curbă pentru a se putea măsura dealungul ei vectorii cîmp magnetic H_c, integrala de linie a acestui vector cîmp magnetic dealungul unei curbe C(v.fig.32), între punctele P_1 şi P_2, se poate pune sub forma:

$$\int_C \bar{H}_{cv}\, d\bar{s} = \int_C H_{cv}\, u_v\, ds = \int_C H u_v \cos\theta \int_C \bar{H} d\bar{r}$$

adică e egală cu integrala, dealungul aceluiaşi drum, a intensităţii cîmpului magnetic, integrală care se numeşte tensiune magnetică.

Unitatea MKSC de tensiune magnetică decigilbert (dGb), în unităţi nerationalizate şi amperspiră (As) în unităţi raţionalizate.

Se observă analogia dintre relaţia (52) şi relaţia (59 b) din introducerea matematică, dacă se fac co-

---

[illegible] nr.77/955-Bazele Electrotehnicii

respondenţele $G_{cv} \rightarrow \bar{H}_{cv}$; $\bar{G}_{cp} \rightarrow \bar{H}$, unde $\bar{G}_{cp}$ e dat de relaţia (39 c) din Introducere.

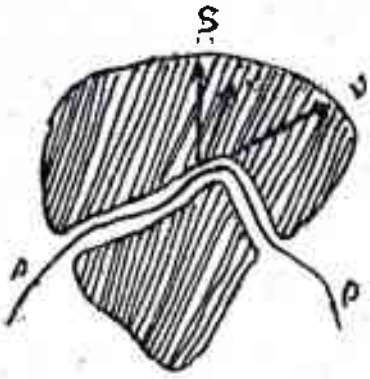


Fig.95
Figură pentru calculul integralei de linie a vectorului cîmp magnetic H_{cv}

29.2. Potenţialul magnetostatic. Experienţa arată că în cîmpurile magnetostatice e valabilă totdeauna următoarea relaţie: Integrala de linie a vectorilor cîmp magnetic H_{cv} în canalul care îmbracă orice curbă închisă care se poate trasa într-un cîmp magnetic, şi deci tensiunea magnetomotoare, adică integrala de linie a intensităţii cîmpului magnetic H în lungul oricărei curbe închise care se poate trasa în cîmp, e nulă:

$$(1o6) \qquad \oint \bar{H}\, d\bar{r} = 0$$

Această propoziţie e valabilă dacă în cîmpul magnetic nu există curent electric şi nici inducţie electrică variabilă în timp. Ea este caracteristică numai cîmpurilor magnetostatice.

Aplicînd relaţia (1o6) unei linii închise care se aplică strîns pe cele două feţe ale unei suprafeţe, se deduce că componenta tangenţială a intensităţii cîmpului magnetostatic variază continuu la trecerea prin orice suprafaţă:

$$(1o6\ a) \qquad H_{t1} = H_{t2}$$

Din expresiunea (1o6) a teoremei urmează că intensitatea oricărui cîmp magnetostatic derivă dintr-un potenţial scalar V_H, care se numeşte potenţial magnetostatic:

$$(1o6\ b) \qquad \bar{H} = -\operatorname{grad} V_H$$

Dacă se foloseşte expresiunea (3o) a gradientului

coordonate cartesiene triortogonale, se obţine deci:

$$(106\ c)\quad H_x = -\frac{V_H}{x}\ ;\quad Hy = -\frac{V_H}{y}\ ;\quad Hz = -\frac{\partial V_H}{\partial z}$$

29.3. <u>Forma locală a teoremei potenţialului magnetostatic</u>. Transformăm expresiunea (108) a teoremei potenţialului magnetostatic cu ajutorul teoremei lui Stokes. Obţinem:

$$\int_{\Gamma} \Pi\, \partial r\ .$$

Fiindcă în această relaţie suprafaţa S e arbitrară, relaţia e satisfăcută numai dacă

$$(106\ d)\qquad \text{rot } H = 0$$

Rotorul intensităţii oricărui cîmp magnetostatic e deci nul în orice punct al cîmpului. Această ecuaţie vectorială e echivalentă cu următoarele trei ecuaţii cu derivate parţiale, care se obţin utilizînd expresiunea rotorului în coordonate cartesiene:

$$(106\ e)\qquad \frac{H_z}{y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0\ ;\ \frac{H_x}{z} - \frac{H_z}{\partial x} = 0\ ;\ \frac{\partial H_y}{x} - \frac{H_x}{\partial y} = 0$$

Cînd intensitatea cîmpului magnetic prezintă suprafeţe de discontinuitate în cîmp (de exemplu la suprafaţa de separaţie a două medii), se demonstrează analog că rotorul de suprafaţă al acestei intensităţi e nul în orice punct din cîmp:

$$(106\ f)\qquad \text{rots } H = 0$$

Această ecuaţie e echivalentă cu ecuaţia

$$(106\ g)\qquad H_{t1} = H_{t2}.$$

unde H_{t1} şi H_{t2} sunt componentele tangenţiale ale intensităţii cîmpului magnetic pe cele două feţe ale suprafetei de discontinuitate. Componentele tangenţiale ale intensităţii cîmpului magnetic variază deci continuu la trecerea prin orice suprafaţă dintr-un cîmp magnetostatic.

29.4. <u>Teorema refracţiei liniilor de cîmp magnetic.</u> La trecrea prin orice suprafaţă componenta tangenţială a intensităţii cîmpului magnetostatic variază continuu. Componentele tangenţiale H_{t1} şi H_{t2} ale intensităţii cîmpului pe cele două feţe ale suprafeţei, contate ambele pozitive în sensul în care e dirijată una dintre ele, satisfac deci relaţia

$$(a) \qquad H_{t1} = H_{t2}$$

cum se indică în fig. 97 b.

Dacă în relaţia (1o1 b) ambele componente normale se contează pozitive în sensul din spre mediul 1 spre mediul 2, trebuie schimbat semnul uneia dintre componente şi se obţine:

$$B_{n1} = B_{n2},$$

sau

$$(b) \quad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}$$

Raportul dintre componentele tangenţială şi normală ale intensităţii cîmpului magnetic, pe fiecare faţă a suprafeţei de separaţie a celor două medii, este egal însă cu tangenta trigonometrică a unghiurilor de incidenţă α_1, respectiv de refracţie α_2, formate de vectorul intensitate a cîmpului H_1 , H_2 (respectiv de vectorul inducţie magnetică B_1 B_2) cu normala locală a suprafeţei de separaţie (v.fig.89) Impărţind membru cu membru relaţiile (b) şi (c), rezultă:

$$(1o7) \qquad \frac{H_{t1}}{H_{n1}} : \frac{H_{t2}}{H_{n2}} = \frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Raportul tangentelor trigonometrice ale unghiurilor de incidenţă şi de refracţie a liniilor de cîmp sau de inducţie magnetică la suprafaţa de separaţie a două medii isotrope, e deci egal cu raportul permeabilităţilor lor magnetice absolute sau relative.

La intrarea lor într-un mediu, liniile de cîmp şi de inducţie magnetică se îndepărtează deci de normala de

incidenţă, dacă liniile incidente nu au fost normale pe suprafaţa de incidenţă sau paralele cu ea, cînd liniile nu se refractă.

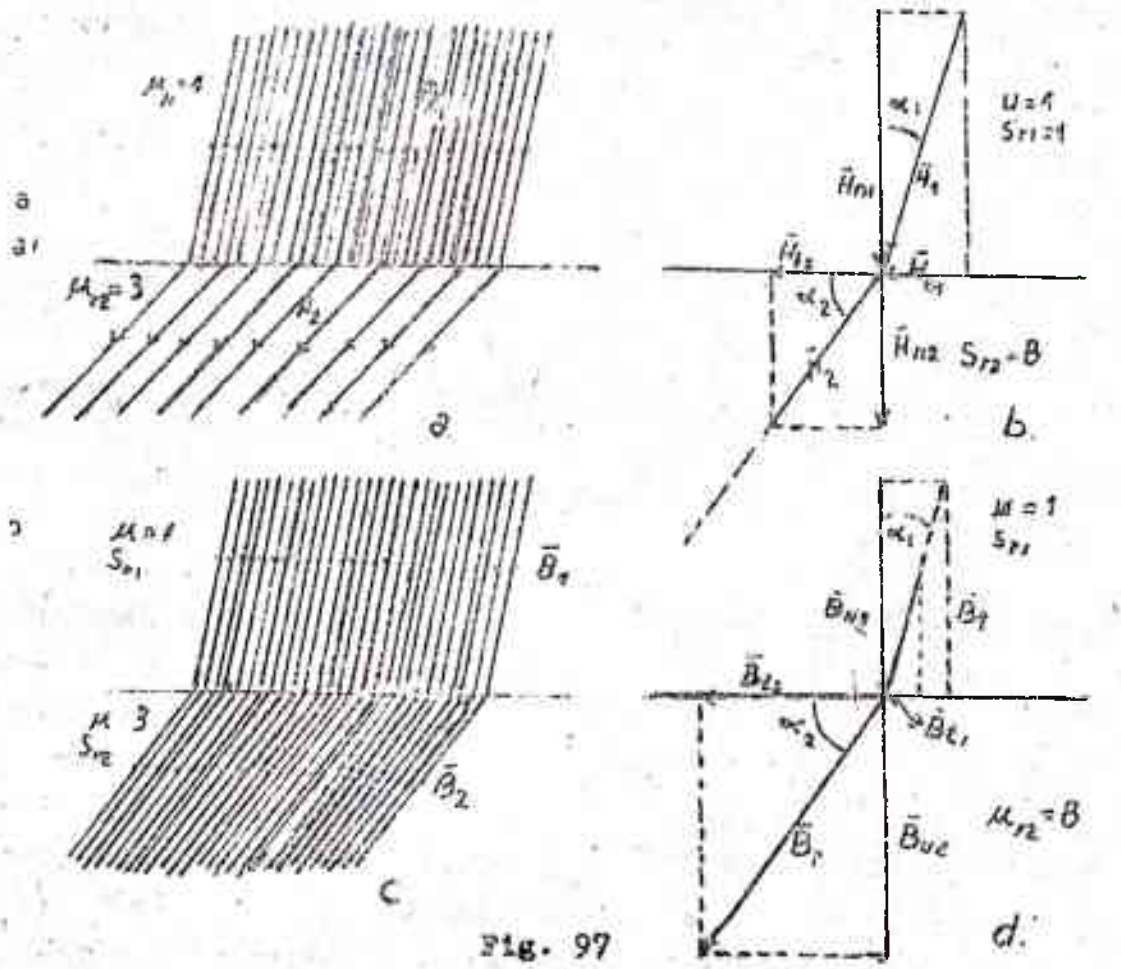


Fig. 97

Refracţia liniilor de cîmp (a,b) şi a liniilor de inducţie (c,d) ale unui cîmp magnetostatic la suprafaţa de separaţie a două medii isotrope.

De asemenea liniile de cîmp şi de inducţie magnetică ies dintr-un mediu de permeabilitate magnetică foarte mare aproape perpendicular pe suprafaţa de separaţie dintre el şi un alt mediu, de permeabilitate mică.

Din relaţia (b) mai rezultă că într-un mediu 1 componenta normală pe suprafaţa de separaţie dintre el şi un al doilea mediu 2, a intensităţii cîmpului magnetic H_{n1}, tinde către zero, ca valoarea reciprocă a permeabilităţii sale magnetice relative, cînd permeabilitatea sa magnetică μ_{r1} tinde către infinit, dacă permeabilitatea mediului 2

e finită.

Din teorema refracţiei mai rezultă că inducţia magnetică dintr-un corp cu permeabilitatea magnetică mai mare decît a mediului din jur e mai mare decît în acest mediu (fig.97 b), şi că într-un corp cu permeabilitatea mai mică decît a mediului din jur e mai mică decît în acest mediu (fig.97 a).

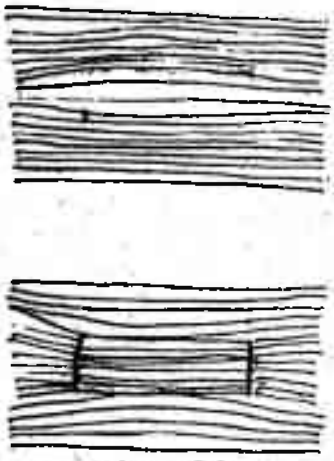


Fig. 98

Inducţia magnetică într-un corp cu permeabilitate mai mică(a) respectiv mai mare (b) decît mediul din jur.

3o.-ECUAŢIILE LUI POISSON ŞI LAPLACE ÎN MAGNETOSTATICA

3o.1. Ecuaţia Momentele magnetice care intervin în legea (1o4) pot fi permanente, sau temporare, adică stabilite de cîmpul magnetic, conform legii polarizaţiei magnetice. Această lege, împreună cu teorema (1o6), arată că numai momentele magnetice produc cîmpurile magnetostatice. Fiindcă momentele stabilite de cîmp sînt proporţionale cu intensitatea cîmpului, şi deci sînt nule în cîmpurile nule, urmează că pentru a stabili un cîmp magnetostatic, e nevoie de momente magnetice permanente. Dacă nu există momente magnetice permenente, nu se poate menţine un cîmp magnetostatic nici dacă s-a stabilit în prealabil pe altă cale un cîmp magnetic. Din relaţiile (1o6 d) şi (1o6 a) urmează următoarea ecuaţie a lui Poisson:

$$(1o8) \qquad \operatorname{div}\operatorname{grad} V_H = -\frac{\rho}{\mu}\rho_{ml},$$

din care se obţin imediat forme particulare, valabile în diferitele sisteme de coordonate. În particular, coordonate cartesiene triortogonale

$$(1o8\ a) \qquad \frac{\partial^2 V_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_H}{\partial z^2} = -\frac{\chi}{\mu}\rho_{ml}$$

30.2. Expresiunea potențialului magnetostatic

Potențialul scalar V_H al unui cîmp de vectori irațional F se calculează din expresiunea (3o) în funcțiune de divergențele de volum, de suprafață, de linie și de punct ale vectorului cîmp G. Folosind expresiunea (1o2 a) a mărimii div H, obținem, în cazul cel mai general:

$$(1o9)\quad V_H = \frac{\varkappa}{4\pi\mu}\left(\int \frac{\rho_m}{R}\,dv + \int \frac{\rho_{ml}}{D}\,dA \int \frac{\sigma_m}{R}\,dS + \sum_{i=1}^{i} \frac{\rho_{mi}}{R_i}\right.$$

$$\left. = \int m\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\,dv + \int m_n\,\mathrm{mod}\,\frac{1}{b}\,dA + \sum_{1}^{2} \bar{m}_i\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}\right)$$

31.1. Cîmpul magnetic al unui elipsoid magnetizat uniform. Considerăm polarizația magnetică M formată din densități de sarcină magnetică dipolară $\pm\rho_{mp}$, egale și de semne contrare și deplasate cu o astfel de distanță $\delta\bar{r}$ una față de alta, încît să fie satisfăcută relația $\rho_m \delta\bar{r} = \bar{M}$. Fiindcă M e constant și uniform în interiorul elipsoidului și nul în exterior, densitățile $\pm\rho_{mp}$ pot fi alese constante în interiorul elipsoidului și nule în exterior, și rezultă un $\delta\bar{r}$ uniform în interiorul elipsoidului. Problema se reduce astfel la calculul cîmpurilor magnetice a doi elipsoizi egali și cu axele respectiv paralele, cu densitățile constante $\pm\rho_{mp}$ de sarcină magnetică dipolară în adunarea intensităților cîmpurilor lor, elipsoidul cu sarcini dipolare pozitive fiind presupus de trasat cu $\delta\bar{r}$ față de cel cu sarcini dipolare negative.

Fie elipsoidul

$$(a)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

presupus că densitatea constantă de sarcină magnetică dipolară ρ_{md} și fie

$$(b)\qquad \frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\rho} + \frac{z^2}{c^2+\phi} - 1 = 0$$

elipsoizii confocali cu el, situați în exteriorul lui, adică avînd lungimea μ pozitivă. Fie μ cea mai mare dintre rădăci-

cinile acestei ecuaţii în u. Demonstrăm că, în aceste condiţiuni, potenţialul scalar al cîmpului magnetic al elipsoidului are următoarea expresiune:

$$(c)\quad V_H = \frac{\chi}{4\pi\mu_0}\,\pi\rho_{m0}\,abc\int_u^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{R(\lambda)}$$

unde u are valoarea 0 pentru interiorul elipsoidului şi o valoare egală cu cea mai mare rădăcină a ecuaţiei în u, dată de (b) pentru exteriorul elipsoidului, iar $R(\lambda)$ este expresiunea

$$(d)\quad R(\lambda) = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

Pentru a demonstra că expresiunea (c) reprezintă potenţialul scalar al cîmpului magnetostatic, trebuie demonstrat că V'_H, împreună cu derivatele sale de ordinul întîi, este continuu la suprafaţa elipsoidului, că divgrad V'_H e nul în exteriorul elipsoidului ($u > 0$) şi egal cu $-k\rho_{md}$ în interiorul lui ($u = 0$), şi că la distanţe r mari de elipsoid, V'_H tinde către zero, cu mărimea $\frac{1}{r}$.

Prima condiţiune e satisfăcută la suprafaţa elipsoidului, fiindcă aceasta corespunde valorii $u = 0$, ca şi în interiorul lui. Pentru a demonstra că sînt satisfăcute şi celelalte condiţiuni, trebuie calculate derivatele potenţialului V'_H în interiorul (V'_{Hi}) şi în exteriorul elipsoidului (V'_{He}). Se obţine din (c):

$$(e)\quad \frac{\partial V'_m}{\partial x} = -\frac{2\chi}{4\pi\mu_0}\,\pi\rho_{md}\,abc\int_0^{\infty}\frac{x\,d\lambda}{(a^2+\lambda)R(\lambda)} \qquad \frac{\partial^2 V'_{Hi}}{\partial x^2} = -\frac{2\chi}{4\pi\mu_0}\,\pi\rho_{md}\,abc\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)R(\lambda)}$$

$$(f)\quad \frac{\partial V_{He}}{\partial x} = \frac{2\chi}{4\pi\mu_0}\,\pi\rho_{md}\,abc\int_u^{\infty}\frac{x\,d\lambda}{(a^2+\lambda)R(\lambda)} \qquad \frac{\partial^2 V_{He}}{\partial x^2} = -\frac{2\chi}{4\pi\mu_0}\,\pi\rho_{md}\,abc\left[\int_u^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)R(\lambda)} - \frac{x}{(a^2+u)R(u)}\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

şi cîte patru expresiuni analoage pentru derivatele în raport cu y şi z. Derivatele de ordinul întîiu ale potenţialului în raport cu cordonatele sunt deci continue la suprafaţa elipsoidului.

Din (d) urmează însă:

$$(g)\quad 2\,\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda}$$

aşa încît în interiorul elipsoidului :

$$\text{(h) divgrad } V'_{Hi} = -\frac{2k}{4\pi\mu_0}\pi\rho_{md}\ abc\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{R(\lambda)}\ 2\frac{\operatorname{din} R(\lambda)}{d\lambda} =$$

$$= -k\rho_{md}\ \frac{abc}{R(0)} = -K\rho_{md}$$

iar în exteriorul lui :

$$\text{(i) divgrad } V'_{He} = -\frac{2k}{4\pi\mu_0}\pi\rho_{md}\ \frac{abc}{R(u)}\left[2-\left(\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]$$

Pentru a arăta că membrul al doilea e nul, trebuie derivată ecuaţia (b) în raport cu x. Se obţine astfel:

$$\frac{2x}{a^2+u}=\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$

Dacă se înmulţesc membrii acestei relaţii cu $\frac{x}{a^2+u}$, se împarte cu expresiunea din paranteza din al doilea membru se adună la ea membru cu membru relaţiile analoage care se obţin prin derivarea în raport cu y, respectiv în raport cu z, se obţine o egalitate în care membrul întîiu este 2, iar membrul al doilea este expresiunea din membrul al doilea al relaţiei (i), ceiace demonstrează că divgrad $V_{He} = 0$.

Pentru distanţe $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ foarte mari urmează din (b) că u tinde către r^2, şi $a^2, b^2 c^2$ sînt neglijabile în raport cu de sub semnul integrală din (c) şi din expresiunea (d), aşa încît:

$$\lim_{r\to\infty} V_H = \lim_{r\to\infty}\frac{\chi}{4\pi\mu_0}\pi\rho_{md}\ abc\int_{r^2}^{\infty}\left(1-\frac{r^2}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda^{5/2}} = \lim_{r\to\infty}\frac{\chi}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{4\pi}{5}\rho_{md}\frac{1}{r}$$

ceiace arată că V'_H tinde ca $\frac{1}{r}$ către zero, cînd r tinde către infinit. Expresiunea (c) reprezintă deci potenţialul elipsoidului uniform "încărcat" cu sarcină magnetică din tară.

Potenţialul V_H al elipsoidului polarizat se obţine

adunînd la potenţialul V'_H al elipsoidului presupus cu sarcină magnetică dipolară pozitivă, potenţialul V''_H al unui elipsoid egal, cu sarcina magnetică dipolară negativă şi cu centrul situat în punctul de rază vectoare $(-\delta r)$, adică de componente $-\delta x$, $-\delta y$, şi $-\delta z$. Potenţialul unui elipsoid în punctul x,y,z, se obţine din potenţialul primului înlocuind pe ρ_{md} du $-\rho_{md}$ şi coordonatele x,y,z, din V'_H cu $(x+\delta x)$, $(y+\delta y)$ şi $(z+\delta z)$; în adevăr, acestea sunt coordonatele punctului x,y,z, în raport cu sistemul de coordonate care are axele paralele cu axele sistemului x,y,z şi originea în centrul de rază vectoare $-\delta r$ al celui de al doilea elipsoid. Deci:

$$V_H = V'_H + V''_H = V'_H(x,y,z) - (V'_H(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) =$$

$$= -\frac{\partial V_H}{\partial x}\delta x - \frac{\partial V'_H}{y}\delta y - \frac{\partial V'_H}{\partial z}\delta z = -\delta r \text{ grad } V'_H$$

fiindcă

$$\bar{M} = {}_{md}\,\delta r;\quad M_x = \rho_{md}\,\delta x;\quad M_y = \rho_{md}\,\delta y;\quad M_z = \rho_{md}\,\delta z$$

urmează din (c) următoarea expresiune a potenţialului elipsoidului polarizat:

$$\text{(j)}\quad V_H = -\frac{\varkappa}{4\pi\mu_0}\pi \text{ abc M grad} \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{R(\lambda)}$$

în interiorul elipsoidului (u = 0) ; potenţialul are deci expresiunea:

$$\text{(k)}\quad V_{Hi} = AM_x x + BM_y y + CM_z z,$$

unde

$$\text{(l)}\quad \left\{ A = \frac{\varkappa}{4\pi\mu_0}\, 2\pi \text{ abc} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(R(\lambda)} \right. ;$$

$$(1)\quad \begin{cases} B = \dfrac{\chi}{4\pi\mu_0}\, 2\pi\, abc \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{d\lambda}{(b^2+\lambda)R(\lambda)} \\ C = \dfrac{\chi}{4\pi\mu_0}\, 2\pi\, abc \displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{d\lambda}{(c^2+\lambda)R(\lambda)} \end{cases} ;$$

Intensitatea cîmpului magnetic din interiorul elipsoidului e deci:

$$(m)\quad \bar{H}_i = -\operatorname{grad} V_{Hi} = -\bar{i}\,AM_x - \bar{j}BM_y - \bar{k}CM_z$$

adică este uniform şi formează un unghiu obtuz cu $\bar{M}$, fiindcă mărimile A,B şi C sunt toate pozitive.

Din (l) şi (h) urmează că

$$(n)\quad A+B+C = -\frac{\chi}{4\pi\mu_0}\, 2\pi\, abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{R(\lambda)}\; 2\,\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_0}$$

Această relaţie permite să se calculeze în anumite cazuri mărimile A,B şi C. Dacă elipsoidul reprezintă o sferă (a=b=c), urmează k, R

$$(o)\quad A=B=C = \frac{A+B+C}{3} = \frac{\chi}{3\mu_0}$$

Figura alăturată reprezintă spectrul liniilor de cîmp magnetic al sferei, în care $\bar{H}_i$, e antiparalel cu $\bar{M}$.

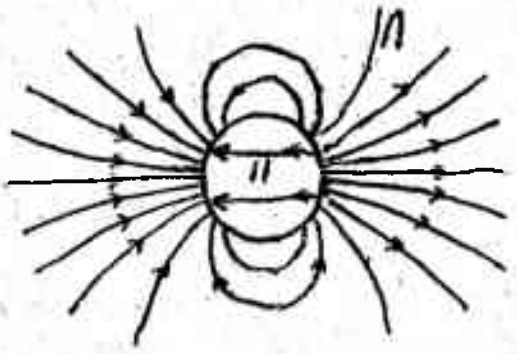


Fig. 1oo

Cîmpul magnetic(H) al unei sfere cu polarizaţie magnetică permanentă uniformă.

Dacă elipsoidul reprezintă un disc circular (lim a=0,b=c),se obţine B=C-0. şi deci

$$(p)\quad A = \frac{\chi}{\mu_0}\ ;\ B = C = 0$$

Dacă elipsoidul reprezintă un cilindru foarte lung,(lim a =∞b=c), se obţine A=0 B=C, şi deci:

$$(q)\quad A=0\ B=C = \frac{\chi}{2\mu_0}$$

Pentru alte cazuri ale elipsoidului,trebuie calcu-

late direct integralele din expresiunile (1). De exemplu, pentru elipsoidul de revoluţie alungit, polarizat în direcţia axei a, cu $a > b = c$, urmează, făcînd substituţia $\lambda = v^2(a^2 - b^2) - a^2$, şi cu excentricitatea $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$:

$$(r) \quad A = \frac{\chi}{4\pi\mu_0} \, 2\pi ab^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)} =$$

$$= \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \frac{1-e^2}{e^3} \int_0^\infty \frac{dv}{v^2(v^2-1)} = \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \frac{1-e^2}{e^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{1-e} - e\right).$$

Pentru elipsoidul de revoluţie foarte lung, $1 - e \ll 1$, şi deci

$$(r') \quad A \approx \frac{2\chi}{\mu_0} (1 - e) \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2}{1-e} - 1 \right).$$

Fiindcă în acest caz

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2}$$

rezultă

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2}$$

Se poate calcula şi potenţialul şi intensitatea cîmpului magnetic în exteriorul elipsoidului de revoluţie.

Relaţii analoage sînt valabile în cîmpul electrostatic al elipsoidului cu polarizaţie electrică uniformă.

51.2. Elipsoidul de permeabilitate constantă în cîmpul magnetostatic iniţial uniform. Cîmpul magnetic uniform $\bar{H}_i$ produs de polarizaţie în interiorul elipsoidului, scăzut din cîmpul iniţial uniform $\bar{H}_0$ trebuie să dea un cîmp interior rezultant, egal cu produsul susceptibilităţii magnetice χ_m prin polarizaţia magnetică $\bar{M}$, care stabileşte în interiorul elipsoidului intensitatea suplimentară $\bar{H}_i$, după relaţia (m). Polarizaţia $\bar{M}$ rezultă deci din condiţiunea:

$$\bar{M} = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z = \frac{1}{\chi_m} (\bar{H}_0 - \bar{H}_i) = \left[\bar{i}(H_{ox} - AM_x) + \right.$$

$$\left. + \bar{j}(H_{oy} - BM_y) + \bar{k}(H_{oz} - CM_z)\right] \frac{1}{\chi_m}$$

de unde rezultă:

$$(n)\quad M_x = \frac{H_{ox}}{\chi_m + A}\ ;\quad M_y = \frac{H_{oy}}{\chi_m + B}\ ;\quad M_z = \frac{H_{oz}}{\chi_m + C}$$

Aceste expresiuni împreună cu relaţiile(j), (k),(l),(m) şi $\bar{H}_o = -\operatorname{grad} V_{Ho}$, rezolvă complect problema Rezultatele sînt obţinute presupunînd că elipsoidul se polarizează uniform în cîmpul magnetostatic care iniţial era uniform. Faptul că la suprafaţa elipsoidului sînt satisfăcute toate condiţiunile la limită în cîmpul rezultant $\bar{H}_o + \bar{H}_1$, respectiv $\bar{H}_o + \bar{H}_e$, cu valorile (n) ale componentelor polarizaţiei magnetice, arată că ipoteza polarizaţiei uniforme a elipsoidului se verifică.

Relaţii analoage sînt valabile dacă se introduce un elipsoid de permitivitate constantă într-un cîmp electrostatic iniţial uniform.

Dacă susceptibilitatea magnetică a elipsoidului e pozitivă, adică materialul elipsoidului e paramagnetic, momentul său magnetic rezultant are o direcţie mai apropiată de axa mare a elipsoidului decît intensitatea cîmpului magnetic iniţial, cum rezultă din relaţiile (l) şi (n). Asupra elipsoidului se exercită deci un cuplu care tinde să-l rotească cu axa mare în sensul liniilor de cîmp magnetic. Aceasta explică formarea spectrelor magnetice cu pilitura de fier, Fenomenul analog din cîmpul electric explică formarea spectrelor electrice cu cristale de rutil.

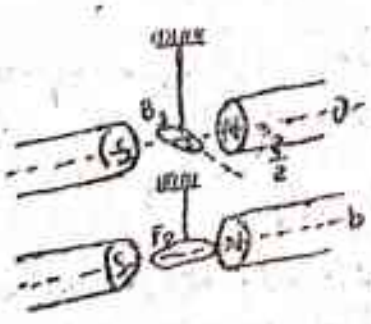


Fig.lol

Orientarea unui elipsoid alungit diamagnetic(bismut Fig.a) şi a unui elipsoid para sau feromagnetic (fier,fig.b) în cîmpul magnetic

Dacă susceptibilitatea magnetică a elipsoidului e negativă, adică materialul său e diamagnetic, cuplul care se exercită asupra lui tinde să-l rotească cu axa mare perpendicular pe direcţia liniilor de cîmp(fig.lol).

51.3. Cîmpul magnetic demagnetizant. Din formula (m) de sub litera e, rezultă că, în cazul elipsoidului, intensitatea $\bar{H}_1$ a cîmpului magnetic produs de

polarizaţia magnetică $\bar{M}$ proprie în interiorul unui elipsoid e, în esenţă, opusă acestei polarizaţii, formînd cu ea un unghiu obtuz, apropiat de două unghiuri drepte. Figura 1o0 reprezintă cazul sferei în care $\bar{H}_i$ e antiparalel cu $\bar{M}$, presupus dirijat spre dreapta. Acest fenomen e general. De exemplu, în cazul unui cilindru uniform polarizat în lungul axei sale (fig.1o2 a, 1o2 b), intensitatea cîmpului magnetic dat de polarizaţia dirijată în sus, e dirijată în jos în interiorul cilindrului. In acest caz intensitatea cîmpului nici nu mai e în general, paralelă cu inducţia.

Factorul care înmulţeşte polarizaţia magnetică longitudinală, pentru a da componenta longitudinală a intensităţii cîmpului magnetic opusă polarizaţiei, pe care aceasta o stabileşte într-un corp, se numeşte *factor* de demagnetizare al corpului, iar intensitatea corespunzătoare a cîmpului magnetic se numeşte cîmp demagnetizat. De exemplu în cazul sferei, coeficientul de demagnetizare N_d e dat de relaţia (o) de mai sus şi are valoarea

$$Nd = \frac{\mu_0}{K} N \quad \frac{\mu_0}{K} = -\frac{1}{3}$$

In cazul discului, coeficientul de demagnetizare e maxim, e dat de relaţia (p), şi are valoarea

$$Nd = \frac{\mu_0}{K} N \quad \frac{\mu_0}{K} = -\frac{1}{2}$$

In cazul elipsoidului de revoluţie foarte lung, de excentricitate e, coeficientul de demagnetizare are valoarea

$$N_d = \frac{\mu_0}{K} N \quad \frac{\mu_0}{K} A = - \quad \frac{2}{(1-e)} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{2}{1-e} - 1\right),$$

tinzînd către zero cînd excentricitatea tinde către unitate.

Coeficientul de demagnetizare depinde de forma corpului şi în general, el nu are o aceiaşi valoare în toate punctele corpului; elipsoizii sînt deci un caz particular în care coeficientul de demagnetizare are aceiaşi valoare în toate punctele lor. Se poate opera însă cu un coeficient de demagnetizare mediu pentru fiecare formă a corpului şi acesta e cu atît mai mic, cu cît corpul are o formă mai

alungită în direcţia polarizaţiei magnetice.

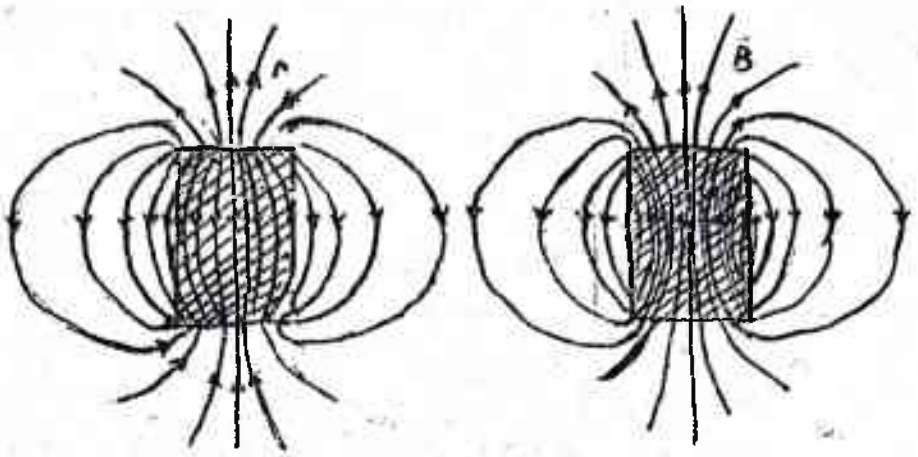


Fig. 1o2

Intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică a unui cilindru polarizat în direcţia axei sale.

Dacă polarizaţia dintr-un tor are deci linii de cîmp circulare "paralele" cu axa torului, factorul de demagnetizare al torului e nul. Aceasta se observă imediat din faptul că, în acest caz, polarizaţia are divergenţă nulă, şi deci e echivalentă cu sarcini magnetice de polarizaţie, sau libere, nule; deci conform relaţiei 1o2, nu se produce cîmp magnetic demagnetizat. Cu cît un corp are o formă mai alungită şi mai apropiat de forma unui circuit închis, cu atît coeficientul său de demagnetizare e mai mic, în raport cu polarizaţia sa magnetică dirijată dealungul corpului. De exemplu, coeficienţii de demagnetizare medii ai corpurilor din figurile 1o3 a - 1o3 f se raportă unii la alţii aproximativ ca numerele 1: o,77: o,59 : o,475 : o,4 : o,38 .

Cu ajutorul coeficientului demagnetizat N, intensitatea cîmpului magnetic longitudinal rezultant $\bar{H}_r$ poate fi exprimată în forma următoare în funcţiune de intensitatea cîmpului magnetic iniţial sau exterior $\bar{H}_0$, în care se introduce corpul presupus polarizat anteparalel cu cîmpul exterior $\bar{H}_e$:

$$\bar{H}_r = \bar{H}_0 + \bar{H}_1 = \bar{H}_0 - \frac{\chi}{\mu_0} N \bar{M}$$

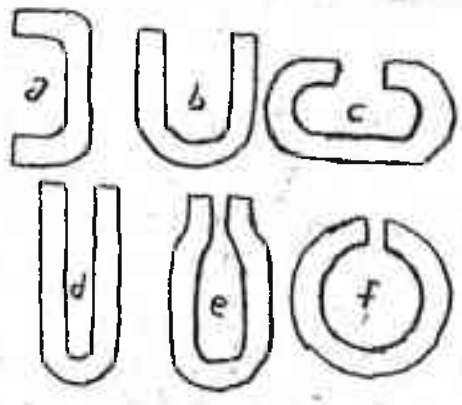


Fig. 1o3

Forme de corpuri para- sau feromagnetice, cu coeficienţi de demagnetizare cari scad din spre forma a spre forma f

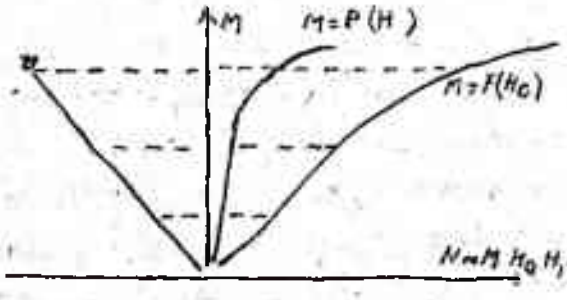


Fig.1o4

Construcţia curbei de magnetizare raportată la intensitatea rezultantă a cîmpului magnetic.

Dacă se ridică deci curba "exterioară" de demagnetizare a unui material folosind un eşantion care are un coeficient demagnetizat sensibil, şi purtînd inducţia magnetică în funcţiune de intensitatea cîmpului magnetic exterior $\bar{H}_e$ se obţine din aceasta curba de magnetizare propriu zisă a materialului, abia după ce se scade în fiecare moment mărimea $\frac{\kappa}{\mu_o} N d \bar{M}$ din mărimea $\bar{H}e$. Pentru corpurile feromagnetice, operaţia se face grafic, folosind legătura dintre $\bar{M}$ şi $\bar{H}_e$. Se trasează dreapta care are abscisele $-\frac{\kappa}{\mu_o} Nd\ \bar{M}$, şi acestea se scad din abscisele curbei $M = F(H_e)$, cum se arată în figura 1o4..

Din această analiză a influenţei coeficientului demagnetizant rezultă că fiecare magnet permanent se găseşte în propriul său cîmp demagnetizant. Un magnet permanent nu ia deci, după magnetizare, inducţia magnetică remanentă din ciclul său de isterezis, ci inducţia mai slabă, corespunzătoare, pe ciclu propriului său cîmp magnetic(negativ) demagnetizant. Inducţia magnetică " aparentă" a unui magnet permanent se obţine deci prin intersecţiunea dreptei care are abscisele $-\frac{\kappa}{\mu_o} Nd\ \bar{M}$ şi ordonatele H, cu porţiunea din cadranul al doilea al curbei de magnetizare.

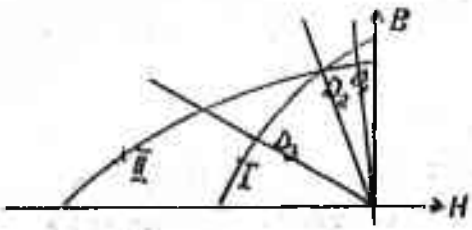


Fig.lo5

Determinarea inducţiei magnetice remanente "aparente" a corpurilor feromagnetice.

Figura lo5 reprezintă cazul a şase magneţi permanenţi, compuşi cîte trei din două materiale, dintre care unul are cîmp magnetic coercitiv mic (I), iar celălalt are cîmp magnetic coercitiv mare (II). Cîte o pereche de magneţi din cele două materiale au forme egale, adică şi coeficienţi de demagnetizare egali (crescînd dela D_1 la D_3). Se observă că la coeficient de demagnetizare dat, scăderea relativă a inducţiei magnetice remanente, dela valoarea corespunzătoare cîmpului exterior nul, la valoarea "aparentă" e cu atît mai mică cu cît cîmpul magnetic coercitiv e mai mare. De aceia un cîmp coercitiv mare al materialului magneţilor permanenţi prezintă mare importanţă în construirea unor magneţi permanenţi puternici. Se mai observă că influenţa unui mare coeficient de demagnetizare asupra acestei scăderi relative e cu atât mai mică, cu cît cîmpul coercitiv e mai mare. Mai rezultă că pentru magneţi permanenţi trebuie să se aleagă forme cu mic coeficient de demagnetizare, mai ales la materialele cu remanenţă mică (formele lo2 e, lo2 f).

ANEXA MATEMATICA

CALCULUL VECTORIAL

1. Mărimi matematice și mărimi fizice.

1.1. Scalarii In Matematică se studiază mulțimi ale căror elemente au o mare varietate de proprietăți. Numerile reale, numerile complexe, punctele , dreptele, planele, figurile geometrice, sînt exemple de elemente ale mulțimilor care se studiază în Matematică. O clasă foarte importantă de elemente ale mulțimilor o formează mărimile matematice.

Să considerăm șirul numerilor reale. Numerile reale formează elementele unei mulțimi între care sînt definite relațiile de egalitate, de mai mare și mai mic, și de adunare. Se spune că elementele A,B,C... ale unei mulțimi sînt mărimi scalare, dacă se poate stabili o astfel de corespondență între ele și numerele reale, încît fiecărui element să-i corespundă un singur număr real și fiecărui număr real dintr-o mulțime să-i corespundă un singur element. In acest fel se introduc și între elementele A,B,C... relațiile de egalitate, ordonare (mai mare sau mai mic) și adunare. Elementele A,B,C,... pot fi mărimi fizice. Distanțele, unghiurile ariile și volumele și masele sînt exemple de mărimi scalare.

Considerăm și un sistem de coordonate rectilinii rectangulare în plan Oxy (fig.1), și două puncte, P_1 și P_2 de coordonate x_1 , y_1, respectiv x_2, y_2. Proiecțiile segmentului de dreaptă P_1P_2 pe axele Ox și Oy sunt (x_2-x_1) și (y_2-y_1). Ele sînt mărimi scalare. Mărimea

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

de asemenea , o mărime scalară. Dacă se mențin punctele P_1 și P_2 și se schimbă sistemul de coordonate din Oxy în O'x'y', proiecțiile segmentului de dreaptă P_1P_2 pe noile axe de coordonate sînt mărimi scalare $(x'_2 - x'_1)$ și $(y'_2-y'_1)$,

egale cu diferenţele dintre noile abscise, respectiv ordonate ale punctelor P_2 şi P_1. Aceste proiecţii diferă de proiecţiile vechi $(x_2 - x_1)$ şi $(y_2 - y_1)$, dar mărimea

$$d'^2 = (x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2$$

care reprezintă distanţa dintre punctele P_2 şi P_1, are aceiaşi valoare ca şi vechea mărime d. Scalarii a

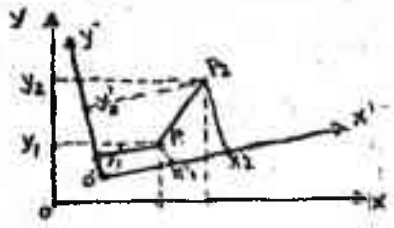


Fig. 1

Schimbarea sistemului de coordonate rectilinii ortogonale într-un plan.

căror valoare variază cînd se schimbă sistemul de coordonate la care sînt raportaţi se numesc scalari varianţi, iar scalarii a căror valoare e independentă de sisteme şi de coordonate se numesc scalari invarianţi. Distanţa, unghiul, aria şi volumul sînt scalari invarianţi. Proiecţiile unui segment pe axele sistemelor de coordonate rectilinii sînt scalari varianţi. In Matematică se consideră mai multe clase de scalari varianţi (numiţi scalari monovarianţi, divarianţi, etc) şi care vor fi definiţi mai tîrziu.

Scalarii se simbolizează cu litere latine sau elene, majuscule sau minuscule: A,B....c,d,,...

1.2. <u>Mărimi matematice.</u> Mulţimea numerelor complexe constituie un exemplu de mulţimi de mărimi matematice. Un număr complex e sistemul format de o pereche ordonată (a,b) de numere reale a şi b, adică de o pereche în care se ştie care e primul număr real(a) şi care e cel de al doilea număr real(b). Cu ajutorul acestor perechi de numere reale se definesc următoarele relaţii şi operaţii: Două numere complexe se numesc egale, dacă primele, respectiv cele de al doilea numere reale ale lor, sînt respectiv egale; suma a două numere complexe (a,b) şi (c,d) e numărul complex (a+c, b+d), care are drept prim, respectiv drept al doilea număr real, suma primelor, respectiv suma celor de al doilea numere reale ale numerelor complexe de adunat; produsul a două numere complexe (a,b) şi (c,d) e următorul număr complex: (ac -bd, ad + bc).- Numerele complexe se caracterizează deci

prin cei doi scalari ai sistemului, şi prin felul particular în care e definit produsul lor. Se observă că rezultatul sumei şi al produsului se poate obţine şi folosind simbolul $j^2=-1$, adică $j = \sqrt{-1}$, numit unitatea numerelor imaginare punînd numerele complexe sub forma de sume simbolice $(a,b) \to a+jb$; $(c,d) \to c+jd$, şi adunînd şi înmulţind după regulile care ar fi valabile dacă simbolul j ar reprezenta un număr real. Se obţine astfel simbolizarea curentă a numerelor complexe, cu ajutorul căreia se poate opera ca şi cu simbolizarea numerelor reale:

$$(a + jb) + (c + jd) = a + c + j(b+d);$$

$$(a + jb)(c + jd) = ac + j^2bd + jad + jbc = (ac-bd)+(ad+bc).$$

Vectorii, tensorii, spinorii şi matricele sînt alte exemple de mărimi matematice.

In Matematică, termenul mărime are deci un sens mai general decît sensul de scalar. Se numeşte mărime matematică chiar şi un sistem de scalari (de exemplu o pereche de scalari în cazul numerelor complexe) dacă sunt definite între sisteme, sau între sisteme şi scalari, următoarele relaţii: Fiecare scalar ocupă o anumită poziţie în sistem; egalitatea a două sisteme, care e definită prin egalitatea tuturor scalarilor lui ocupînd poziţii omologe; inegalitatea a două sisteme, definită prin inegalitatea a cel puţin doi scalari omologi; compunerea a două sisteme, care e definită punînd sistemul compus din două sisteme, egal cu sistemul care are drept scalari compuşii scalarilor omologi ai celor două sisteme. In general, nu se mai poate defini o ordonare a mărimilor matematice, în acest sens.

1.3. <u>Operaţii matematice</u> Operaţiile care se fac cu ajutorul mărimilor matematice se împart în două clase: operaţii algebrice şi operaţii topologice. O operaţie se numeşte algebrică, dacă se obţin cu ajutorul ei, dintr-un număr finit de mărimi, una sau mai multe mărimi, ca rezultat al operaţiei. Compunerea mărimilor scalare, de exemplu, e o operaţie algebrică, fiindcă determină scalarul compus în funcţiune de cei doi scalari care se compun. O operaţie ma-

2. Vectorii

2.1. Deplasarea rectilinie şi suma geometrică. Considerăm deplasarea rectilinie a unui punct. Ea nu e complect determinată prin lungimea de deplasare, care e un scalar invariant pozitiv şi se numeşte valoarea ei numerică sau valoarea ei absolută. În adevăr , deplasarea de valoare absolută dată poate avea direcţii şi sensuri diferite, pe care nu le determină valoarea ei absolută. Pentru determinarea direcţiei şi a sensului deplasării, e nevoie de alte două mărimi scalare, de exemplu de cele două unghiuri dintre direcţia şi sensul ei, şi dintre două drepte concurente dotate cu sensuri pozitive.Deplasarea rectilinie e deci o mărime care e complect determinată numai printr-un sistem de trei scalari: unul pentru valoarea ei absolută şi doi pentru direcţia şi sensul ei. Deplasarea rectilinie nu e deci o mărime scalară. Alte mărimi nescalare sînt: viteza, forţa, starea de tensiune şi starea de deformaţie dintr-un punct al unui corp. Dintre ele, deplasarea rectilinie, viteza şi forţa fac parte din clasa mărimilor care se numesc vectori sau tensori de ordinul întîiu, iar starea de tensiune şi cea de deformaţie, din clasa mărimilor care se numesc

tematică se numeşte topologică, dacă se obţin, ca rezultat al operaţiei, una sau mai multe mărimi, numai cu ajutorul unui număr infinit de mărimi. Trecerea la limită, de exemplu e o operaţie topologică. Operaţiile obţinute combinînd operaţiile algebrice cu cele topologice se numesc operaţii de analiză matematică. Combinarea se poate face şi repetînd de o infinitate de ori o operaţie algebrică. Intr-o serie, de exemplu se pot forma prin operaţia algebrică de adunare, sume parţiale ale unor numere finite de termeni ai seriei. Dacă există un număr, astfel încît, în orice vecinătate a lui să se găsească o infinitate de astfel de sume parţiale, acest număr e limita sumelor parţiale (concept de analiză matematică) şi se numeşte suma seriei.

Presupunem cunoscute algebra mărimilor scalare şi complexe, şi analiza mărimilor scalare. Expunem mai jos bazele algebrei şi analizei vectorilor.

Scanned with OKEN Scanner

tensori de ordinul al doilea.

Pentru ca un sistem ordonat de trei scalari să reprezinte o mărime matematică de felul deplasării rectilinii, e necesar ca acești trei scalari să determine o valoare absolută, o direcție și un sens. Aceste condițiuni nu sînt însă suficiente, adică deplasările rectilinii au și alte proprietăți matematice, afară de valoarea absolută, direcție și sens. Rotația de exemplu, e o mărime care are o valoare absolută, o direcție și un sens, adică o orientare. Cu toate acestea, rotația diferă, din punct de vedere matematic de deplasarea rectilinie. In adevăr dacă se dau două deplasări rectilinii 1 și 2 (fig 2) și dacă i se dau unui punct O deplasările 1 și 2, el ajunge în același punct final P, indiferent dacă efectuează întîi deplasarea 1 și după aceia deplasarea 2, sau întîi deplasarea 2 și apoi deplasarea 1. Rotațiile se comportă altfel din acest punct de vedere. In adevăr, dacă se rotește sfera din fig.3 întîi cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei 1, punctul P ajunge în P' și dacă se rotește apoi sfera cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei 2, punctul ajunge din P' în P". Dacă se schimbă însă ordinea, și se rotește sfera cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ întîi în jurul axei 2, punctul P nu-și schimbă poziție, iar la rotirea ei cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în jurul axei 1, el ajunge în P' și nu în P". Deși rotația e deci o mărime care are o valoare absolută (în exemplul nostru) și o orientare (direcția și sensul axelor de rotație, asociate sensului de rotație ca în fig.2), ca deplasarea rectilinie, totuși ea diferă de aceasta prin faptul că efectul a două rotații consecutive depinde de ordinea în care se efectuează, pe cînd efectul a două deplasări rectilinii nu depinde de această ordine.

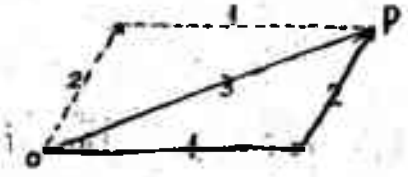


Fig.2
Deplasările rectilinii ale unui punct

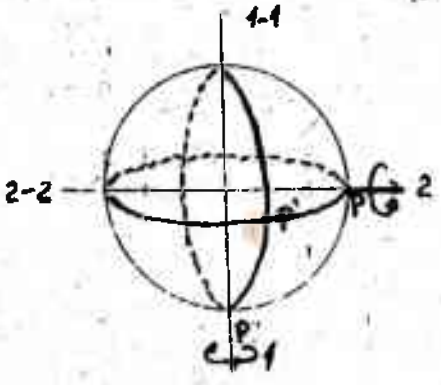


Fig.3
Rotațiile unei sfere

Se calculează rareori cu mărimi de felul rotaţiei dar se calculează adesea cu mărimi de felul deplasării rectilinii, pentru care rezultatul nu depinde de ordinea combinării lor, şi pentru care aceasta se obţine ca şi pentru deplasările rectilinii. Acestea sînt mărimile vectoriale. Ele pot fi definite cu ajutorul proprietăţilor pe care le au cei trei scalari ai sistemului care le determină complet. Această definiţie ar fi însă prea formală pentru început. De aceea definim vectorii cu ajutorul deplasărilor rectilinii, aşa cum am definit scalarii cu ajutorul numerelor reale, fiindcă deplasările rectilinii prezintă avantajul că avem despre ele o reprezentare intuitivă clară.

O deplasare ca 3 din fig.2 se numeşte suma geometrică a deplasărilor 1 şi 2. Prin însumarea geometrică nu se înţelege deci operaţia algebrică a însumării valorilor absolute a două deplasări, ci operaţia construirii deplasării reprezentată de prima diagonală a paralelogramului care are cele două deplasări drept laturi. Conceptele de deplasare rectilinie şi sumă geometrică se folosesc în definiţia vectorului.

2.2. Definiţia geometrică a vectorului

Elementele unei mulţimi se numesc vectori dacă se poate stabili o astfel de corespondenţă între ele de o parte şi deplasările rectilinii de altă parte, încît fiecărui element să-i corespundă o singură deplasare rectilinie, şi fiecărei deplasări rectilinii dintr-o anumită mulţime să-i corespundă un singur element, şi dacă prin compunerea a două elemente se obţine elementul care corespunde sumei geometrice a deplasărilor rectilinii corespunzătoare celor două elemente compuse (fig.2). Vectorul e deci o mărime complet determinată printr-un număr şi printr-o orientare.

2.3. Reprezentarea grafică a vectorilor

Un vector se poate reprezenta grafic printr-o săgeată care are (la o scară dată) o lungime egală cu valoarea lui absolută şi orientarea lui (fig.4). Punctul O, din spre care pleacă săgeata, se numeşte originea vectorului. Un vector

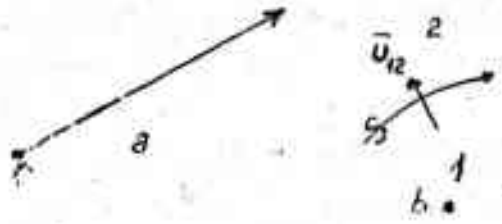


Fig.4

Reprezentarea grafică a unui vector(a) şi a unui versor(b)

asociat unui punct se desenează cu originea în acel punct Punctul E din vîrful săgeţii, se numeşte extremitatea săgeţii vectorului. Ea interesează mărimea vectorială, de exemplu, dacă aceasta e deplasarea rectilinie a unui punct şi dacă săgeata o reprezintă, în acest caz, în mărime naturală; altfel extremitatea săgeţii vectorului interesează numai indirect, pentru reprezentarea valorii sale absolute, şi poate fi schimbată pe orientarea vectorului, prin schimbarea scării la care se face reprezentarea grafică. Dacă vectorii unei mulţimi sînt asociaţi mai multor puncte din spaţiu, se alege totdeauna pentru toate punctele, aceiaşi scară de reprezentare grafică.

2.4. Exemple de vectori. După definiţia de mai sus raza vectoare $\bar{r}$ a unui punct în raport cu o origine O, care are originea în O şi extremitatea în P, e un vector, fiindcă suma geometrică a două raze vectoare e reprezentată de prima diagonală a paralelogramului construit pe cele două raze vectoare de compus. Ea se numeşte şi vectorul de poziţie al punctului P în raport cu originea O. De asemenea viteza e un vector, fiindcă suma geometrică a două viteze e reprezentată e prima diagonală a paralelogramului construit pe cele două viteze de compus. Viteza unghiulară, forţa şi acceleraţia sînt de asemenea, vectori. Starea de tensiune dintr-un punct al unui corp elastic nu e însă vector, fiindcă nu e complect determinată prin trei scalari, cum se arată în studiul mediilor continue. Rotaţia finită de asemenea, nu e vector. Nici temperatura nu e vector, fiindcă nu are direcţie şi sens, ci numai o valoare numerică pozitivă sau negativă, după cum se alege punctul zero; temperatura e deci o mărime scalară.

2.5. Clase de vectori. Vectorii asociaţi unor puncte bine determinate din spaţiu, numite punctele lor de

aplicaţie, fac parte din clasa vectorilor legaţi şi se reprezintă cu originea în punctul căruia îi sînt asociaţi. Vectorii asociaţi unor drepte din spaţiu, adică vectorii al căror punct de aplicaţie poate fi deplasat în direcţia lor pe o dreaptă suport, se numesc vectori alunecători.

Vectorii al căror punct de aplicaţie poate fi deplasat oricum fac parte din clasa vectorilor liberi. Viteza unui punct material e un vector legat, viteza unghiulară a unui solid e vector alunecător, iar translaţia unui solid e un vector liber.

2.6. Simbolizarea vectorilor. Vectorii se simbolizează cu litere latine sau elene barate: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \ldots \bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\Gamma}$ Valoarea absolută a unui vector e un scalar pozitiv, care se notează, afară de cazuri excepţionale, cu litera latină respectiv elenă, corespunzătoare, nebarată: $A, B, C \ldots \alpha \beta \Gamma$ sau uneori, cu simbolul vectorului trecut între două bare verticale: $/\bar{A}/, /\bar{B}/, /\bar{C}/, \ldots /\bar{\alpha}/, /\bar{\beta}/, /\bar{\Gamma}/$. Cînd valoarea absolută a unui vector e nulă, el se consideră bine determinat şi dacă nu se indică orientarea lui. Cînd se relevă originea şi extremitatea unui vector, literele sau cifrele care indică punctele respective se trec ca indici ai simbolului vectorului, primul indice fiind totdeauna litera sau cifra originii, şi al doilea, a extremităţii. Simbolul $\bar{F}_{OE}$ reprezintă deci vectorul cu originea în O şi cu extremitatea în E (fig.4 a).- Cînd se operează cu un vector dirijat normal printr-o suprafaţă de separaţie S a două regiuni 1 şi 2, din spre una spre alta, simbolul său are ca prim indice litera sau cifra regiunii din spre care e dirijată săgeata vectorului şi drept al doilea indice, a regiunii spre care e dirijată săgeata lui. Simbolul $\bar{u}_{12}$ reprezintă deci un vector normal pe suprafaţa S, orientat din spre regiunea 1 spre regiunea 2 (fig.4 b) şi anume un vector cu valoarea absolută egală cu unitatea, numit şi versor.

2.7. Proiecţii şi unghiuri. Cei trei scalari, cu ajutorul cărora se poate determina un vector, pot indica unul valoarea lui absolută şi doi direcţia şi sensul lui.

De exemplu, vectorul $\bar{G}$ din figura 5 e raportat la un sistem de coordonate sferice. Acesta are o axă polară Δ, dotată cu un sens pozitiv, un ecuator E şi un meridian - origine M_0. Vectorul $\bar{G}$ e complect determinat prin valoarea sa absolută G, prin unghiul φ pe care- l formează cu sensul pozitiv al axei Δ şi prin unghiul α, pe care-l formează planul său meridional cu meridianul în origine M_0. Cei trei scalari pot fi însă şi cele trei proiecţii ortogonale ale vectorului pe trei axe de coordonate concurente trirectangulare, care formează un sistem de coordonate cartesiene. Proiecţiile pe axe se consideră pozitive, dacă sensurile din spre proiecţiile originii spre proiecţiile extremităţii vectorului coincid cu sensurile pozitive de pe axe (fig.6 a); altfel proiecţiile se consideră negative (v. fig.6 b)

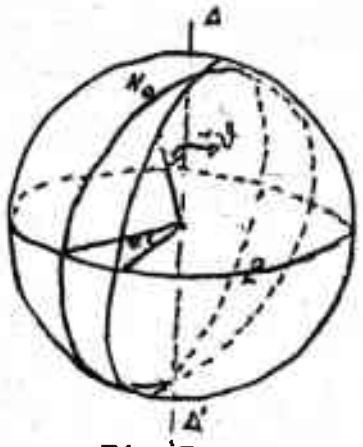


Fig.5

Raportarea unui vector la un sistem de coordonate sferice.

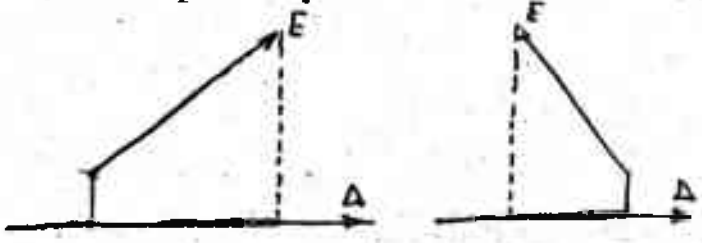


Fig.6

Proiecţii ortogonale ale unor vectori pe axe (pozitivă în fig.6 a negativă în fig.6 b)

Prin unghiul $(\bar{A}, \bar{B})$ dintre un vector $\bar{A}$ şi un al doilea vector $\bar{B}$ se înţelege cel mai mic unghiu cu care trebuie rotit vectorul $\bar{A}$ spre a se suprapune cu vectorul $\bar{B}$, presupus că are acelaşi origine cu vectorul $\bar{A}$; el se consideră pozitiv dinspre vectorul $\bar{A}$ spre vectorul $\bar{B}$ (fig.7)

Fig.7

Unghiul a doi vectori

2.3 Operaţii cu vectori. În calculul vectorial survin patru operaţii algebrice în care intervin doar vectori, sau numai vectori: adunarea şi scăderea

ectorilor, produsul şi cîtul unui vector printr-un scalar, produsul scalar a doi vectori. Produsul vectorial a doi vectori. În calculul vectorial survin şi patru operaţii de analiză matematică formate cu scalari şi cu vectori: Derivata unui vector în raport cu o variabilă scalară, gradientul scalarului cîmp al unui cîmp de scalari, divergenţa şi rotorul vectorului cîmp al unui cîmp de vectori.

3.- SUMA SI DIFERENTA VECTORILOR

3.1. Egalitatea vectorilor. Doi vectori se numesc egali, dacă au valori absolute egale şi aceiaşi orientare (indiferent de punctele lor de aplicaţie). Simbolul grafic al egalităţii a doi vectori este : Doi vectori care au aceiaşi direcţie şi acelaşi sens se numesc omoparaleli; vectorii care au aceiaşi direcţie şi sensuri contrare se numesc antiparaleli Vectorii omoparaleli şi de valori absolute egale sînt deci egali.

3.2 Suma vectorilor Prin suma a doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ se înţelege vectorul $\bar{S}$ reprezentat de prima diagonală a paralelogramului construit pe ei (Fig.8)

Simbolul sumei vectoriale este +, şi se scrie:

$$\bar{S} = \bar{A} + \bar{B} \qquad (1)$$

Prima diagonală a paralelogramului construit pe doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ e săgeata care leagă originea vectorului $\bar{A}$ cu extremitatea vectorului $\bar{B}$ cînd acesta a purtat cu originea în extremitatea vectorului $\bar{A}$. Se spune mai scurt că adunarea a doi vectori, care reprezintă suma lor geometrică, se face după regula paralelogramului.

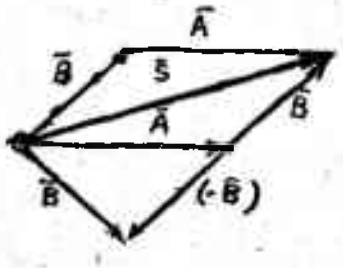


Fig.8.
Adunarea şi scăderea vectorilor.

Adunarea vectorială se poate efectua nelimitat, adică oricari doi vectori se pot aduna, şi vectorul sumă e univoc determinat de vectorii de adunat. Afară de aceasta, suma a doi vectori

satisface următoarele două legi:

Comutivitatea: $\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$

Aceasta exprimă că suma a doi vectori e independentă de ordinea în care se adună, cum s-a postulat în definiţia vectorilor. Grafic legea e reprezentată în Fig. 8, în care adunarea $\bar{B} + \bar{A}$ e reprezentată în linii pline, iar $\bar{A} + \bar{B}$, în linii grase.

Asociativitatea : $(\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})$

Legea e reprezentată grafic în fig 9, în care membrul drept al relaţiei e reprezentat în linii pline, iar membrul stîng, în linii grase.

c. Diferenţa a doi vectori Prin diferenţa $\bar{D}$ dintre vectorul $\bar{A}$ şi vectorul $\bar{B}$ se înţelege în algebra vectorială suma dintre vectorul $\bar{A}$ şi vectorul $\bar{B}$ considerat cu semnul schimbat(Fig.8).Simbolul diferenţei vectoriale este - şi se scrie:

$$\bar{D} \equiv \bar{A} - \bar{B} \quad (1\,a)$$

Se observă(fig.8) că diferenţa a doi vectori e reprezentată de cea de a doua diagonală a paralelogramului construit de cei doi vectori dirijată din spre extremitatea vectorului care se scade spre extremitatea vectorului din care se scade.

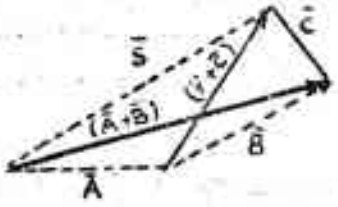


Fig.9
Asociativitatea sumei vectorilor

Dacă se ţine seama, ca în algebra mărimilor scalare, scăderea vectorilor se reduce la adunare.Diferenţa vectorilor satisface deci aceleaşi legi ca şi suma, adică pe lîngă efectuabilitatea nelimitată şi unicitate:

Comutivitatea : $(\bar{A} - \bar{B}) = (-\bar{B} + \bar{A})$

Asociativitatea: $(\bar{A} - \bar{B}) - \bar{C} = \bar{A} - (\bar{B} + \bar{C})$

Dacă trebuie adunaţi mai mulţi vectori $\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}$ vectorul sumă

$$\bar{S} \equiv \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$$

se obţine deci purtînd vectorul $\bar{B}$ cu originea în extremitatea lui $\bar{A}$, vectorul $\bar{C}$ cu originea în extremitatea acestui $\bar{B}$, vectorul $\bar{D}$ cu originea în extremitatea acestui $\bar{C}$, şi unind

originea vectorului $\bar{A}$ printr-o săgeată $\bar{S}$ cu extremitatea vectorului $\bar{D}$, purtat cum s-a arătat mai sus.

3.3. Creşterea razei vectoare. Fie un punct P, de rază vectoare $\bar{r}$ în raport cu o origine O. Dacă punctul P se deplasează în punctul P', de rază vectoare $\bar{r}'$ în raport cu aceiaşi origine, diferenţa

$$\Delta \bar{r} \equiv \bar{r}' - \bar{r}$$

dintre cele două raze vectoare se numeşte creşterea razei vectoare $\bar{r}$, corespunzătoare deplasării din P în P'. Nu e potrivit ca valoarea ei absolută $/\Delta \bar{r}/$ să fie notată cu simbolul literal Δr, fiindcă acesta se foloseşte pentru creşterea

$$\Delta r \equiv /\bar{r}'/ - /\bar{r}/ \equiv r' - r$$

a valorii absolute r a razei vectoare $\bar{r}$, această creştere Δr e însă în general mai mică sau cel mult egală cu valoarea absolută $/\Delta \bar{r}/$ a creşterii $\Delta \bar{r}$:

$$\Delta r \leqq /\Delta \bar{r}/$$

cum rezultă şi din figura lo. - Cînd creşterea e infinitezimală, dr poate fi considerat că face parte dintr-o curbă şi reprezintă elementul ei de arc, adică $/ d\bar{r}/ \equiv ds$. Din figura lo rezultă în acest caz : $r\, /d\bar{r}/ \cos \alpha = rds \cos \alpha = rdr$.

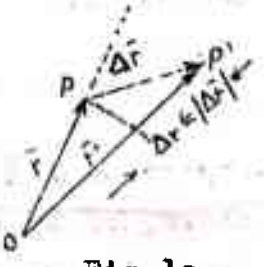


Fig.lo
Creşterea razei vectoare.

4. PRODUSUL SI CITUL UNUI VECTOR PRINTR-UN SCALAR

4.1. Sumă şi produs. Suma $\bar{S}_n$ a n vectori egali $\bar{A}$ e, conform definiţiei sumei, un vector cu orientarea vectorului $\bar{A}$, a cărui valoare absolută e de n ori mai mare decît valoarea absolută a lui $\bar{A}$. Prin analogie cu produsul scalarilor, ea se poate defini şi drept produs al vectorului $\bar{A}$ prin scalarul întreg şi pozitiv n, şi se poate pune sub forma $\bar{S}_n = n \bar{A}$. De altă parte, un vector - $\bar{A}$, cu aceiaşi valoare absolută, dar cu orientarea contrară orientării vectorului $\bar{A}$, poate fi definit drept produsul vecto-

rului $\bar{A}$ prin - 1. Suma $\bar{S}_n$ a n vectori egali cu - $\bar{A}$, care e un vector cu valoarea absolută de n ori mai mare decît valoarea absolută a lui $\bar{A}$ şi cu orientarea contrară orientării lui $\bar{A}$, se poate defini drept produs al vectorului $\bar{A}$ prin scalarul întreg şi negativ - n. Definiţia care urmează reprezintă o generalizare a acestor convenţiuni, pentru cazul unui factor scalar neîntreg.

4.2. Produsul unui vector printr-un scalar Prin produsul unui vector $\bar{A}$, printr-un scalar a se înţelege un vector $\bar{B}$, care are valoarea absolută egală cu de a ori valoarea absolută a lui $\bar{A}$, de direcţia şi sensul vectorului $\bar{A}$, cînd a e pozitiv, şi de sens contrar cu vectorul $\bar{A}$ cînd a e negativ. Produsul unui vector printr-un scalar se simbolizează scriind simbolurile lor alăturate, cu sau fără punct între ele:

$$\bar{B} \equiv a \cdot \bar{A} \qquad (2)$$

Figura 11 a reprezintă orientarea vectorului $\bar{B}$ faţă de orientarea lui $\bar{A}$ pentru a pozitiv, iar figura 11 b, pentru a negativ. Produsul unui vector printr-un scalar satisface, pe lîngă legile efectuabilităţii nelimitate şi unicităţii, următoarele patru legi:

Fig. 11 a,b
Produsul unui vector $\bar{A}$ printr-un scalar a (a, pozitiv, b, negativ)

Comutivitatea: $a\bar{A} = \bar{A}a$. Prin produsul $\bar{A}$ a se înţelege deci aceiaşi operaţie ca şi prin produsul a $\bar{A}$.

Asociativitatea faţă de factorii scalari.

$$b(a,\bar{A}) = a(b,\bar{A}) = (a.b)\bar{A}.$$

Această rezultă imediat din definiţia produsului unui vector printr-un scalar.

Distributivitatea faţă de adunarea scalară:

$(a+b)\bar{A} = a.\bar{A} + b.\bar{A}$.

Distributivitatea faţă de adunarea vectorială: $a(\bar{A}+\bar{B}) = a\bar{A} + a\bar{B}$.

Ultimele două legi rezultă imediat din proprietăţile sumei a doi vectori şi din proprietăţile produsului dintre un vector şi un scalar.

Prin cîtul dintre un vector şi un scalar se înţelege produsul vectorului prin valoarea reciprocă a scalarului.

4.3. Versorul unei orientări. Uneori e convenabil să se pună separat în evidenţă valoarea absolută a unui vector şi orientarea lui. Orientarea se caracterizează printr-un vector cu valoarea absolută egală cu unitatea şi orientat în direcţia şi sensul ei, numit versorul sau vectorul unitate al orientării. Versorii se notează, de obiceiu, cu $\bar{u}$ (iniţiala cuvîntului unitate) şi simbolul lor e afectat de obiceiu de un indice care indică orientarea. Dacă A e valoarea absolută a vectorului $\bar{A}$ şi $\bar{u}_{\bar{A}}$ e versorul orientării lui $\bar{A}$, există deci relaţia

$$\bar{A} = \bar{u}_{\bar{A}} \, A \qquad (3)$$

4.4. Valoarea relativă a unui vector. Uneori prezintă importanţă relaţia dintre un versor $\bar{u}$ şi un vector $\bar{A}$, omoparalel (adică paralel şi de acelaşi sens) sau antiparalel (adică paralel şi de sens contrar) cu $\bar{u}$. In acest se operează cu valoarea relativă A_r a vectorului A în raport cu versorul $\bar{u}$, egală cu valoarea absolută A a vectorului $\bar{A}$, dacă acesta e omoparalel cu $\bar{u}$ şi egală şi de semn contrar cu valoarea absolută a vectorului $\bar{A}$ cînd acesta e antiparalel cu $\bar{u}$:

$$\bar{A} = \bar{u} A_r \qquad (3\,a)$$

5. PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

5.1. Produsul scalar. In calcule interesează adesea scalarul invariant care se obţine înmulţind produsul AB al valorilor absolute a doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, prin cosinusul unghiului α dintre ei. Acest scalar invariant e pozitiv cînd unghiul α e ascuţit, şi negativ cînd unghiul α e obtuz, şi se numeşte produsul scalar sau produsul contractat al vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$:

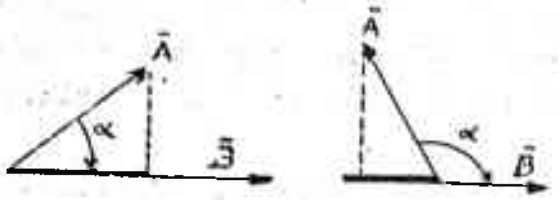


Fig.12

Figură pentru definiţia produsului scalar a doi vectori(pozitiv în fig. 12 a, negativ în fig.12b)

Produsul scalar a doi vectori e scalarul invariant care se obţine înmulţind produsul valorilor lor absolute prin cosinusul unghiului dintre ele.

Produsul scalar se simbolizează scriind simbolurile celor doi vectori alăturate, cu sau fără punct între ele. Dacă α e unghiul dintre vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, indicat în fig.12, se scrie deci:

$$\bar{A}.\bar{B} = A.B \cos(\bar{A},\bar{B}) = A.B \cos\alpha \quad (4)$$

Produsul scalar a doi vectori e egal cu produsul valorii absolute a unuia, de exemplu A sau B, prin proiecţia ortogonală pe el a celuilalt, adică $B_{\bar{A}}$, respectiv $A_{\bar{B}}$, considerată cu semnul plus respectiv minus, după cum unghiul dintre cei doi vectori e ascuţit, respectiv obtuz:

$$\bar{A}\,\bar{B} = AB_{\bar{A}} = A_{\bar{B}}B \quad (4)$$

Produsul scalar a doi vectori satisface, pe lîngă legea efectuabilităţii nelimitate în domeniul scalarilor şi a unicităţii, următoarele două legi:

Comutativitatea: $\bar{A}.\bar{B} = \bar{B}.\bar{A}$

Aceasta se demonstrează observînd că valoarea fiecăruia dintre cei doi membri e A.B cos($\bar{A},\bar{B}$)

Distributivitatea faţă de adunarea vectorială: $(\bar{A} + \bar{B}).\bar{C} = \bar{A}.\bar{C} + \bar{B}.\bar{C}$.

Aceasta se demonstrează observînd că proiecţia pe vectorul C a sumei $(\bar{A} + \bar{B})$ e egală cu suma proiecţiilor pe $\bar{C}$ ale vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$.

Nu există o lege a asociaţiei pentru produsul scalar, fiindcă produsul scalar a doi vectori e un scalar; fiind ar trebui să se înmulţească deci cu cel de al treilea vector, nu mai intervine produsul scalar a doi vectori, ci

produsul unui scalar printr-un vector, adică produsul $(\bar{A}.\bar{B})\bar{C}$, în care parenteza arată că se face întîi produsul scalar $\bar{A}.\bar{B}$ şi se înmulţeşte apoi cu $\bar{C}$, ceiace dă un vector de direcţia lui $\bar{C}$, diferit de produsul $(\bar{A},\bar{C})\bar{B}$, care dă un vector de direcţia lui B.

5.2. Produse scalare particulare. In algebra vectorilor se operează şi cu un produs al vectorilor care se numeşte produs vectorial, şi e diferit de produsul scalar. Produsul scalar al unui vector prin el însuşi se notează cu A^2, iar produsului vectorial nu i se aplică această notaţie. Se poate scrie deci:

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = A^2 = A.A = A^2$$

fiindcă cosinusul unghiului $(\bar{A},\bar{A})$ e egal cu unitatea. Deci, valoarea absolută a vectorului se poate exprima prin relaţia:

$$A = + \sqrt{\bar{A}^2} \qquad (4\ a)$$

Dacă doi vectori sînt omoparaleli, cosinusul unghiului dintre ei e egal cu unitatea, şi deci:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A.B \qquad (4\ b)$$

Reciproc, dacă $\bar{A}\bar{B} = AB$, rezultă că vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt omoparaleli. Dacă doi vectori sînt antiparaleli, urmează:

$$\bar{A}\bar{B} = - AB \qquad (4\ c)$$

Reciproc, dacă $\bar{A}\bar{B} = - AB$ rezultă că vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sunt antiparaleli.

Dacă vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt perpendiculari unul pe altul, cosinusul unghiului dintre ei e nul, şi deci:

$$\bar{A}.\bar{B} = 0 \qquad (4\ d)$$

Reciproc, dacă $\bar{A}\bar{B}=0$, rezultă că vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ formează între ei un unghiu drept.

5.3. Exemple de produse scalare. Produsul scalar a doi vectori intervine în expresiunea cosinusului unghiului $(\bar{A},\bar{B})$ dintre doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$.
Produsul scalar fiind $\bar{A}\bar{B} = /\bar{A}/ ./\bar{B}/ \cos /\bar{A},\bar{B}/$, rezultă:

produsul unui scalar printr-un vector, adică produsul $(\bar{A}.\bar{B})\bar{C}$, în care parenteza arată că se face întîi produsul scalar $\bar{A}.\bar{B}$ şi se înmulţeşte apoi cu $\bar{C}$, ceiace dă un vector de direcţia lui $\bar{C}$, diferit de produsul $(\bar{A},\bar{C})\bar{B}$, care dă un vector de direcţia lui B.

5.2. Produse scalare particulare. In algebra vectorilor se operează şi cu un produs al vectorilor care se numeşte produs vectorial, şi e diferit de produsul scalar. Produsul scalar al unui vector prin el însuşi se notează cu A^2, iar produsului vectorial nu i se aplică această notaţie. Se poate scrie deci:

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = A^2 = A.A = A^2$$

fiindcă cosinusul unghiului $(\bar{A},\bar{A})$ e egal cu unitatea. Deci, valoarea absolută a vectorului se poate exprima prin relaţia:

$$A = + \sqrt{\bar{A}^2} \qquad (4\ a)$$

Dacă doi vectori sînt omoparaleli, cosinusul unghiului dintre ei e egal cu unitatea, şi deci:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A.B \qquad (4\ b)$$

Reciproc, dacă $\bar{A}\bar{B} = AB$, rezultă că vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt omoparaleli. Dacă doi vectori sînt antiparaleli, urmează:

$$\bar{A}\bar{B} = - AB \qquad (4\ c)$$

Reciproc, dacă $\bar{A}\bar{B} = - AB$ rezultă că vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sunt antiparaleli.

Dacă vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt perpendiculari unul pe altul, cosinusul unghiului dintre ei e nul, şi deci:

$$\bar{A}.\bar{B} = 0 \qquad (4\ d)$$

Reciproc, dacă $\bar{A}\bar{B}=0$, rezultă că vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ formează între ei un unghiu drept.

5.3. Exemple de produse scalare. Produsul scalar a doi vectori intervine în expresiunea cosinusului unghiului $(\bar{A},\bar{B})$ dintre doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$,
Produsul scalar fiind $\bar{A}\bar{B} = /\bar{A}/ \,./\bar{B}/ \cos /\bar{A},\bar{B}/$, rezultă:

$$\cos(\bar{A},\bar{B}) = \frac{\bar{A}\bar{B}}{/\bar{A}/\ /\bar{B}/} \qquad (4\ e)$$

Produsul scalar intervine şi în expresiunea lucrului mecanic pe care-l efectuează o forţă. Dacă $\bar{F}$ e o forţă de valoare absolută şi orientare constantă, şi $\Delta\bar{r}$ e deplasarea rectilinie a punctului său material de aplicaţie în raport cu un sistem de referinţă inerţial, lucrul mecanic L, raportat la acel sistem de referinţă, efectuat de ea în cursul acestei deplasări a punctului ei material de aplicaţie, e egal cu produsul dintre valoarea absolută a forţei, valoarea absolută a deplasării rectilinii şi cosinusul unghiului $(\bar{F},\Delta\bar{r})$ dintre ele, adică e egal cu produsul lor scalar:

$$L = /\bar{F}/./\Delta\bar{r}/\cos(\bar{F},\Delta\bar{r}) = \bar{F}.\Delta\bar{r} \qquad (4\ f)$$

6. SISTEMELE DE COORDONATE ŞI VECTORII

6.1. Problema sistemelor de coordonate. Afară de metoda definirii şi caracterizării directe, geometrice a vectorilor şi a operaţiilor care se efectuează cu vectorii, există şi o metodă indirectă, în care nu se operează direct cu vectorii, ci se folosesc sisteme de coordonate şi se operează cu cei trei scalari corespunzători ai sistemului de scalari care definesc un vector. Metoda prin coordonate e indirectă, fiindcă sistemul de coordonate e un element exterior, străin de natura vectorului. E adevărat că şi definirea directă, geometrică, a vectorului implică un sistem de referinţă faţă de care se indică orientarea, dar ea lasă liberă alegerea sistemului de coordonate.

In calculul vectorial se foloseşte atît metoda directă, cît şi metoda indirectă, a sistemelor de coordonate. Metoda directă prezintă avantaje în studiul relaţiilor generale; metoda indirectă prezintă adesea avantaje în rezolvarea de probleme particulare. De aceea prezintă interes sistemele de coordonate, şi trecerea de la descrierea directă la cea indirectă, şi invers. Sistemele de coordonate se împart în sisteme de coordonate rectilinii şi în sisteme de

coordonate cubilinii. Fiecare dintre acestea poate fi un sistem de coordonate ortogonale sau sistem de coordonate oblice. Sistemele de coordonate oblice nu prezintă un interes deosebit în Electrotehnică. Dintre sistemele de coordonate ortogonale, prezintă interes particular sistemele de coordonate cartesiene sau rectilinii ortogonale şi sistemele de coordonate cilindrice, sferice şi dipolare.

6.2. Sistemul de coordonate cartesiene. Sistemul e format din trei drepte trirectangulare Ox,Oy,Oz, concurente într-un punct O,numit origine, dotate cu cîte un sens pozitiv pe fiecare dintre ele şi cu cîte un versor dirijat în sensul pozitiv al fiecărei axe de coordonate.

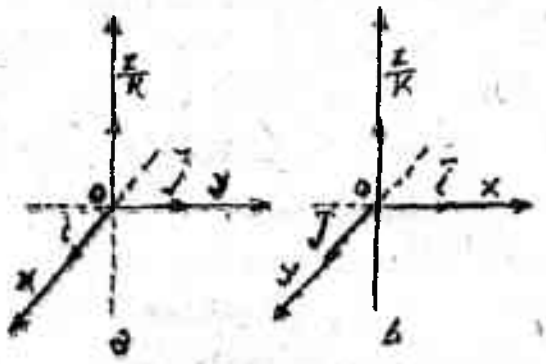


Fig.13
Sisteme de coordonate cartesiene(sistem drept în fig.13 a; Sistem stîng în fig.13 b).

Există două genuri de sisteme de coordonate cartesiene: unul se numeşte sistem drept, şi orientările axelor lui se succed în ordinea Ox,Oy, şi Oz din fig. 13 a, sau ca degetele mare,arătător şi mijlociu de la mîna dreapta dispuse trirectangular, ca în fig.14; celălalt se numeşte sistem stîng şi orientările axelor lui se succed în ordinea Ox,Oy şi Oz din fig.13 b, sau ca degetele mare, arătător şi mijlociu de la mîna stîngă, sensurile pozitive pe axe fiind cele indicate în figuri.Un sistem drept de coordonate cartesiene nu poate fi suprapus astfel peste unul stîng, încît sensurile pozitive ale axelor corespunzătoare să coincidă. Se foloseşte de obiceiu, sistemul drept de coordonate cartesiene.

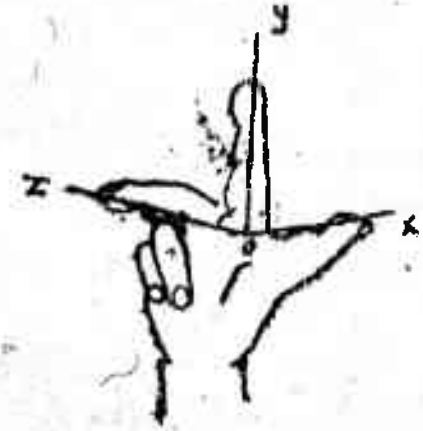


Fig.14
Mîna dreaptă

6.3. Sistemele de coordonate cartesiene şi vectorii. Spre a

reprezenta vectorii în coordonate cartesiene, se operează cu cei trei versori(vectori unitate, care au valori absolute egale cu unitatea) orientaţi în sensurile pozitive ale celor trei axe de coordonate.Cei trei versori de orientare fixă, dirijaţi dealungul axelor Ox,Oy, şi Oz, în sensul lor pozitiv, nu se notează respectiv cu $\bar{u}_x$,$\bar{u}_y$ şi $\bar{u}_z$, ci excepţional cu $\bar{i}$,$\bar{j}$ şi $\bar{k}$ (v.Fig.13 a.)

Un vector $\bar{A}_x$, paralel cu axa Ox şi cu valoarea absolută $/\bar{A}_x/$se poate pune deci sub forma următoare, dedusă prin particularizare, din relaţia (3 a):

$$\bar{A}_x = \bar{i}\, A_x,$$

unde valoarea relativă A_x a vectorului $\bar{A}_x$ în raport cu versorul $\bar{i}$ are valoarea absolută $/\bar{A}_x/$şi e pozitivă sau negativă, după cum $\bar{A}_x$ e omoparalel sau antiparalel cu $\bar{i}$.

Vectorii $\bar{A}_y$ şi $\bar{A}_z$ respectiv omoparaleli sau antiparaleli cu $\bar{j}$ şi $\bar{k}$, se pot pune, analog, sub formele

$$\bar{A}y = \bar{j}\, Ay; \; \bar{A}_z = \bar{k} A_z$$

dacă A_y şi A_z sînt valorile relative ale vectorilor $\bar{A}_y$ şi $\bar{A}_z$ în raport cu $\bar{j}$, respectiv cu $\bar{k}$, pozitive sau negative, după cum $\bar{A}_y$ şi $\bar{A}_z$ sînt omoparaleli sau antiparaleli cu $\bar{j}$, respectiv cu $\bar{k}$.

Suma a trei vectori ca $\bar{A}_x$ $\bar{A}_y$ şi $\bar{A}_z$ este un vector $\bar{A}$, care nu e în general, paralel cu nici una dintre axele de coordonate şi cu nici unul dintre planele de coordonate, şi anume dacă nici una dintre valorile relative $A_x A_y$ şi $\bar{A}_z$ nu e nulă:

$$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y + \bar{A}_z = \bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z \quad (5)$$

Figurile 15 a şi 15 b, reprezintă compunerea a doi vectori $\bar{A}$ din sume de cîte trei vectori $\bar{j}A_x$,$\bar{j}A_y$ şi kA_z, respectiv paraleli cu axele de coordonate Ox,Oy şi Oz.

Dacă se dă invers, un vector $\bar{A}$, care nu e, în general, paralel cu nici una din axele de coordonate, el se poate proiecta ortogonal pe cele trei axe. Se obţin astfel cei trei vectori - proiecţii ai vectorului $\bar{A}$ pe axe: $\bar{A}_x$,$\bar{A}_y$ şi $\bar{A}_z$, ca în fig. 15 a. Suma celor trei vectori -

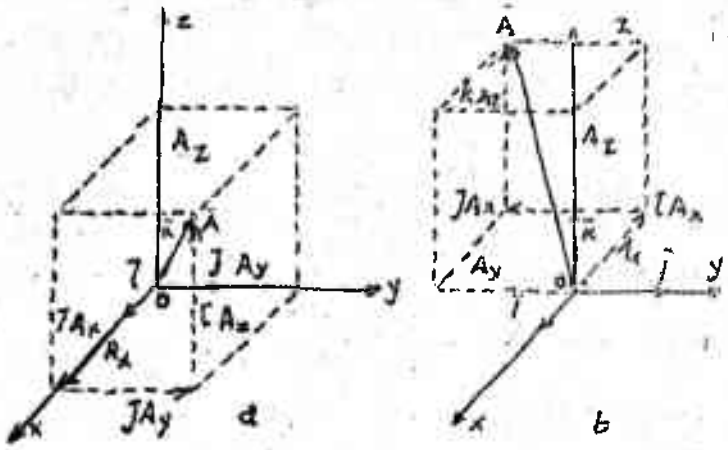


Fig. 15
Compunerea vectorilor din vectori paraleli cu axele de coordonate.

proiecţii e vectorul proiectat $\bar{A}$. Punînd fiecare dintre cei trei vectori-proiecţii sub forma de produs dintre versorul axei respective şi valoarea relativă a vectorului-proiecţie în raport cu versorul respectiv, se obţine din nou reprezentarea vectorului $\bar{A}$ din ultimul termen al relaţiei(5). Mărimile pozitive sau negative A_x, A_y şi A_z, obţinute în acest fel, se numesc componentele cartesiene ale vectorului $\bar{A}$, în raport cu axele Ox, Oy şi Oz ale sistemului de coordonate cartesiene. Ele sînt scalari varianţi fiindcă valorile lor variază, pentru un vector dat, odată cu sistemul de coordonate cartesiene la care se referă.

Componentele a doi vectori egali, faţă de un sistem de coordonate cartesiene, sînt respectiv egale - şi invers: dacă, într-un sistem de coordonate cartesiene, componentele a doi vectori sînt respectiv egale, vectorii sînt egali, oricare ar fi originile lor.

Componentele cartesiene ale razelor vectoare. Coordonatele cartesiene x, y, z ale unui punct P sînt componentele cartesiene ale vectorului său de poziţie sau ale razei sale vectoare $\bar{r}$, care are originea în originea sistemului de coordonate şi extremitatea în punctul P:

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z \qquad (5\,a)$$

Componentele cartesiene ale versorilor. Versorul $\bar{u}_\gamma$ al unei orientări γ se reprezintă în coordonate cartesiene sub forma:

$$\bar{u}_\gamma = \bar{i}u_{\gamma x} + \bar{j}u_{\gamma y} + \bar{k}u_{\gamma z} = \bar{i}\cos\alpha_{\gamma x} + \bar{j}\cos\alpha_{\gamma y} + \bar{k}\cos\alpha_{\gamma z} \qquad (5b)$$

unde componentele $u_{\vartheta x}$, $u_{\vartheta y}$, $u_{\vartheta z}$ sînt cosinusurile directoare $\cos\alpha_{\vartheta x}$, $\cos\alpha_{\vartheta y}$, $\cos\alpha_{\vartheta z}$, ale orientării ϑ, care formează unghiurile $\alpha_{\vartheta x}$, $\alpha_{\vartheta y}$, $\alpha_{\vartheta z}$, cu orientările pozitive ale axelor Ox, Oy respectiv Oz.

Componentele cartesiene ale unei sume de vectori Componentele sumei $\bar{S}$ a n vectori $\bar{A}_1, \bar{A}_2\ \bar{A}_3 \ldots \bar{A}_n$, în raport cu un sistem de coordonate cartesiene, se obţin cum urmează:

$$\bar{S}=\bar{i}S_x+\bar{j}S_y+\bar{k}S_z=\bar{A}_1+\bar{A}_2+\bar{A}_3+\ldots+\bar{A}_n=(\bar{i}A_{1x}+\bar{j}A_{1y}+\bar{k}A_{1z})+$$

$$+\ldots+(\bar{i}A_{nx}+\bar{j}A_{ny}+\bar{k}A_{nz})=\bar{i}(A_{1x}+A_{2x}+\ldots+A_{nx})+\bar{j}(A_{1y}+$$

$$+A_{2y}+\ldots A_{ny})+\bar{k}(A_{1z}+A_{2z}+A_{nz}).$$

Fiindcă doi vectori sînt egali numai dacă toate componentele lor cartesiene sînt respectiv egale, rezultă:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= A_{1x}+A_{2x}+A_{3x}+\ldots A_{nx}\ ; \\ S_y &= A_{1y}+A_{2y}+A_{3y}+\ldots A_{ny}\ ; \\ S_z &= A_{1z}+A_{2z}+A_{3z}+\ldots A_{nz}\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

adică suma componentelor vectoriler în raport cu o axă e egală cu componenta sumei vectorilor în raport cu ea.

Produsul scalar în componente cartesiene Produsele scalare prin ei înşăşi, ale celor trei versori $\bar{i}, \bar{j}$ şi $\bar{k}$ ai unui sistem de coordonate cartesiene au următoarele valori:

$$\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1. \qquad (7\ a)$$

fiindcă valorile absolute ale vectorilor sînt egale cu unitatea. Fiindcă $\bar{i}, \bar{j}$ şi $\bar{k}$ sînt respectiv perpendiculari unul pe altul, mai urmează

$$\bar{i}.\bar{j}=\bar{j}.\bar{k}=\bar{k}.\bar{i}=0 \qquad (7\ b)$$

Dacă se ţine seama de aceste relaţii şi de distributivitatea produsului scalar, se obţine următoarea expresiune a produsului scalar în funcţiune de componentele cartesiene ale vectorilor factori:

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = (\bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z)(\bar{i}B_x + \bar{j}B_y + \bar{k}B_z) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (7\ c)$$

Dacă se consideră cazul particular $\bar{A} = \bar{B}$ şi se ţine seama de relaţia(4 a), se deduce:

$$\bar{A}^2 = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (7\ d)$$

Expresiunea pătratului elementului de linie $d\bar{r}$, de componente cartesiene d_x d_y şi d_z, e

$$dr^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (7\ e)$$

unde s-a notat $ds = /d\bar{r}/$. fiindcă dr ar reprezenta diferenţiala valorii absolute r a razei vectoare, care are, în general, o valoare absolută mai mică decît $d\bar{r}$: $dr \leq /d\bar{r}/$

Elementele de arie dA_x, dA_y şi dA_z subîntinse de elementele de linie dy,dz; dz,dx şi dx,dy, paralele cu axele de coordonate, au următoarele expresiuni:

$$\left.\begin{aligned} dA_x &= dy \cdot dz ; \\ dA_y &= dz \cdot dx ; \\ dA_z &= dx \cdot dy ; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

iar elementul de volum determinat de aceleaşi elemente de linie e:

$$dv = dx \cdot dy \cdot dz. \quad (9)$$

<u>Componenta ortogonală A_ν a unui vector $\bar{A}$ în raport cu o orientare ν.</u> Dacă $\bar{u}_\nu$ e versorul ν, rezultă·

$$A_\nu = A\cos(\bar{u}_\nu \bar{A}) = \bar{A}\bar{u}_\nu = u_{\nu x}A_x + u_{\nu y}A_y + u_{\nu z}A_z =$$

$$= A_x\cos\alpha_{\nu x} + A_y\cos\alpha_{\nu y} + A_z\cos\alpha_{\nu z},$$

fiindcă $\bar{u}_\nu$ are, în raport cu $\bar{i},\bar{j}$ şi $\bar{k}$, componente egale cu cosinusurile directoare ale orientării. Ultima relaţie poate servi şi ca punct de plecare pentru o definiţie analitică a vectorilor.

6.4 <u>Definiţia analitică a vectorilor</u>. O mărime se numeşte vector, dacă valoarea ei scalară (componenta ei ortogonală) A_ν, în raport cu o orientare oarecare ν e o funcţiune liniară şi omogenă de cosinusurile directoare

alu orientării ν în raport cu un sistem de coordonate carteziene:

$$A_\nu = A_x \cos\alpha_{\nu x} + A_y \cos\alpha_{\nu y} + A_z \cos\alpha_{\nu z}, \quad (1o)$$

unde A_x, A_y şi A_z sînt deci, în mod necesar, valorile scalare ale vectorului după orientările Ox, Oy şi Oz ale axelor sistemului de coordonate.

Orientarea (direcţia şi sensul) unui vector e deci acea pentru care componenta lui are valoarea maximă şi pozitivă.

Relaţia (1o) poate servi şi ca punct de plecare pentru o a doua definiţie geometrică a vectorilor.

6.5. <u>A doua definiţie geometrică a vectorului</u>. O mărime se numeşte vector, dacă locul geometric al extremităţilor valorilor ei scalare A_ν, în raport cu orientările variabile ν, purtate dintr-un punct fix O în lungul acelor orientări (fig.16), e o sferă. In adevăr, componenta scalară A_ν, cu originea în O şi cu extremitatea în E_ν, a vectorului $\bar{A}$, care are originea în O şi extremitatea în E, e proiecţia ortogonală a segmentului orientat $\overline{OE}$ pe orientarea ν, adică unghiul $EE_\nu O$ e drept, şi deci locul geometric al extremităţii E_ν e o sferă.

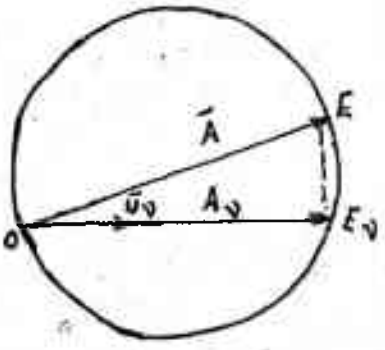


Fig. 16

Reprezentarea grafică a unui vector printr-o sferă cu originea O pe ea.

<u>Teorema proiecţiilor</u>. Inmulţind versorul $\bar{u}_\nu$ al unei orientări ν cu componenta $A_\nu = \bar{u}_\nu \bar{A}$ a unui vector $\bar{A}$ după acea orientare, se obţine:

$$\bar{u}_\nu (\bar{u}_\nu \bar{A}) = \bar{u}_\nu A_x \cos\alpha_{\nu x} + \bar{u}_\nu A_y \cos\alpha_{\nu y} + \bar{u}_\nu A_z \cos\alpha_{\nu z}; \quad (1o\,a)$$

adică vectorul proiecţie $\bar{u}_\nu A_\nu$ al unui vector oarecare $\bar{A}$, pe o orientare oarecare ν, e egal cu suma vectorilor-proiecţii pe orientarea ν ai componentelor lui $\bar{A}$ în raport cu

trei axe trirectangulare.

Cosinusul unghiului a două orientări în funcţiune de cosinusurile lor directoare. Fie $\bar{u}_\nu$ şi $\bar{u}_{\nu'}$ versorii orientărilor ν şi ν', $\cos\alpha_{\nu x}$. $\cos\alpha_{\nu y}$. $\cos\alpha_{\nu z}$ cosinusurile directoare ale orientării ν, şi $\cos\alpha_{\nu' x}$, $\cos\alpha_{\nu' y}$, $\cos\alpha_{\nu' z}$ cosinusurile directoare ale orientării ν'. Din relaţiile

$$\bar{u}_\nu = \bar{i}\cos\alpha_{\nu x} + \bar{j}\cos\alpha_{\nu y} + \bar{k}\cos\alpha_{\nu z} ;$$

$$\bar{u}_{\nu'} = \bar{i}\cos\alpha_{\nu' x} + \bar{j}\cos\alpha_{\nu' y} + \bar{k}\cos\alpha_{\nu' z}$$

rezultă pentru produsul scalar al versorilor $\bar{u}_\nu$ şi $\bar{u}_{\nu'}$ expresiunea $\bar{u}_\nu \bar{u}_{\nu'} = \cos(\bar{u}_\nu, u_{\nu'}) = \cos\alpha_{\nu x} \cdot \cos\alpha_{\nu' x} + \cos\alpha_{\nu y} \cdot \cos\alpha_{\nu' y} + \cos\alpha_{\nu z} \cdot \cos\alpha_{\nu' z}$,

care exprimă cosinusul unghiului $(\bar{u}_\nu, \bar{u}_{\nu'})$ al orientărilor ν şi ν' în funcţiune de cosinusurile directoare ale celor două orientări.

Cosinusul unghiului a doi vectori în funcţiune de componentele lor cartesiene. Fie $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ cei doi vectori şi A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z componentele lor în raport cu un sistem de coordonate cartesiene. Expresiunea produsului lor scalar e:

$$\bar{A}\bar{B} = AB\cos(\bar{A},\bar{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z ;$$

fiindcă

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{şi} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

Rezultă

$$\cos(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \qquad \text{(1o b)}$$

ceiace exprimă cosinusul unghiului celor doi vectori în funcţiune de componentele lor cartesiene.

Teorema cosinus în trigonometria plană. Fie un triunghiu oarecare, cu următoarele laturi exprimate prin vectori: $\bar{BC} = \bar{a}$, $\bar{CA} = \bar{b}$ şi $\bar{AC} = \bar{b}$. Fiindcă $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ rezultă prin înmulţirea scalară cu ei înşuşi a membrilor acestei ecuaţii: $c^2 = (\bar{a}-\bar{b})^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(a,b) =$
$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (1o c)

dacă γ e unghiul interior triunghiului dintre laturile $\bar{a}$ şi . Relaţia (1o c) constituie teorema cosinus în trigonometria plană.

6.6. Sistemele de coordonate curbilinii ortogonale. Sistemul de coordonate cartesiene poate fi considerat determinat de trei familii formate din plane paralele, planele fiecărei familii fiind perpendiculare pe planele celorlalte două familii, dacă se face convenţiunea ca fiecărui plan să i se asocieze un număr egal cu distanţa dintre el şi origine. In adevăr, astfel cele trei numere ale planelor care conscură într-un punct reprezintă coordonatele cartesiene ale punctului.

Generalizînd această reprezentare a sistemului de coordonate cartesiene se pot defini sistemele de coordonate curbilinii ortogonale. Un astfel de sistem e format din trei familii de suprafeţe, în general strîmbe, astfel încît suprafeţele fiecărei familii nu se intersectează între ele, dar intersectează ortogonal suprafeţele celorlalte două familii, dacă există o convenţiune după care se asociază biunivoc fiecărei suprafeţe un parametru scalar, intersecţiunea celor trei suprafeţe ai căror parametri sînt nuli fiind originea sistemului de coordonate (fig.17).

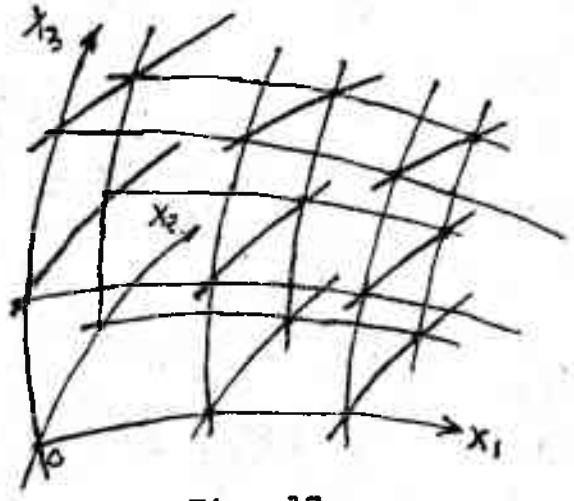


Fig. 17
Sistem drept de coordonate curbilinii triortogonale

Un sistem de coordonate curbilinii ortogonale e complect determinat de forma suprafeţelor celor trei familii şi de regula după care se asociază suprafeţelor diferitelor valori ale parametrilor. Dacă x_1, x_2 şi x_3 sînt cei trei parametri a trei suprafeţe din cele trei familii de suprafeţe, x_1 x_2 şi x_3 se numesc coordonatele punctului de intersecţiune a celor trei suprafeţe. Curbele de intersecţiune a

cîte două suprafețe care fac parte din două familii diferite se numesc curbe de coordonate. Ele sînt locurile geometrice ale punctelor pentru care cîte două coordonate sînt constante, iar una e variabilă.

In general, coordonatele x_1, x_2 și x_3 nu reprezintă distanțe ca în cazul sistemului de coordonate cartesiene, ci pot reprezenta unghiuri sau alte mărimi geometrice, putînd fi funcțiuni complicate de distanțe și depinzînd numai de poziția în spațiu a punctului pe care-l determină. Creșterile care tind către zero dx_1, dx_2 și dx_3 ale coordonatelor x_1, x_2, și x_3, nu reprezintă deci, în general, elementele de linie ds_1, ds_2, și ds_3 dintre punctele de coordonate x_1 și x_1+dx_1, x_2 și $x_2 + dx_2$ respectiv x_3 și $x_3 + dx_3$. Pentru a se obține elementele de linie, trebuie ca diferențialele coordonatelor să mai fie înmulțite cu anumite funcțiuni de coordonate: $g_1(x_1, x_2 x_3)$ $g_2(x_1, x_2, x_3)$, respectiv $g_3(x_1, x_2, x_3)$, adică:

$$ds_1 = g_1 dx_1;\ ds_2 = g_2 dx_2;\ ds_3 = g_3 dx_3 \qquad (11\ a)$$

unde nu s-au mai indicat explicit variabilele x_1, x_2 și x_3, de care depind funcțiunile g_1.

Pătratul valorii absolute a elementului de linie ds, de componente ortogonale ds_1, ds_2 și ds_3 dealungul curbelor de coordonate care trec prin punctul căruia i se atașează ds. e:

$$ds^2 = g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2 + g_3^2 dx_3^2 \ ; \qquad (11\ b)$$

elementele de arie dA_1, dA_2 și dA_3 subîntinse de ds_2 și ds_3, ds_3 și ds_1, respectiv de ds_1 și ds_2, au expresiunile:

$$dA_1 = g_2 g_3 dx_2 dx_3;\ dA_2 = g_3 g_1 dx_3 dx_1;\ dA_3 = g_1 g_2 dx_1 dx_2 \quad (11\ c)$$

iar elementul de volum dv, format de ele, are expresiunea

$$dv = g_1 g_2 g_3\ dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (11\ d)$$

Un sistem de coordonate ortogonale e determinat și dacă se cunoaște originea, orientarea axelor tangente în origine la cele trei curbe de coordonate care trec prin ea, cu sensurile pozitive în sensurile coordonatelor x_1, x_2, x_3 crescătoare, și cele trei funcțiuni caracteris-

tice g_1, g_2 şi g_3 în funcţiune de x_1, x_2 şi x_3. Sistemul poate fi drept sau stîng. Versorii sistemelor de coordonate ortogonale se notează cu $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$; ei au, în general, orientări variabile, fiind dirijaţi în fiecare punct dealungul tangentelor la curbele de coordonate care trec prin el, şi sensul coordonatelor crescătoare. Un vector $\bar{A}$, cu componente ortogonale A_1, A_2 şi A_3, după tangentele la cele trei curbe de coordonate din punctul lui de aplicaţie, se poate pune sub forma:

$$\bar{A} = \bar{u}_1 A_1 + \bar{u}_2 \bar{A}_2 + \bar{u}_3 A_3 \qquad (5\ b)$$

In cazul coordonatelor cartesiene, avem $g_1=1$; $g_2=1$ şi $g_3=1$.

Dintre sistemele de coordonate ortogonale se foloseşe în tehnică mai ales sistemele de coordonate cilindrice sau semipolare, şi sferice sau polare în spaţiu.

6.7. <u>Sistemul de coordonate cilindrice sau semipolare (z, r, α)</u>. Acest sistem se obţine prin următoarea alegere a suprafeţelor de coordonate: Prima familie o formează un sistem de plane paralele, indicate prin distanţa lor z dela un plan origine : $x_1 = z$; a doua familie o formează un sistem de cilindri coaxiali, cu axa perpendiculară pe planele z = constant şi indicate prin razele lor r, adică $x_2 = r$; a treia familie o formează un sistem de plane care trec prin axa comună a cilindrilor şi sînt indicate prin unghiul α, pe care-l formează cu un plan, ales ca origine: $x_3 = \alpha$ (Fig.18). Rezultă deci, în acest caz,:

$$\begin{aligned} ds_1 &= ds_z = dz\ ; \\ ds_2 &= ds_r = dr\ ; \\ ds_3 &= ds_\alpha = r\,d\alpha; \end{aligned} \qquad (11\ e)$$

adică:

$$g_1 = g_z = 1;\ g_2 = g_r = 1;\ g_3 = g_\alpha = r. \qquad (11\ f)$$

Expresiunea pătratului elementului de linie în coordonate cilindrice e deci:

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 (d\alpha)^2 \qquad (11\ g)$$

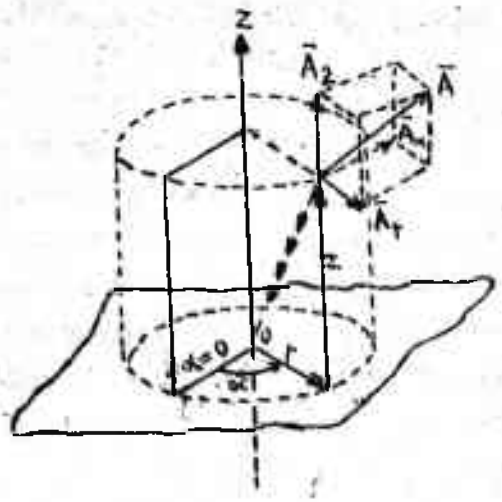


Fig.18

Sistem de coordonate cilindrice

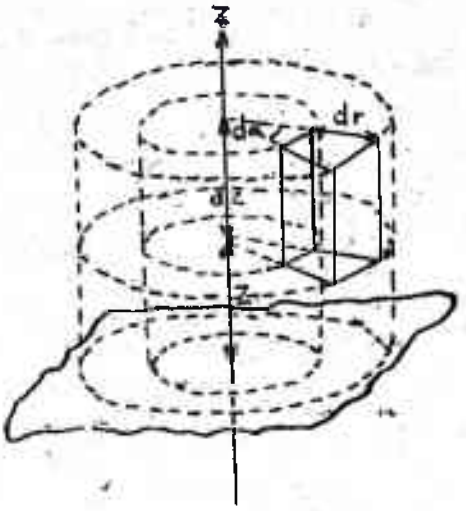


Fig.19

Elementul de volum în sistemele de coordonate cilindrice.

Elementele de arie dA_α, dA_z, şi dA_r, subîntinse de elementele de linie din lungul curbelor de coordonate dz,dr; dr, rdα, şi rdα, dz, au următoarele expresiuni:

$$\begin{aligned} dA_\alpha &= dz \cdot dr \\ dA_z &= dr.r.d\alpha \\ dA_r &= r.d\alpha \cdot dz \end{aligned} \qquad (11\ h)$$

şi elementul de volum determinat de elementele de linie dz,dr şi rdα (fig. 19) e :

$$dv = rdz \cdot dr. d\alpha \qquad (11\ i)$$

Versorii sistemului de coordonate cilindrice se notează cu $\bar{u}_z$,$\bar{u}_r$ şi $\bar{u}_\alpha$.Versorul $\bar{u}_z$ are orientare fixă; versorii $\bar{u}_r$ şi $\bar{u}_\alpha$ au orientări variabile

$\bar{u}_r$ fiind dirijat în fiecare punct după r corespunzător iar $\bar{u}_\alpha$ fiind tangent, în fiecare punct P, la cercul de rază r din planul z = constant, care trece prin P şi are centrul pe axa Z. Un vector $\bar{A}$, de componente ortogonale A_z,A_r A_α în raport cu axa z, cu raza vectoare r şi cu tangenta la cercul z = constant care trece prin originea lui $\bar{A}$ şi are centrul pe axa r=0, se poate pune sub forma:

$$\bar{A} = \bar{U}_z A_z + \bar{u}_r A_r + \bar{u}_\alpha A_\alpha \qquad (5\ e)$$

6.8 Sistemul de coordonate sferice sau polare (r, ϑ, α). Sistemul se obţine prin următoarea alegere a suprafeţelor de coordonate : Prima familie e formată din sfere concentrice de rază r adică $x_1 = r$; a doua familie e formată din suprafeţe conice circulare coaxiale, cu vîrf, în centrul sferelor şi de deschideri 2ϑ, indicate prin unghiurile ϑ dintre generatoare şi axa lor: $x_2 = \vartheta$; a treia familie e formată din plane meridiane cari trec prin axa comună a suprafeţelor conice şi sînt indicate prin unghiul α pe care-l formează cu un plan ales ca origine : $x_3 = \alpha$ (fig.2o) Rezultă deci în acest caz

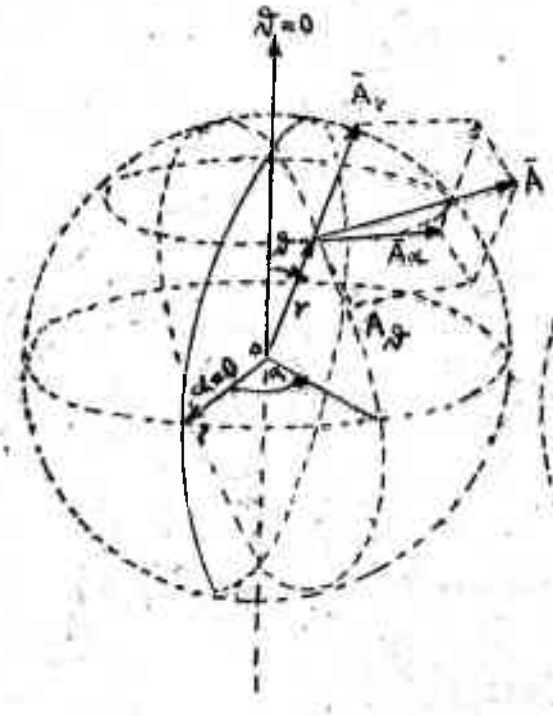


Fig.2o
Sistem de coordonate sferice

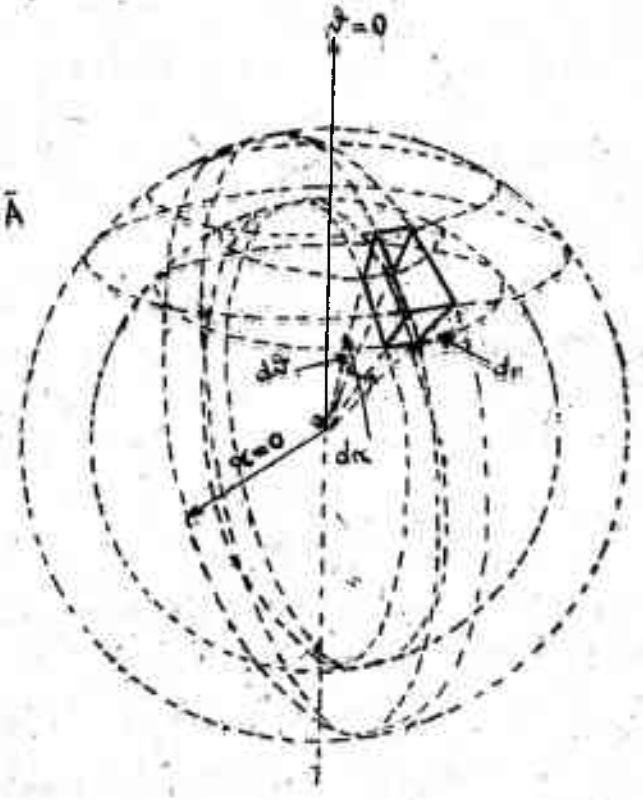


Fig.21
Elementul de volum în sistemele de coordonate sferice.

$$ds_1 = ds_r = dr\ ;$$
$$ds_2 = ds_\vartheta = r\,d\vartheta\ ; \qquad (11\ j)$$
$$ds_3 = ds_\alpha = r.\sin\vartheta\,.d\alpha$$

şi deci:

$$g_1 = g_r = 1;\ g_2 = g_\vartheta = r;\ g_3 = g_\alpha = r.\sin\vartheta \qquad (11\ k)$$

Expresiunea pătratului elementului de linie în coordonate sferice o deci:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + r^2 \sin^2\vartheta (d\alpha)^2 \quad (11\ l)$$

şi expresiunile elementelor de arie dA_α, dA_r şi dA_ϑ, subînţelese de elementele de linie din lungul curbelor de coordonate dr, $rd\vartheta$, $rd\vartheta$ şi $r \sin\vartheta\ d\alpha$ şi $r \sin\vartheta d\alpha$, dr sînt:

$$\begin{aligned} dA_\alpha &= r\ dr\ d\vartheta ; \\ dA_r &= r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\alpha ; \qquad (11\ m) \\ dA_\vartheta &= r \sin\vartheta\ d\alpha\ dr ; \end{aligned}$$

iar expresiunea elementului de volum format de aceste elemente de linie dr, $rd\vartheta$ şi $r \sin\vartheta d\alpha$ (Fig.21) e:

$$dv = r^2 \sin\vartheta\ dr.\ d\vartheta.\ d\alpha \quad (11\ n)$$

Versorii sistemului de coordonate sferice se notează cu $\bar{u}_r, \bar{u}_\vartheta, \bar{u}_\alpha$ sînt dirijaţi într-un punct P, cum se indică în Fig.2c, şi au o orientare care variază cu P. Un vector $\bar{A}$, de componente ortogonale A_r, A_ϑ, A_α în raport cu orientările versorilor $\bar{u}_r, \bar{u}_\vartheta, \bar{u}_\alpha$ din originea sa, se poate pune sub forma:

$$\bar{A} = \bar{u}_r A_r + \bar{u}_\vartheta A_\vartheta + \bar{u}_\alpha A_\alpha \qquad (5\ d)$$

Dacă deplasăm un vector $\bar{A}$ paralel cu el însuşi componentele vectorului în coordonate cartesiene : A_x, A_y, A_z nu se schimbă, pe cînd componentele lui în coordonate curbilinii (de ex, cilindrice sau sferice) se schimbă, în general, toate sau în parte. Doi vectori sînt egali, cînd componentele lor omoloage în coordonate cartesiene sînt respectiv egale, chiar dacă ei nu au acelaşi punct de aplicaţie. Doi vectori nu sînt în general, egali, chiar dacă componentele lor curbilinii sînt respectiv egale şi anume dacă nu au acelaşi punct de aplicaţie, iar vectorii egali şi cu puncte de aplicaţie diferite au, în general, în coordonate curbilinii, componente care nu sînt respectiv egale. Numai cînd au acelaşi punct de aplicaţie. egalitatea componentelor lor omoloage exprimă şi egalitatea vectorilor.

7. PRODUSUL VECTORIAL A DOI VECTORI

7.1. Vectorul arie al unui poligon. Fie o curbă plană

închisă Γ şi A aria suprafeţei plane închise de ea (Fig.22 a) Ariei plane A i se poate asocia în mod biunivoc direcţia normală pe planul ei, dar nu i se poate asocia biunivoc un sens pe această direcţie. Aria plană închisă de proiecţia Γ' a curbei închise Γ, pe un plan oarecare P, e egală cu produsul ariei A prin cosinusul unghiului α dintre normalele pe aria A şi pe planul P.Din punctul de vedere al valorilor absolute ale proiecţiilor ei,o arie plană se comportă deci ca un vector care are direcţia normală pe planul ei şi căruia i se consideră proiecţiile pe normalele planelor pe care se proiectează aria. Pentru a se putea opera cu ariile plane ca şi cu vectorii, se foloseşte următorul artificiu : Se alege pe curba plană închisă Γ un sens de circulaţie pozitiv (Fig.22 a), iar pe normala pe planul curbei se asociază sensului pozitiv circulaţie un sens pozitiv de înaintare, după regula burghiului drept. Acesta e sensul în care ar înainta un burghiu drept (Fig.23 a) dacă ar fi rotit în sensul pozitiv de circulaţie de pe curba Γ . Se asociază apoi ariei plane A un vector $\bar{A}_n$ care are valoarea absolută A, direcţia normală pe planul ariei, şi sensul pozitiv de pe normală asociat, după regula burghiului drept sensului pozitiv de circulaţie de pe curba închisă Γ. Vectorul $\bar{A}_n$ determinat în acest fel poate reprezenta aria plană, şi se numeşte vectorul arie al curbei plane închise şi dotate cu un sens pozitiv de circulaţie Γ, sau al ariei plane închise de curbă(Fig.22 a).Curba proiecţie Γ' a curbei Γ pe un plan P

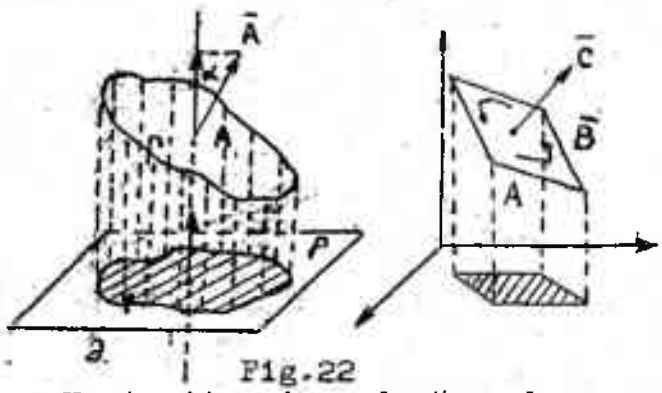


Fig.22
Vectorii arie a două curbe plane închise

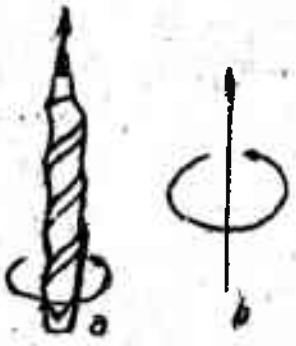


Fig.23
Burghiu drept(fig.23 a) şi regula burghiului drept pentru asociaţia sensurilor pozitive de circulaţie şi de înaintare(fig.23 b).

are astfel un vector arie a cărui valoare absolută e egală cu proiecţia ariei A pe planul P; acest vector e normal pe planul P şi e dirijat în sensul pozitiv de înaintare care se asociază după regula burghiului drept, sensului pozitiv de circulaţie împreună cu care se proiectează curba Γ pe planul P (Fig.22 a). El e egal cu vectorul - proiecţie al vectorului arie A_Γ al curbei Γ pe normala planului P. Dacă se dotează şi planul P cu un sens de circulaţie pozitiv, şi acest sens coincide cu sensul pozitiv de circulaţie pe curba-proiecţie Γ. scalarul proiecţie al ariei A pe planul P trebuie contat pozitiv; altfel scalarul proiecţie trebuie contat negativ. In adevăr, dacă sensului de circulaţie pozitiv al planului P i se asociază, după regula burghiului drept, un versor $\bar{u}_p$ pe normala produsului P, produsul scalar $\bar{A}_\Gamma \bar{u}_p$ e pozitiv în primul caz şi negativ în cel de al doilea caz.

Pentru a putea opera cu ariile plane ca şi cu vectorii, mai trebuie ca prin "suma" a două arii plane să se înţeleagă aria plană asociată vectorului sumă al vectorilor arii ale ariilor de adunat, în felul în care o arie se asociază vectorului ei arie. - Mai trebuie observat că vectorul arie nu caracterizează complect suprafaţa plană care are aria căreia i se asociază, fiindcă e independent de forma conturului ei, şi că vectorul arie e un vector liber.

Regulile stabilite mai sus permit să se determine şi vectorul arie al unei linii poligonale închise care nu e plană Γ_n, dacă se înţelege prin vectorul ei arie suma vectorilor arii ale oricăror arii plane (poligonale) ce formează o suprafaţă poliedrică deschisă care are conturul Γ_n (Fig.24). In acest scop sensul pozitiv de circulaţie pe linia poligonală închisă trebuie extins astfel asupra muchiilor suplimentare care determină suprafaţa poliedrică deschisă, încît toate feţele ei să aibă normalele pozitive dirijate spre o aceiaşi faţă a suprafeţei (Fig.24). Astfel, fiecare muchie are un sens pozitiv pentru una din feţele care se intersectează în ea, şi alt sens pozitiv pentru cealaltă dintre feţe. Suma

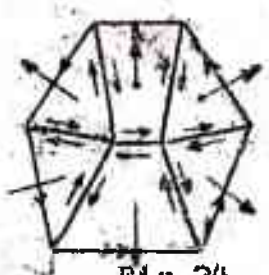


Fig.24.
Suprafaţa poliedrică deschisă limitată de o linie poligonală

vectorilor arii ai acestor fețe e vectorul arie al liniei poligonale închise, care nu trebuie să fie plană. El e independent de forma dimensiunile și numărul fețelor care formează suprafața poliedrică deschisă care se prijine pe linia poligonală închisă. In adevăr, suma ariilor proiecții ale fețelor suprafeței poliedrice deschise, pe un plan oarecare, e egală cu aria plană din interiorul proiecției, pe plan a liniei poligonale de contur a acelei suprafețe, adică nu depinde de celelalte elemente ale suprafeței poliedrice. Rezultă că vectorul arie al unei suprafețe poliedrice închise și cu n fețe, ale căror fețe au vectorii arie $\bar{A}_1$ $\bar{A}_2$... $\bar{A}_n$, e nulă, dacă acești vectori sînt dirijați toți de exemplu după normalele exterioare ale fețelor:

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \ldots \bar{A}_n = 0 \qquad (12\ k)$$

Se observă că asocierea sensurilor pozitive de rotație și translație după regula burghiului drept se obține asociind sensului pozitiv al axei Oz a unui sistem drept de coordonate sensul în care trebuie rotită axa Ox a sistemului, pentru a a junge pe drumul cel mai scurt omeparalelă cu axa Oy. Regula burghiului drept se asociază sistemelor drepte de coordonate în felul în care regula burghiului stîng se asociază sistemelor stîngi de coordonate.

In cazul particular al unui paralelogram (fig. 22 b) sensul de circulație e determinat de vectorii $\bar{A}$ și $\bar{B}$ care reprezintă două laturi neparalele ale paralelogramului daca laturile sînt alese astfel, încît extremitatea primului vector ($\bar{A}$) să coincidă cu originea celui de al doilea ($\bar{B}$). In acest caz, regula burghiului drept asociază sensului pozitiv de circulație pe conturul paralelogramului un vector C, normal pe planul lui, astfel încît vectorii $\bar{A}$, $\bar{B}$ și $\bar{C}$ să formeze în această ordine, un sistem drept de axe de coordonate. Aria paralelogramului fiind AB sin (A,B) vectorul arie C, asociat paralelogramului cu sensul pozitiv de circulație definit de vectorii - laturi $\bar{A}$ și $\bar{B}$, are expresiunea

$$\bar{C} = \bar{u}_n \, AB \, . \, /\sin (A,B)/,$$

unde vectorul $\bar{u}_n$ e normal pe planul determinat de vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ şi formează, împreună cu ei, un sistem drept de axe de coordonate, în ordinea $\bar{A},\bar{B}\ \bar{u}_n$. Fiindcă în calcule se pune adesea problema de a construi, din doi vectori daţi $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, un nou vector $\bar{C}$, care se obţine din ei în felul în care se obţine vectorul arie $\bar{G}$ al unui paralelogram din vectorii laturi $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ ai lui, este util să se definească un nou produs a doi vectori, deosebit de produsul lor scalar numit produs vectorial şi care să reprezinte operaţia de construirii vectorului $\bar{C}$ din vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$.

7.2. Definiţia produsului vectorial. Produsul vectorial al unui vector $\bar{A}$ printr-un vector $\bar{B}$ e un vector $\bar{C}$ cu valoarea absolută AB./ sin (A,B)/, perpendicular pe plănul determinat de vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, şi cu sensul ales astfel, încît vectorii $\bar{A},\bar{B}$ şi $\bar{C}$ să determine, în această ordine, un sistem drept de axe.

Simbolul produsului vectorial e semnul înmulţirii x între vectorii factori. Produsul vectorial $\bar{C}$ a doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$:

$$\bar{C} = \bar{u}_n . A.B\ /\sin (A,B)/ \qquad (12)$$

unde $\bar{u}_n$ e versorul normal pe planul determinat de A şi B, şi $\bar{u}_n$ să formeze un sistem drept de axe, se notează deci sub forma

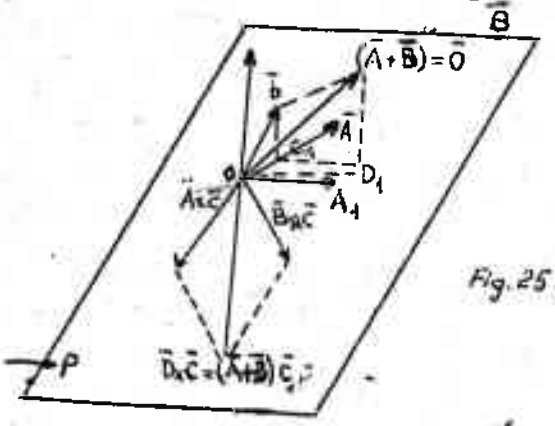
$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B},$$

adică:

$$A \times B = \bar{u}_n . AB/\sin(A,B)/.$$

Produsul vectorial satisface, afară de legile efectuabilităţii nelimitate şi a unicităţii următoarea lege: Distributivitatea faţă de suma vectorială :$(\bar{A}+\bar{B})\times\bar{C}=$ $\bar{A} \times \bar{C} + \bar{B} \times \bar{C}$. Un produs vectorial $\bar{D} \times \bar{C}$ se obţine înmulţind valoarea absolută C cu proiecţia D./sin($\bar{D}$,C)/ a vectorului $\bar{D}$ pe un plan P, perpendicular pe $\bar{C}$, şi construind vectorul care are această valoare absolută, perpendicular în sens drept pe $\bar{D}$ şi $\bar{C}$. Dacă se proiectează pe planul P, perpendicular pe $\bar{C}$, paralelogramul construit pe $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ (Fig 25 a) proiecţiile $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ şi $\overline{OD}$ ale vectorilor $\bar{A},\bar{B}$ şi $(\bar{A}+\bar{B})$

formează cele două laturi și diagonala unui paralelogram. Dacă se mărește dimensiunile lui în raportul /C/ și se rotește paralelogramul-proiecție cu un unghiu drept, se obține un nou paralelogram, în care două laturi orientate reprezintă produsele vectoriale $\bar{A}x\bar{C}$ și $\bar{B}x\bar{C}$, iar diagonala orientată, produsul vectorial $(\bar{A} + \bar{B}) \times \bar{C}$. Cum diagonala orientată e suma vectorială a celor două laturi orientate, rezultă că produsul vectorial e distributiv.



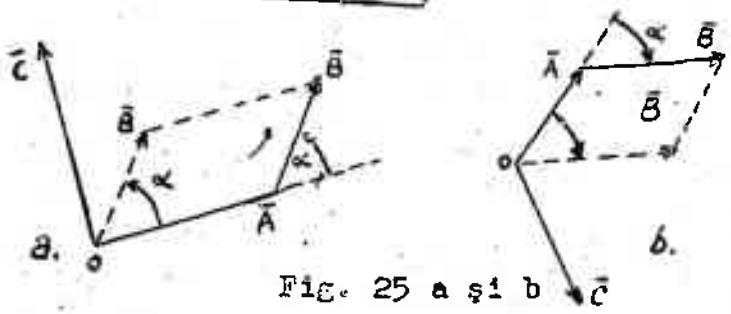


Fig. 25 a și b
Produsul vectorial a doi vectori

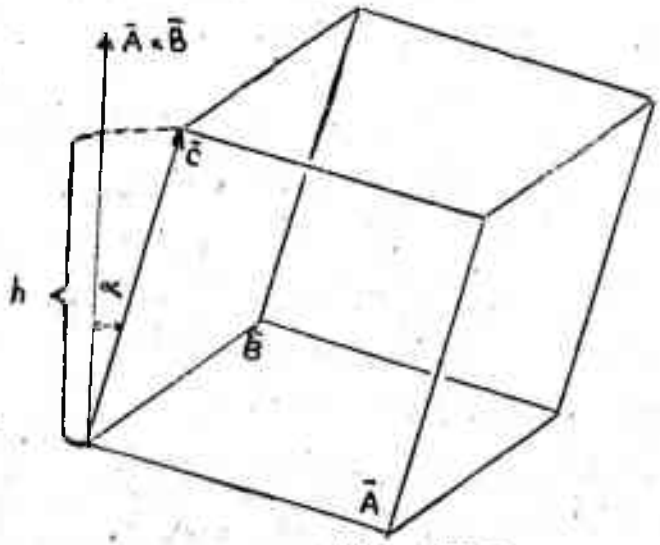


Fig. 25 c
Produsul mixt a trei vectori

Produsul vectorial a doi vectori nu e comutativ, adică verifică relația $\bar{A}x\bar{B} \neq \bar{B} \times \bar{A}$. Cu ajutorul regulii burghiului drept se deduce $\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$. adică produsul vectorial își schimbă semnul dacă se schimbă ordinea factorilor: Se spune că produsul vectorial e anticomutativ. De aceea ordinea factorilor din produsele vectoriale nu poate fi schimbată, iar dacă se schimbă ordinea lor, trebuie schimbat și semnul din fața produsului.

7.3. <u>Produse vectoriale particulare</u> Dacă doi vectori

$\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt paraleli, sau antiparaleli, sinusul unghiului dintre ei e nul, adică produsul lor vectorial e nul

$$\bar{A} \times \bar{B} = 0 \qquad (12\ a)$$

Reciproc dacă $\bar{A} \times \bar{B} = 0$, cei doi vectori nenuli $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt fie paraleli, fie antiparaleli.

Dacă doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt perpendiculari unul pe altul, sinusul unghiului dintre ei e egal cu unitatea, şi valoarea absolută a produsului lor vectorial e egal cu produsul valorilor lor absolute:

$$/\bar{A} \times \bar{B}/ = AB. \qquad (12\ b)$$

Reciproc, dacă $/\bar{A} \times \bar{B}/ = AB$, cei doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ sînt perpendiculari unul pe altul.

Produsele vectoriale ale versorilor axelor sistemelor de coordonate cartesiene au deci următoarele valori:

$$\left.\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{i} &= 0; \\ \bar{j} \times \bar{j} &= 0; \\ \bar{k} \times \bar{k} &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (12\ c) \qquad \left.\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{j} &= \bar{k} \\ \bar{j} \times \bar{k} &= \bar{i} \\ \bar{k} \times \bar{i} &= \bar{j} \end{aligned}\right\} \qquad (12\ d)$$

7.4. <u>Produsul vectorial în componente cartesiene</u>

Produsul vectorial fiind distributiv, se poate pune succesiv:

$$\bar{A} \times \bar{B} = (\bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z) \times (\bar{i}B_x + \bar{j}B_y + \bar{k}B_z) =$$

$$= \bar{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \bar{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \bar{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

Produsul vectorial se poate pune şi sub următoarea formă de determinat, uşor de reţinut:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (12\ e)$$

7.5. <u>Produsul mixt a trei vectori</u> In componente cartesiene, expresiunea produsului scalar al unui vector prin produsul vectorial al altor doi vectori se poate pune succesiv sub formele:

$$\bar{A}\cdot(\bar{B} \times \bar{C}) = (\bar{i}A_x + \bar{j}A_y + \bar{k}A_z) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (12\ f)$$

Fiindcă valoarea determinatului nu se schimbă cînd se face o permutaţie ciclică a liniilor lui, rezultă şi relaţia :

$$\bar{A}.(\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{C}.(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}.(\bar{C}\times\bar{A}) \qquad (12\ g)$$

Pe cei trei vectori $\bar{A}$, $\bar{B}$ şi $\bar{C}$ ca muchii, se poate construi un paralelepiped (Fig.25 a). Dacă $\bar{B}$ şi $\bar{C}$ formează o bază, produsul vectorial $\bar{B}\times\bar{C} = \bar{P}$ reprezintă vectorul arie la bazei lui, iar produsul scalar $\bar{A}(\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{A}\bar{P} = A.P\cos(\bar{A}\bar{P})$ în care $A\cos(A,\bar{P})$ reprezintă înălţimea paralelepipedului, este expresiunea volumului lui. Cum şi vectorii $\bar{A}$ cu $\bar{B}$ respectiv $\bar{A}$ cu $\bar{C}$, pot fi consideraţi ca formînd baza paralelelipedului urmează că toate cele trei produse din egalitatea (12 g) reprezintă acelaşi volum, ceea ce interpretează intuitiv relaţia (12 g)

7.6. <u>Dublul produs vectorial</u>. Pentru a deduce în componente cartesiene, expresiunea produsului vectorial al unui vector $\bar{A}$, prin produsul vectorial al altor doi vectori $\bar{B}$ şi $\bar{C}$, trebuie calculată întîi componenta x a produsului $\bar{P} = \bar{A}\wedge(\bar{B}\times\bar{C})$ Se poate pune succesiv

$$P_x = A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z) = B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) -$$

$$C_x(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = B_x(\bar{A}\bar{C}) - C_x(\bar{A}\bar{B})$$

Se schimbă analog:

$$P_y = B_y(\bar{A}\bar{C}) - C_y(\bar{A}\bar{B}) \ ; \qquad P_z = B_z(\bar{A}\bar{C}) - C_z(\bar{A}\bar{B})$$

şi deci:

$$\bar{P} = \bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{B}(\bar{A}\bar{C}) - \bar{C}(\bar{A}\bar{B}) \qquad (12\ h)$$

7.7. <u>Produsul scalar a două produse vectoriale</u> Pentru a calcula un produs scalar de forma $(\bar{A}\times\bar{B}).(\bar{C}\times\bar{D})$, se poate considera produsul $\bar{A}\times\bar{B} = \bar{E}$ ca vector, şi se pot aplica rezultatele din ultimele relaţii Se obţine succesiv:

$$(\bar{A}\times\bar{B}).(\bar{C}\times\bar{D}) = \bar{E}(\bar{C}\times\bar{D}) = \bar{C}(\bar{D}\times\bar{E})$$

fiindcă: $\bar{D}\times\bar{E} = \bar{D}\times(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{A}(\bar{B}\bar{D}) - \bar{B}(\bar{A}\bar{D})$

rezultă $(\bar{A}\times\bar{B})(\bar{C}\times\bar{D}) = (\bar{A}\bar{C})(\bar{B}\bar{D}) - (\bar{B}\bar{C})(\bar{A}\bar{D})$

7.8. <u>Suma vectorială a vectorilor arie ai feţelor unui poliedru</u>. Notînd cu $\bar{A}$, $\bar{B}$ şi $\bar{C}$ vectorii muchiilor

orientate care concură într-un vîrf al unui tetraedru (fig 26) vectorii arie ai celor trei feţe triunghiulare care se întîlnesc în vîrf sînt reprezentate de semiprodusele vectoriale ale vectorilor muchiilor care le limitează ca jumătăţi de paralelograme;

$$\frac{1}{2}\ \bar{A} \times \bar{B}\ ;\ \frac{1}{2}\ \bar{B} \times \bar{C}\ ;\ \frac{1}{2}\ \bar{C} \times \bar{A}.$$

iar a patra faţă de semiprodusul vectorial:

$$\frac{1}{2}\ (\bar{C} - \bar{A}) \times (\bar{B} - \bar{A})$$

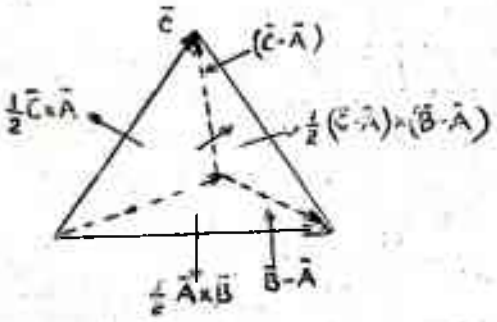


Fig.26 -
Vectorii arie ai feţelor unui tetraedru

Desvoltînd şi adunînd cele patru semiproduse, se obţine o sumă nulă, Fiecare poliedru se poate descompune însă, prin secţiuni potrivite în tetraedre. Suma vectorială a vectorilor arie ai feţelor fiecăruia dintre tetraedre, care sînt îndreptaţi după normalele lor exterioare, fiind nulă suma vectorilor arie ai feţelor tuturor tetraedrelor e iarăşi nulă. Observînd că vectorii arie al secţiunilor practicate spre a descompune poliedrul în tetredre alăturate, intervin de două ori în sumă şi anume cu sensuri contrare, fiindcă sînt dirijaţi pentru fiecare tetraedru, după normala lui exterioară, se deduce că şi numai suma vectorilor arie $\bar{A}$, ai feţelor exterioare care limitează un poliedru e nulă:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i = 0 \qquad (12\ j)$$

ceea ce demonstrează riguros relaţia (12 k).

8.-VECTORI POLARI SI VECTORI AXIALI

Vectorul deplasare diferă din anumite puncte de vedere, de vectorul arie al unei curbe închise, care se asociază după regula burghiului drept unui sens pozitiv de circulaţie în lungul acelei curbe. In adevăr fie o curbă

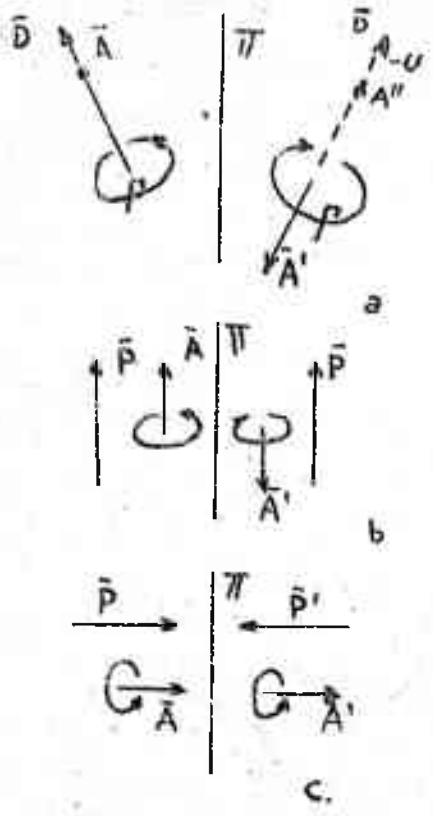


Fig.27
Vectori polari şi vectori axiali.

închisă Γ, dotată cu un sens pozitiv, şi fie $\bar{A}$ vectorul ei arie, şi $\bar{D}$ un vector deplasare omoparalel cu $\bar{A}$. Fie Π un plan faţă de care se construeşte simetrica Γ' a curbei Γ ca într-o oglindă cu sensul pozitiv care rezultă prin oglindire (Fig.27 a) Curbei Γ' i se asociază (după regula burghiului drept) vectorul arie $\bar{A}$ egal în valoare absolută cu $\bar{A}$, dar care nu e simetricul geometric $\bar{A}''$ al vectorului deplasare $\bar{A}$ în raport cu planul Π. Cu toate acestea, vectorul arie $\bar{A}'$, aparţinînd simetricei Γ' trebuie considerat "simetricul" vectorului arie $\bar{A}$ al curbei Γ. Spre deosebire de această relaţie simetricul $\bar{D}'$ al vectorului deplasare $\bar{D}$ e simetricul geometric al vectorului $\bar{D}$ în raport cu planul Π.

Un vector deplasare $\bar{D}$, omoparalel cu vectorul arie $\bar{A}$ al unei curbe închise Γ, asociat după regula burghiului drept unui sens pozitiv de circulaţie pe acea curbă, diferă deci de vectorul arie $\bar{A}$ prin faptul că simetricul vectorului deplasare în raport cu un plan e egal şi de sens contrar cu "simetricul" vectorului arie în raport cu planul. Un vector $\bar{P}$, al cărui "simetric" în raport cu un plan e omoparalel cu simetricul geometric al unui vector deplasare $\bar{D}$ omoparalel cu $\bar{P}$, se numeşte vector polar. Un vector $\bar{A}$, al cărui " simetric" în raport cu un plan Π e antiparalel cu simetricul geometric al unui vector deplasare $\bar{D}$ omoparalel cu $\bar{A}$, se numeşte vector axial. "Simetricul" $\bar{P}'$ al unui vector polar $\bar{P}$ e omoparalel cu el, după cum e considerat în raport cu un plan Π paralel cu $\bar{P}$, respectiv perpendicular pe el (Fig.27 b), iar "simetricul" $\bar{A}$ al unui vector axial $\bar{A}$ e antiparalel cu vectorul iniţial $\bar{A}$, respectiv omoparalel cu el, după cum e considerat în raport cu un plan Π para-

lel cu $\bar{A}$, respectiv perpendicular pe el (Fig.27 c)

Deplasarea rectilinie, viteza liniară şi forţa sunt exemple de vectori polari. Vectorul arie, viteza unghiulară şi momentul unei forţe sînt exemple de vectori axiali.

In general, produsul vectorial a doi vectori care sînt fie ambii polari, fie ambii axiali, e un vector axial, iar produsul vectorial a doi vectori, dintre care unul e polar iar celălalt e axial, e un vector polar.

Deosebirea între vectorii polari şi vectorii axiali apare în componentele lor ortogonale, cînd se trece dela un sistem drept de coordonate la un sistem stîng, prin inversarea sensurilor pozitive ale tuturor axelor de coordonate. Pentru aceasta trebuie observat că, din punctul de vedere al expresiunilor analitice în mărimi scalare, sistemului drept îi corespunde asocierea sensurilor pozitive după regula burghiului drept, iar sistemului stîng îi corespunde asocierea sensurilor pozitive după regula burghiului stîng. Dacă se pune, de exemplu, condiţiunea ca produsul vectorial $\bar{C}$ a doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ să aibă aceeaşi expresiune în funcţiune de coordonate:

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y;\ C_y = A_z B_x - A_x B_z\ ;\ C_z = A_x B_y - A_y B_x,$$

vectorul redus, care are aceste componente, e asociat vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ după regula burghiului drept dacă se consideră în expresiuni componentele vectorilor factori în raport cu un sistem drept de coordonate şi e asociat vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ după regula burghiului stîng dacă se consideră în expresiunile de mai sus componentele vectorilor factori în raport cu un sistem stîng de coordonate.

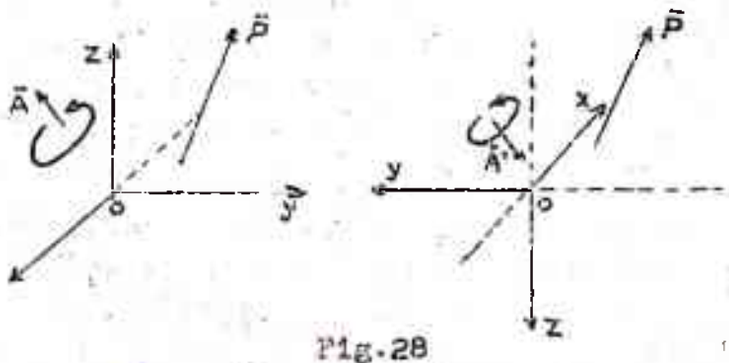


Fig.28

Vectori polari şi axiali, raportaţi la sisteme de coordonate drept (a) şi stîng (b)

Fie deci un vector polar $\bar{P}$ şi vectorul axial $\bar{A}$ reprezentat de vectorul arie al unei curbe închise /

raportaţi la un sistem drept de coordonate (fig.2° , Si fie acelaşi vector polar $\bar{P}$ şi vectorul axial $\bar{A}'$ reprezentat de vectorul arie al aceleiaşi curbe închise/ dar raportaţi la sistemul stîng de coordonate, obţinut prin inversarea sensurilor pozitive ale tuturor axelor de coordonate (fig.28 b) Asociaţiile sensurilor pozitive ale vectorilor arie cu sensul pozitiv de circulaţie pe curba/ fiind făcute după reguli diferite, rezultă că, la trecerea de la sistemul drept de coordonate la sistemul stîng, sau invers, prin inversarea sensurilor pozitive pe axe, se schimbă semnele componentelor vectorilor polari şi nu se schimbă semnele componentelor vectorilor axiali. Din această proprietate a vectorilor rezultă din nou, direct, că produsul vectorial a doi vectori care sînt ambii polari sau ambii axiali e un vector axial. şi că produsul vectorial a doi vectori dintre care unul e polar şi unul e axial este un vector polar.

Viteza şi forţa sînt exemple de vectori polari. Viteza unghiulară şi momentul static al unei forţe sînt exemple de vectori axiali.

Si scalarii se împart în două clase, cari corespund claselor de vectori polari şi vectori axiali. Un scalar se numeşte scalar propriu zis, dacă semnul lui e acelaşi, indiferent dacă e raportat la un sistem drept sau la un sistem stîng de coordonate. Un scalar se numeşte pseudoscalar dacă îşi schimbă semnul cînd, prin inversarea sensurilor pozitive ale axelor de coordonate, se trece dela un sistem drept la un sistem stîng de coordonate, sau invers. Masa inertă şi produsul scalar a doi vectori care sînt ambii polari sau ambii axiali sînt scalari propriu zişi; volumul şi produsul scalar a doi vectori dintre care unul e polar şi celălalt de axial, e un pseudoscalar. In adevăr, la trecerea de la unul din genurile de sisteme de coordonate la celălalt, se schimbă în expresiunea $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ a produsului scalar a doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, numai semnul componentelor vectorilor polari.

Produsul unui vector printr-un scalar menţine deci caracterul vectorului. Produsul unui vector printr-un pseudoscalar schimbă însă caracterul vectorului din polar în axial sau invers.

9. FUNCTIUNI SI CIMPURI DE SCALARI SI DE VECTORI

9.1. Derivatele funcţiunilor vectoriale de variabile scalare. Un vector $\bar{G}$ e funcţiune vectorială de n variabile scalare $x_1, x_2 \ldots x_n$, cînd fiecărui sistem de valori ale celor n variabile independente îi corespunde una sau mai multe valori bine determinate pentru $\bar{G}$. Se scrie:

$$\bar{G} = \bar{G}(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

O funcţiune vectorială se poate reprezenta şi prin cele trei componente ale ei într-un sistem de coordonate, care sînt funcţiuni scalare. Funcţiunea $\bar{G}$ se poate reprezenta într-un sistem de coordonate ortogonale din componentele ei, aşa încît:

$$\bar{G}_1 = \bar{G}_1(x_1, x_2 \ldots x_n); G_2 = G_2(x_1, x_2 \ldots x_n), \; G_3 = G_3(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

$$\bar{G}(x_1 x_2, x_3, \ldots x_n) = \bar{u}_1 G_1(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) + \bar{u}_2 G_2(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)$$

$$+ \bar{u}_3 G_3(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n).$$

Dacă se menţin constante valorile $x_2 x_3 \ldots x_n$ şi se dă o creştere Δx_1 variabilei x_1 se obţine un vector $\bar{G}$ în general diferit de $\bar{G}$ de mai sus

$$\bar{G} = \bar{G}(x_1 + \Delta x_1 \; x_2 \ldots x_n).$$

Figura 29 reprezintă cei doi vectori împreună cu diferenţa lor $\Delta_1 \bar{G} = \bar{G}' - \bar{G}$. Dacă se împarte $\Delta_1 \bar{G}$ prin creşterea corespunzătoare Δx_1 a lui x_1 se obţine un nou vector de direcţia lui $\Delta_1 \bar{G}$ care se numeşte cîtul parţial de diferenţe al lui $\bar{G}$ în raport cu x_1:

$$\frac{\Delta_1 \bar{G}}{\Delta x_1} = \frac{\bar{G}(x_1 + \Delta x_1, x_2 \ldots x_n) - \bar{G}(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\Delta x_1}$$

Dacă acest cît de diferenţe tinde pentru $\Delta x_1 \to 0$ către o valoare finită şi bine determinată se spune că $\bar{G}$ admite o derivată parţială (vectorială) de ordinul întîi în raport cu x_1, care se notează sub forma:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_1} \lim \frac{\bar{G}(x_1 + \Delta x_1, x_2 \ldots x_n) - \bar{G}(x_1, x_2 \ldots x_n)}{\Delta x_1}$$

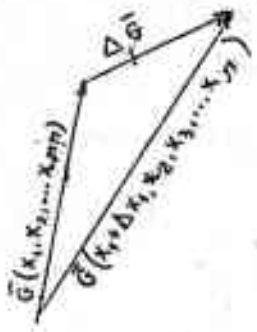


Fig.29

Figură pt.calculul derivatelor parţiale ale funcţiunilor vectoriale de variaţiile scalare.

Derivatele de ordin superior se definesc succesiv, în acelaşi fel. Derivata unei sume de funcţiuni vectoriale e egală cu suma derivatelor funcţiunilor:

$$\frac{\partial(\bar{F}+\bar{G})}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_1}$$

Derivata unui produs de n funcţiuni e egală cu o sumă de n produse în care rămîn pe rînd cîte(n-1) funcţiuni neschimbate şi una e înlocuită prin derivata ei. Această regulă e valabilă pentru toate produsele de funcţiuni scalare şi vectoriale, dacă se respectă şi ordinea factorilor în produsele vectoriale

$$\frac{\partial(\lambda\bar{F})}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}\bar{F} + \lambda\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}\,;\quad \frac{\partial(\bar{F}\bar{G})}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}\bar{G} + \bar{F}\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i}\,;\quad \frac{\partial(\bar{F}\times\bar{G})}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_i}\times\bar{G} + \bar{F}\times\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i}$$

9.2. <u>Cîmpuri de scalari şi cîmpuri de vectori</u>. Dacă trei dintre variabilele scalare x_1, x_2 şi x_3 sînt coordonatele punctelor din spaţiu în raport cu un sistem de coordonate rectilinii ortogonale, o funcţiune scalară de cele trei coordonate $V(x_1,x_2,x_3)$ asociază fiecărui punct $x = x_1$; $y = x_2$; $z = x_3$ cîte o valoare a scalarului V; se spune că există un cîmp de scalari în regiunea în care se asociază punctelor scalarii V. O funcţiune vectorială de cele trei coordonate $\bar{G}(x_1,x_2,x_3)$ asociază fiecărui punct $x = x_1$; $y = x_2$; $z = x_3$ cîte o valoare a vectorului $\bar{G}$; se spune că există un cîmp de vectori în regiunea în care se asociază punctelor vectorii $\bar{G}$ Scalarul V, respectiv vectorul $\bar{G}$, se numeşte scalarul cîmp, respectiv vectorul cîmp al cîmpului considerat. Funcţiunile scalare şi vectoriale de variabile scalare prezintă importanţă mai ales fiindcă pot reprezenta analitic cîmpurile de scalari şi cîmpurile de vectori. Cîmpul temperaturii unui corp e un exemplu de cîmp de scalari. Cîmpul vitezelor unui fluid e un exempul de cîmp de vectori. Dacă funcţiunea scalară sau vectorială depinde nu numai de coordonate, ci şi de timp, ea asociază pentru fiecare moment, punctelor din spaţiu, cîte un scalar cîmp sau vector

cîmp şi cîmpul respectiv se numeşte variabil, altfel cîmpul se numeşte constant.

Cele trei coordonate se pot strînge în raza vectoare $\bar{r}$, care are originea în orîginea sistemului de coordonate şi extremitatea în punctul curent. Se poate spune că avem funcţiuni de variabilă vectorială şi eventual, şi de una scalară dacă depind de exemplu, şi de timpul t: $V = V(\bar{r},t)$ şi $\bar{G} = \bar{G}(\bar{r},t)$

9.3. Suprafeţe echiscalare. Un cîmp de scalari se reprezintă intuitiv, desenînd suprafeţele echiscalare, pe care scalarul cîmp are, în momentul considerat valori egale. Spre a avea o reprezentare clară a repartiţiei valorilor scalarului în cîmp, nu se desenează toate suprafeţele echiscalare, care ar acoperi întreaga figură, ci un număr limitat şi ales astfel, încît diferenţa dintre valorile scalarului pe oricari două suprafeţe vecine să fie aceeaşi. (fig. 3o). Ecuaţia suprafeţelor echiscalare ale cîmpului de scalari $V(\bar{r})$ e $V(\bar{r}) = \lambda$ unde λ e un parametru care are o valoare constantă pentru fiecare suprafaţă echiscalară. Ecuaţia diferenţială a suprafeţelor echiscalare este deci $dV(\bar{r}) = 0$, adică în coordonate cartesiene: $\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0$ dacă dx, dy şi dz sînt componente cartesiene ale unui element de arc al suprafeţei echiscalare.

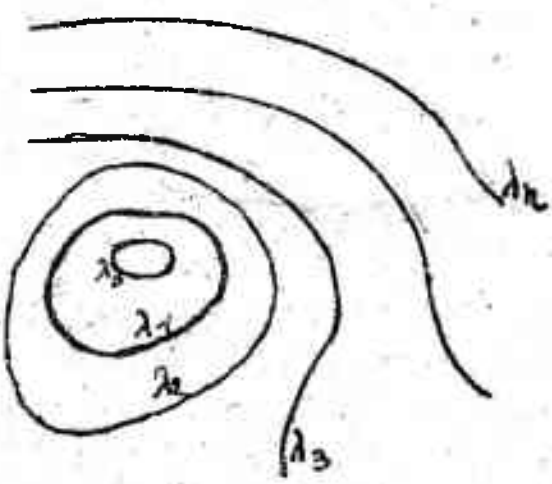


Fig.3o
Reprezentarea grafică a unui cîmp de scalari.

9.4. Linii de cîmp şi suprafeţe de cîmp. Cîmpurile de vectori se pot reprezenta intuitiv desenînd, cu originea în fiecare punct curent, vectorul cîmp $\bar{G}$ care e asociat. Spre a nu acoperi întreaga figură, se desenează un număr limitat de vectori (v. fig. 31, pentru cazul particular al unui cîmp plan). Se obţine o reprezentare intuitivă mai utilă dacă se desenează liniile de cîmp, adică liniile care sînt tan-

sente, în toate punctele lor, la vectori cîmp locali. Ecuaţia liniilor de cîmp e : $\bar{G}\,\bar{d\ell} = 0$, sau în coordonate cartesiene $G_x d_x + G_y d_y + G_z d_z = 0$.

Dacă se desenează, pe fiecare unitate de suprafaţă normală pe ele, un număr de linii de cîmp proporţional(sau egal) cu valoarea absolută a vectorului cîmp în regiune, ca în figura 32 pentru cîmpul plan din fig. 31 se obţine o reprezentare

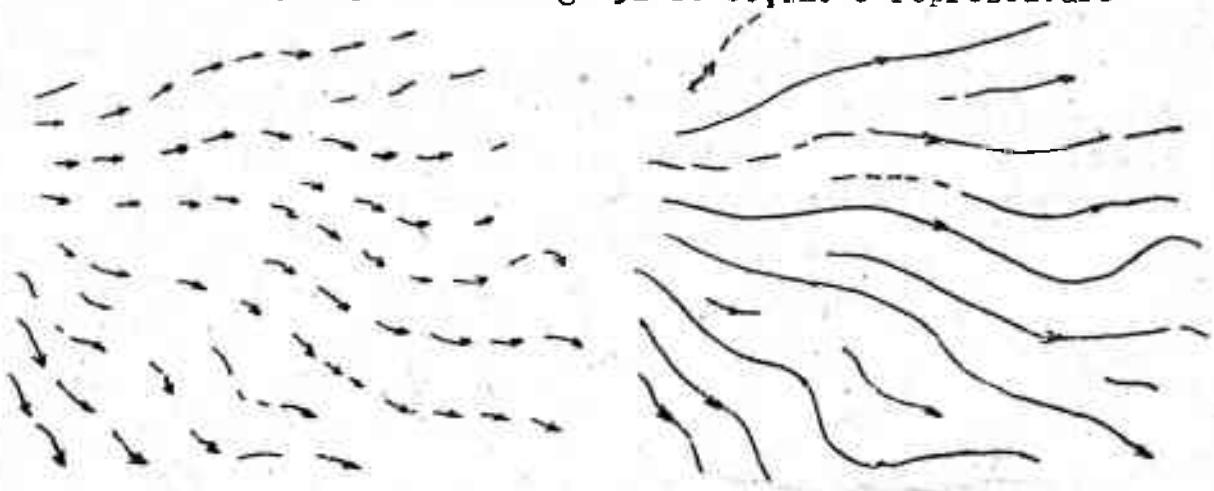


Fig. 31

Reprezentarea grafică a unui cîmp de vectori

Fig.32

intuitivă aproximativă a repartiţiei vectorului, care se foloseşte curent în cele mai variate domenii ale Fizicii.

Totalitatea liniilor de cîmp care trec prin punctele unei curbe închise constituie un tub de linii de cîmp. Dacă vectorul arie al curbei închise, directoare, tinde către zero, tubul de linii de cîmp se numeşte tub elementar.

Dacă ne imaginăm un lichid care umple un cîmp de vectori şi are în fiecare punct o viteză de valoare absolută egală cu acea a vectorului cîmp, se obţine o reprezentare hidrocinematică a cîmpului de vectori. Această reprezentare a promovat mult studiul cîmpurilor de vectori, fiindcă le reprezintă prin fenomenul obişnuit al mişcării unui lichid. Dacă se presupune lichidul incompresibil, e nevoie să i se atribuie uneori proprietatea(pe care lichidul nu o are) de a apărea sau dispărea spontan din cîmp, pentru ca valoarea absolută a vitezei lui să poată fi pretutindeni egală cu aceea a vectorului cîmp.

Cîmpurile de scalari se studiază cu ajutorul a două concepte echivalente, care se numesc integrala de suprafaţă a scalarului cîmp sub forma sa integrală şi gradientul scalarului cîmp sub forma diferenţială corespunzătoare. Cîmpurile de vectori se clasifică şi se studiază cu ajutorul a două perechi de concepte echivalente: prima se numeşte integrala de suprafaţă sau fluxul vectorului cîmp sub forma integrală, şi divergenţa vectorului cîmp sub forma diferenţială corespunzătoare; cea de a doua se numeşte integrala de linie (sau tensiunea) vectorului cîmp sub forma integrală, şi rotorul vectorului cîmp sub forma diferenţială corespunzătoare.

1o. INTEGRALA DE SUPRAFAŢA SI GRADIENTUL SCALARULUI CÎMP

1o.1. Integrala de suprafaţă a scalarului cîmp. Fie o suprafaţă S într-un cîmp de scalari V, cu un sens pozitiv pe conturul ei (fig.33), împărţită în elemente de suprafaţă de arii $\bar{dA}$ care tind către zero, reprezentate prin vectorii lor arie orientaţi dealungul normalelor lor, în sensul care se asociază după regula burghiului drept sensului pozitiv de pe contur. Dacă se aleg în aşa fel elementele de arie, încît scalarul cîmp V să aibă acelaşi valoare pe fiecare dintre ele - şi se consideră pentru fiecare element de arie produsul $V\,\bar{dA}$ dintre scalarul cîmp V şi vectorul său arie $\bar{dA}$ şi se face suma vectorială a acestor produse pe suprafaţa S, se obţine un vector $\bar{I}_s$, care se numeşte integrala de suprafaţă a scalarului cîmp V referitoare la suprafaţa S:

$$\bar{I}_s = \int_S V\,\bar{dA} \qquad (a)$$

Fig.33
Integrala de suprafaţă a unui scalar cîmp

In coordonate cartesiene $\bar{dA} = \bar{i}dA_x + \bar{j}dA_y + \bar{k}dA_z$, adică

$$\bar{I}_s = \int V(\bar{i}dA_x + \bar{j}dA_y + \bar{k}dA_z)$$

sau, dacă se aleg vectorii arie elementari $\bar{dA}$, astfel încît proiecţiile lor pe planele de coordonate să fie date de expresiunile (8) :

$$\bar{I}_S = \int_S v(\bar{i}dy\,dz + \bar{j}dz\,dx + \bar{k}\,dxdy).$$

Dacă S e o suprafaţă închisă, vectorii arie $d\bar{A}$ se aleg totdeauna dirijaţi spre exterior, iar integrala se numeşte şi integrală de inveliş.

Exemplu : Considerăm un fluid perfect, în care presiunea p, într-un moment dat, variază de la un punct la altul, şi calculăm forţa rezultantă $\bar{F}$, pe care o exercită fluidul din exteriorul unei suprafeţe închise Σ, asupra fluidului în interiorul ei. Forţa elementară care se transmite din spre exterior spre interior, prin elementul de arie care are vectorul arie $d\bar{A}$, e $pd\bar{A}$, e normală pe elementul $d\bar{A}$ şi e orientată spre interiorul suprafeţei, adică se poate pune sub forma $-pd\bar{A}$. Suma acestor forţe elementare, efectuată asupra suprafeţei închise Σ, e forţa rezultantă căutată:

$$\bar{F} = -\int_\Sigma pd\bar{A}$$

adică se exprimă prin integrala la suprafaţă cu semn schimbat a scalarului presiune.

1o.2. Gradientul scalarului cîmp. Cîmpurile de scalari uniforme au integrala de inveliş nulă prin toate suprafeţele închise din cîmp:

$$\bar{I}_\Sigma = \int_\Sigma v d\bar{A} = v\int_\Sigma d\bar{A} = 0$$

In adevăr, ultima integrală operează numai asupra vectorilor arie elementari $d\bar{A}$ şi e nulă pentru orice suprafaţă închisă, ca limită a sumei totodeauna nule a feţelor unui poliedru, pentru cazul în care numărul de feţe tinde către infinit, încît ariile tuturor feţelor să tindă către zero. Cîmpurile de scalari a căror integrală de inveliş e nulă prin toate suprafeţele închise din ele au deci în toate punctele aceiaşi valoare a scalarului cîmp, adică sînt cîmpuri uniforme, iar cîmpurile de scalari a căror integrala de inveliş nu e nulă prin toate suprafeţele închise care se pot trasa în ele sînt cîmpuri neuniforme. Dacă scalarul cîmp V al cîmpului de scalari nu e constant pe o suprafaţă închisă Σ integrala de suprafaţă diferă, în general, de zero şi vectorul $\bar{I}_\Sigma$ e orientat spre partea suprafeţei în care scalarul cîmp V e mai mare.

In cîmpul din figura 33 există suprafeţe închise Σ prin care integrala de suprafaţă e nulă, şi suprafeţe Σ'' prin care această integrală e diferită de zero. E posibil ca. prin suprafeţe Σ''' care închid atît suprafeţe de integrală nulă cît şi suprafeţe de integrală de suprafaţă nenulă, integrala de suprafaţă să nu fie nulă. Spre a deosebi regiunile de cîmp uniform de cele de cîmp neuniform, nu se pot alege deci pentru calculul integralei suprafeţe Σ''' prea mari, fiindcă pot induce în eroare în ce priveşte propietăţile anumitor regiuni din interiorul lor. De aceia se aleg suprafeţe închise foarte mici; spre a înlătura inconvenientul că integrala de suprafaţă va · riază, în general, cu volumul din interiorul suprafeţelor, se împarte integrala de suprafaţă corespunzătoare prin volumul pe care-l închide, spre a obţine integrala de suprafaţă specifică, adică integrala de suprafaţă raportată la suprafaţa unităţii (foarte mici) de volum, se trece apoi la limită, pentru suprafeţe ale căror dimensiuni scad în toate direcţiile, aşa încît volumul din ele să tindă odată cu aria lor A către zero şi se obţine o valoare locală a integralei de suprafaţă specifice care se numeşte gradientul scalarului cîmp V în punctul considerat, şi se notează cu simbolul grad V:

$$\text{grad } V = \lim_{\nu \to 0} \frac{\int_{\Sigma} V d\bar{A}}{\nu} \qquad (13)$$

Exemplu : Calculăm expresiunea densităţii de vo - a forţei adică forţa care se exercită asupra fluidului din unitatea (foarte mică) de volum dintr-un fluid, prin faptul că există în fluid presiunea p. Expresiunea forţei rezultante asupra fluidului din interiorul unei suprafeţe închise fiind (v. mai sus):

$$\bar{F} = -\int_{\Sigma} p d\bar{A}$$

rezultă:

$$\bar{f} = -\lim_{\nu \to 0} \frac{\int_{\Sigma} p d\bar{A}}{\nu} = -\text{grad } p.$$

adică densitatea de forţă e egală şi de semn contrar cu gradientul presiunii.

1o.3. Expresiunea gradientului în coordonatele cartesiene. Dacă V_Q e exprimat analitic în coordonatele cartesiene

se poate calcula expresiunea gradientului în coordonate. Fie $V(x\ y,z)$ valoarea scalarului cîmp în punctul P, de coordonate x,y,z,(fig.34), şi un paralelipiped drept, cu muchiile Δx $\Delta y, \Delta z$ şi cu centrul de simetrie în P. Valoarea scalarului cîmp V pe faţa A se obţine cu aproximaţie din valoarea sa V în punctul P, prin desvoltarea în serie Taylor a funcţiuni V(x,y,z) şi întrerupere a desvoltări la termenul al doilea e V $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$, fiindcă $\frac{\Delta x}{2}$ e creşterea coordonatei x de la punctul P pînă la faţa A. Analog se obţine valoarea scalarului cîmp V pe faţa B: V - $\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$. Dacă se înmulţeşte prima expresiune cu vectorul arie al elementului de suprafaţă la care se referă : $i\Delta y\ .\Delta z$ şi a doua cu vectorul arie al elementului de suprafaţă corespunzător: $-i\Delta y\ .\Delta z$, şi se adună se obţine componenta x a integralei prin suprafaţa paralelipipedului.

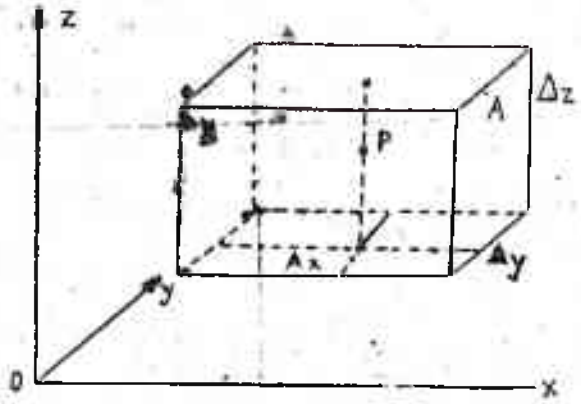


Fig.34

Figură pentru calculul expresiunii gradientului în coordonate cartesiene.

$$(V+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2})(\bar{i}\,\Delta y.\Delta z)+(V-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\Delta x}{2})(-\bar{i}\Delta y\ .\Delta z)=$$

$$=\bar{i}\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x\ .\Delta y\ .\Delta z.$$

Analog se obţin cu aproximaţie componentele y şi z ale integralei de suprafaţă, prin expresiuni în care coordonatele y respectiv z, au rolul coordonatelor x din formula de mai sus. Adunînd aceste trei expresiuni împărţind cu volumul $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ al paralelipipedului şi făcînd ca creşterile $\Delta x, \Delta y$ şi Δz să tindă către zero, valorile de aproximaţie de mai sus tind către valorile exacte, şi se obţine expresiunea gradientului în coordonate cartesiene:

$$\text{grad } V = \bar{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (13\ a)$$

<u>Exemplu</u>: Intensitatea de volum a forţei într-un fluid cu presiunea p are, în coordonate cartesiene, expresiu-

nea :

$$\bar{f} = -\operatorname{grad} p = -\bar{i}\frac{\partial p}{\partial x} - \bar{j}\frac{\partial p}{\partial y} - \bar{k}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Aplicaţie. Gradientul cîmpului de scalari al cărui scalar cîmp creşte cu puterea n a distanţei r de la punct fix O (originea sistemului de coordonate):

$$V = Cr^n$$

Expresiunea gradientului în coordonate cartesiene se poate pune succesiv sub următoarele forme:

$$\operatorname{grad} V = C\frac{dr^n}{dr}\left(\bar{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right) = Cnr^{n-1}\frac{\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z}{r} =$$

$$= Cnr^{n-1}\frac{\bar{r}}{r} = \bar{u}_r\, Cnr^{n-1}$$

unde $\bar{r}$ e raza vectoare cu originea în originea O şi cu extremitatea în punctul curent P, la distanţa r de origine, iar $\bar{u}_r$ e versorul corespunzător.

Operatorul vectorial nabla. In calcule e avantajos să se folosească următorul operator, care are proprietăţi asemănătoare cu proprietăţile vectorilor:

$$\bar{\nabla} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (14)$$

Cu ajutorul lui, gradientul poate fi pus în coordonate cartesiene, sub forma:

$$\operatorname{grad} V = \nabla V = \bar{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (14\ a)$$

10.4. Derivata de orientare a scalarului cîmp şi gradientul. Limita raportului dintre creşterea scalarului cîmp şi lungimea liniei căreia îi corespunde creşterea, cînd această lungime tinde către zero, se numeşte derivata de orientare scalarului cîmp corespunzător orientării considerate. Ea e egală cu componenta gradientului scalarului cîmp după orientarea respectivă. In adevăr fie s_1, s_2, s_3 lungimile de arc a trei familii oarecari de curbe triortogonale, şi $ds_1, ds_2 ds_3$ elementele lor de linie, care au originile în punctul P, în care se consideră derivata de orientare a scalarului cîmp V (care e funcţiune de $s_1, s_2 s_3$), corespunzătoare orientării ν a elementului de linie ds_ν. Se obţine:

$$\frac{dV}{ds_\nu} = \frac{\partial V}{\partial s_1}\cdot\frac{ds_1}{ds_\nu} + \frac{\partial V}{\partial s_2}\cdot\frac{ds_2}{ds_\nu} + \frac{\partial V}{\partial s_3}\cdot\frac{ds_3}{ds_\nu} = \frac{\partial V}{\partial s_1}\cos\alpha_{\nu 1} + \frac{\partial V}{\partial s_2}\cos\alpha_{\nu 2} + \frac{\partial V}{\partial s_3}\cos\alpha_{\nu 3}\,.$$

unde $\cos\alpha_{\nu 1}$, $\cos\alpha_{\nu 2}$, și $\cos\alpha_{\nu 3}$, sînt cosinusurile direc - toare ale orientări ν față de orientările elementelor ds_1, ds_2 și ds_3

Aceasta demonstrează, conform relației (1o) că în adevăr $\frac{dV}{ds_\nu}$ e componenta corespunzătoare elementului ds_ν, a unui vector, care e gradientul scalarului cîmp, cum rezultă cînd curbele de arce s_1, s_2 și s_3 sînt drepte trirectangulare alese drept axe de coordonate cartesiene ($s_1 = x$; $s_2 = y$; $s_3 = z$) și comparînd cu expresiunea (11). Dacă $\bar{u}_\nu$ e versorul elementului de linie ds_ν, versor al cărui componente sînt $\cos\alpha_{\nu 1}$, $\cos\alpha_{\nu 2}$, și $\cos\alpha_{\nu 3}$, urmează de mai sus, ținînd seama de expresiunea produsului scalar în funcțiune de componentele trirectangulare ale vectorilor factori.

$$\frac{dV}{ds_\nu} = \bar{u}_\nu \cdot \text{grad } V \qquad (13\ b)$$

sau

$$\int_{P_1}^{P_2} \text{grad } V\, d\bar{r} = \int_{P_1}^{P_2} dV = v_2 - v_1, \qquad (13\ c)$$

curbe de integrare dintre cele două puncte P_1 și P_2 fiind arbitrară, fiindcă valoarea integralei de linie nu depinde de ea, ci numai de extremitățile ei P_1 și P_2.

Derivata de orientare a scalarului cîmp V e deci egală cu produsul scalar al versorului orientări , prin gradientul scalarului cîmp V, adică e egală cu componenta gradientului după acea orientare, și e deci maximă cînd orientarea $\bar{u}_\nu$ coincide cu orientarea gradientului scalarului cîmp. In adevăr în acest caz, unghiul dintre $\bar{u}_\nu$ și grad V e nul, și valoarea acestui măxim e egală cu valoarea absolută a gradientului.

Proiecția gradientului unui scalar cîmp pe planul tangent local la suprafața echiscalară e nulă.

<u>Aplicație: Ecuația vectorială a suprafețelor echiscalare.</u> Dacă $d\bar{r}$ e un element de arc al unei suprafețe echiscalare V = const, el e perpendicular pe gradientul scalarului cîmp V adică:

$$d\bar{r}\ \text{grad } V = 0 \qquad (15)$$

sau $\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \equiv dV = 0$

sînt ecuaţiile diferenţiale ale suprafeţelor echiscalare.

10.5. Gradientul de suprafaţă al scalarului cîmp. Cînd scalarul cîmp prezintă o discontinuitate pe o suprafaţă aşa încît are valoarea V_1 pe o faţă a ei şi valoarea V_2 pe cealaltă, gradientul calculat din relaţia precedentă are o valoare absolută infinită pentru fiecare dintre punctele de pe suprafaţa de discontinuitate. In adevăr, diferenţa dintre valorile integralelor de suprafaţă referitoare la două suprafeţe care se aplică strîns şi îşi corespund în cele două părţi ale suprafeţei de discontinuitate S_d nu tinde către zero odată cu distanţa dintre cele două suprafeţe. In cazul acesta se împarte integrala de suprafaţă cu aria simplă A a suprafeţei de discontinuitate pe care o intersectează suprafaţa închisă Σ şi se ia limita cîtului pentru cazul în care aria suprafeţei prin care se calculează integrala de suprafaţă tinde către zero. Se obţine astfel o nouă integrală de suprafaţă specifică, numită gradientul de suprafaţă al scalarului cîmp, care se notează cu simbolul grads V :

$$\text{grads } V = \lim_{A \to 0} \frac{\int_{\Sigma} V d\bar{A}}{A} \qquad (13\ c)$$

Pentru a calcula gradientul de suprafaţă în funcţiune de valorile V_1 şi V_2 ale scalarului cîmp pe cele două feţe 1 şi 2 ale suprafeţei de discontinuitate, se alege drept suprafaţă închisă Σ o suprafaţă care se restrînge la două foiţe care se aplică strîns şi îşi corespund pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate. Se obţine astfel:

$$\text{grads } V = \lim_{A \to 0} \frac{V_1 \bar{A}_1 + V_2 \bar{A}_2}{A} = \bar{u}_{21} (V_1 - V_2) \qquad (13\ d)$$

unde $\bar{u}_{21}$ e versorul normal pe A, orientat din spre faţa 2 spre faţa 1.

11. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ, DIVERGENŢA ŞI TEOREMELE LUI GAUSS-OSTROGRADSKI ŞI GREEN

11.1. Fluxul vectorului cîmp. Fie o suprafaţă S într-un cîmp de vectori $\bar{G}$ cu un sens pozitiv pe conturul ei. În-

părțită în elemente de arie care au vectori arie $d\bar{A}$, dirijați dealungul normalelor lor în sensul în care se asociază după regula burghiului drept sensului pozitiv de circulație pe contur (fig.35). Dacă se aleg astfel elementele de arie încît $\bar{G}$ să aibă acelaşi valoare pe fiecare din ele şi dacă se consideră pentru fiecare element produsul scalar $\bar{G}d\bar{A}$ dintre vectorul cîmp $\bar{G}$ şi vectorul arie $d\bar{A}$ al elementului de arie şi se calculează suma acestor produse pe suprafaţa S. Se obţine un scalar Φ_s care se numeşte integrala de suprafaţă a vectorului cîmp referitoare la suprafaţa S sau fluxul vectorului cîmp $\bar{G}$ prin suprafaţa S :

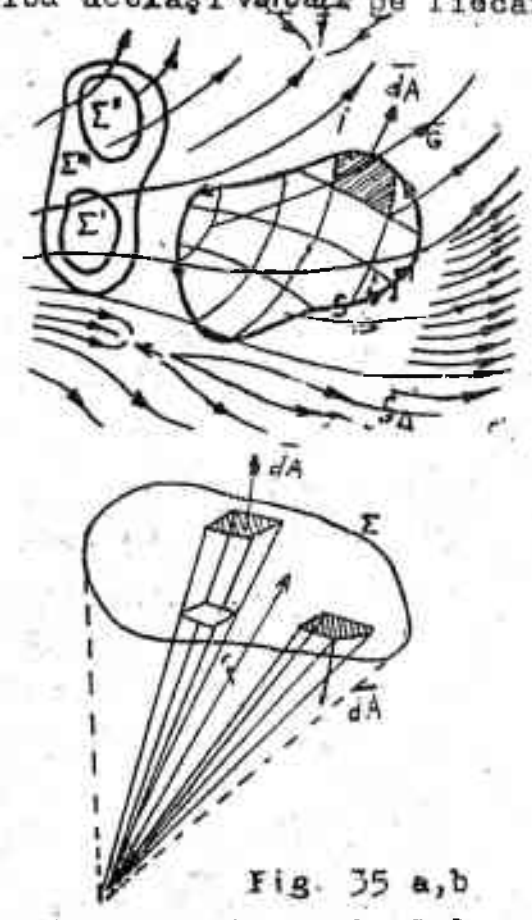


Fig. 35 a,b

Figuri pentru calculul fluxului vectorului cîmp al unui cîmp de vectori.

$$\Phi_s = \int_S \bar{G}\, d\bar{A}$$

In coordonate cartesiene

$$\bar{G} = \bar{i}G_x + \bar{j}G_y + \bar{k}G_z \text{ şi}$$

$$d\bar{A} = \bar{i}dA_x + \bar{j}dA_y + \bar{k}dA_z,$$

adică:

$$\Phi_s = \int_S (G_x dA_x + G_y dA_y + G_z dA_z)$$

Sau dacă se aleg formele elementelor de arie dA astfel încît proiecţiile lor pe planele de coordonate să aibă expresiunile(8).

$$\Phi_s = \int (G_x dydz + G_y dzdx + G_z dxdy) \qquad (16\ b)$$

Dacă S e o suprafaţă închisă, vectorii arie $d\bar{A}$ se aleg dirijaţi spre exterior, iar integrala se numeşte şi integrală de învelişe.

Aplicaţie. Expresiunea scalarului volum al unei suprafeţe închise, printr-o integrală de înveliş. Fie o suprafaţă închisă Σ şi fie V_Σ volumul din interiorul ei(v.fig.35 b). Dacă P e un punct oarecare şi $\bar{r}$ sînt razele vectoare ale elementelor de arie $d\bar{A}$ ale suprafeţei Σ în raport cu punctul P, volumul conului elementar care are baza dA şi vîrful P este:

$$dv = \frac{1}{3}\ \bar{r}\ d\bar{\Lambda},$$

pozitiv pentru elementele de arie ale căror raze vectoare în raport cu P trec prin interiorul suprafeţei închise Σ şi negativ pentru cele a căror rază vectoare nu trece prin interiorul acestei suprafeţe. Integrala de înveliş

$$V_\Sigma = \Phi_\Sigma = \int \frac{\bar{r}d\bar{\Lambda}}{3}$$

reprezintă deci volumul pozitiv din interiorul suprafeţei închise Σ, şi se numeşte scalarul volum al acelei suprafeţe.

11.2. Divergenţa vectorului cîmp. Cîmpurile de vectori al căror flux e nul prin toate suprafeţele închise din ele se numesc cîmpuri fără divergenţă; ele sînt caracterizate prin relaţia $\Phi_\Sigma = 0$ prin orice suprafaţă închisă. Cîmpurile de vectori al căror flux nu e nul prin toate suprafeţele închise care se pot trasa în ele se numesc cîmpuri cu divergenţă; ele sînt caracterizate prin faptul că există suprafeţe închise prin cari $\Phi_\Sigma \neq 0$.

Fluxul vitezei unui lichid printr-o suprafaţă e debitul de volum al lichidului prin ea. Rezultă că un cîmp de vectori fără divergenţă se poate reprezenta hidrocinematic printr-un lichid incompresibil fără a admite apariţie sau dispariţie spontană de lichid în cîmp, fiindcă într-un volum oarecare intră cantitatea de lichid care iese în acelaşi timp din el. Cîmpurile de vectori cu divergenţă nu se pot reprezenta hidrocinematic prin lichide incompresibile decît admiţînd apariţie sau dispariţie spontană de lichid în cîmp. Aceasta se recunoaşte în reprezentarea grafică prin faptul că liniile unitate de cîmp încep sau se termină în regiunile de divergenţă. Regiunile în care fluxul prin suprafeţele închise e negativ se numesc uneori şi regiuni de convergenţă, fiindcă în reprezentarea hidrocinematică lichidul converge spre ele.

In cîmpul din fig. 35 există suprafeţe închise Σ' prin care fluxul vectorului cîmp e nul, şi suprafeţe Σ'' prin care fluxul nu e nul. Se poate însă ca fluxul să nu fie nul prin suprafeţele închise Σ'', care închid atît suprafeţele de flux nul cît şi suprafeţele de flux nenul. Spre a deosebi regiunile fără divergenţă de regiunile cu divergenţă nu se pot

alege deci, pentru calculul fluxului, învelişuri Σ^{III} prea mari, fiindcă astfel s-ar face erori în privinţa divergenţei unor regiuni din interiorul învelişurilor Σ^{III}. De aceea se aleg învelişuri foarte mici şi, spre a înlătura inconvenientul că fluxul variază, în general, cu volumul din interiorul lor, se împarte fluxul lor prin volumul pe care-l închid, spre a obţine fluxul specific, adică fluxul raportat la învelişul unităţii (foarte mici) de volum: se trece la limită pentru învelişuri ale căror dimensiuni scad în toate direcţiile aşa încît volumul lor v tinde către zero, şi se obţine o valoare de punct a fluxului specific, care se numeşte divergenţa vectorului cîmp în punctul considerat şi se notează cu div $\bar{G}$:

$$\operatorname{div} \bar{G} = \lim_{v=0} \frac{\int_{\Sigma} \bar{G}\, d\bar{A}}{v} \qquad (17)$$

Regiunile unui cîmp de vectori în care div $\bar{G} = 0$ se numesc fără divergenţă ; cele în care div $\bar{G} \neq 0$ se numesc regiuni cu divergenţă.

Divergenţa e un scalar ataşat fiecărui punct din cîmp şi formează deci un cîmp de scalari.

11.3. Expresiunea divergenţei în coordonate carteziene. Fie $\bar{G}(x,y,z)$ vectorul cîmp în punctul P, de coordonate x,y,z şi G_x, G_y, G_z componentele sale, şi un paralelipiped cu muchiile $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, şi cu centrul de simetrie în P(fig.36). Valoarea componentei G_x pe faţa A se obţine cu aproximaţie din valoarea G_x în P, prin desvoltare în serie Taylor şi întrerupere a desvoltării la termenul al doilea adică e :

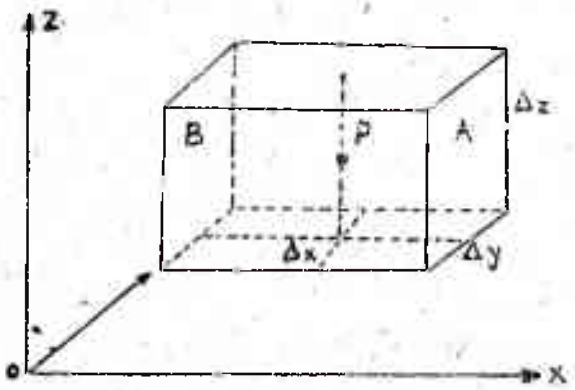


Fig.36
Figură pentru calculul expresiunii divergenţei în coordonate carteziene.

$G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}$, fiindcă $\frac{\Delta x}{2}$ e creşterea coordonatei dela punctul P la faţa A. Analog se obţine valoarea componentei Gx pe faţa B:

$$G_x - \frac{\partial G_x}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

Dacă se înmulţeşte prima expresiune cu aria $\Delta y . \Delta z$ a feţei A, se obţine cu aproximaţie fluxul vectorului cîmp $\bar{G}$ prin A,

fiindcă expresiunea conţine componenta normală pe A a vectorului cîmp .Dacă se înmulţeşte a doua expresiune cu aria $\Delta y \Delta z$ a feţei B şi se scade din primul produs, se obţine cu aproximaţie fluxul în direcţia x prin suprafaţa paralelipipedului (diferenţa dintre fluxul care iese şi dintre cel care intră în paralelipiped în direcţia x) :

$$\left(G_x \frac{\partial G_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y \cdot \Delta z - \left(G_x - \frac{\partial G_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z =$$

$$= \frac{\partial G_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z .$$

Analog se obţine fluxul în direcţiile y şi z, prin expresiuni în care y respectiv z au rolul lui x din formula de mai sus Adunînd aceste trei expresiuni împărţind cu volumul $\Delta x . \Delta y . \Delta z$ al paralelipipedului elementar şi luînd limita acestui cît cînd lungimile $\Delta x, \Delta y$, şi Δz ale muchiilor paralelipipedului tind către zero, aproximaţiile tind către valorile exacte, şi se obţine expresiunea fluxului specific sau a divergenţei în coordonate cartesiene:

$$\text{div } \bar{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \qquad (17\ a)$$

Cu ajutorul operatorului vectorial nabla, expresiunea (17 a) se poate pune sub forma de produs scalar:

$$\text{div } \bar{G} = \nabla \bar{G} \qquad (17\ b)$$

Aplicaţie: Divergenţa cîmpului de vectori al cărui vector cîmp creşte cu puterea n a distanţei r dela un punct fix O(originea sistemului de coordonate) şi e dirijată radial (fig.37)

$$\bar{G} = \bar{u}_r\, C.r^n = \bar{r}C.r^{n-1} = (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z)\, Cr^{n-1}$$

unde $\bar{u}_r$ e versorul radial dirijat dealungul razelor vectoare cu originea în O, şi $\bar{r} = \bar{u}_r r$ sînt razele vectoare în raport cu O, ale punctelor curente din cîmp. Din expresiunea divergenţei în coordonate cartesiene se obţine:

$$\text{div } \bar{G} = \frac{\partial}{\partial x}(xCr^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial y}(yCr^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial z}(zCr^{n-1}) =$$

$$= 3\,Cr^{n-1} + (n-1)\,Cr^{n-2}\left(x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial r}{\partial z}\right) = 3\,Cr^{n-1} +$$

$$+ (n-1)\,Cr^{n-2}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r} = (n+2)\,Cr^{n-1}.$$

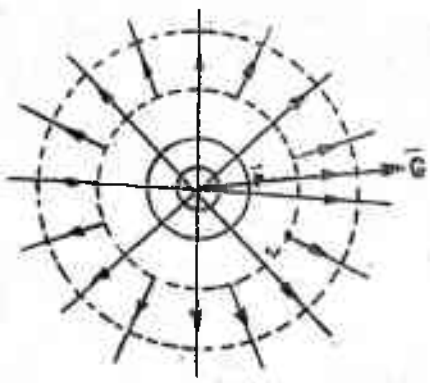


Fig.37

Cîmp de vectori radial, care are vectorul cîmp proporţional cu puterea n a razei vectoare.

Pentru cazul particular n=1; C=1, se obţine $\operatorname{div} \bar{r} = 3$.

Aplicaţie Divergenţa unui cîmp de vectori al căruí vector cîmp $\bar{F}$ e egal cu produsul dintre scalarul cîmp λ al unui cîmp de scalari şi vectorul cîmp G al unui cîmp:

$$\bar{F} = \lambda \bar{G} = \bar{i}\lambda G_x + \bar{j}\lambda G_y + \bar{k}\lambda G_z .$$

Ţinînd seama de expresiunile produsului scalar şi gradientului în coordonate cartesiene, se obţine:

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div}(\lambda \bar{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda G_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda G_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda G_z) =$$

$$= \lambda\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right) + \left(G_x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + G_y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + G_z \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) = \qquad (17c)$$

$$= \lambda \operatorname{div} \bar{G} + \bar{G} \operatorname{grad} \lambda .$$

Aplicaţie : Divergenţa gradientului unui cîmp de scalari.

Fie $\bar{G} = \operatorname{grad} V = \bar{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial V}{\partial z}$

gradientul. Se obţine cu ajuterul expresiunii divergenţei în coordonate cartesiene:

$$\operatorname{div} \bar{G} = \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V \qquad (17\,d)$$

Această expresiune are un rol important în aplicaţi , se notează cu ΔV, şi se numeşte laplacianul scalarului cîmp V.

Aplicaţie Laplacianul cîmpului scalar, de scalar cîmp egal cu valoarea reciprocă a distanţei dintre punctele curente din cîmp şi un punct fix O.

Se obţine:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \operatorname{div}\left(\frac{\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) +$$

$$+ x\frac{\partial r^{-3}}{\partial x} + y\frac{\partial r^{-3}}{\partial y} + z\frac{\partial r^{-3}}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r} = 0$$

11.4. Divergenţa de suprafaţă a vectorului cîmp.

Dacă există într-un cîmp o suprafaţă S_d pe care componenta normală a vectorului cîmp e discontinuă (fig. 35 jos, în dreapta), pe acea suprafaţă, divergenţa e infinită. In cazul acesta fluxul se împarte cu aria simplă ΔA a suprafeţei de discontinuitate pe care o intercepteză învelişul fluxului şi se ia limita pentru cazul cînd toate dimensiunile acestui înveliş tind către zero, care se numeşte divergenţa de suprafaţă a vectorului cîmp $\bar{G}$, şi se notează cu simbolul divs $\bar{G}$:

$$\operatorname{divs}\bar{G} = \lim_{\Sigma \to 0} \frac{\int_{\Sigma} \bar{G}\, d\bar{A}}{A} \qquad (17\ e)$$

Pentru a calcula divergenţa de suprafaţă în funcţiune de valorile G_1 şi G_2 ale vectorului cîmp pe cele două feţe 1 şi 2 ale suprafeţei de discontinuitate, se alege ca suprafaţă închisă Σ o suprafaţă care se restrînge la două foiţe care se aplică strîns şi îşi corespund pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate. Se obţine astfel:

$$\operatorname{divs}\bar{G} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{G_{n1}\Delta A + G_{n2}\Delta A}{\Delta A} = G_{n1} + G_{n2} = \bar{u}_{21}(\bar{G}_1 - \bar{G}_2) \qquad (17f)$$

unde G_{n1} şi G_{n2} sînt componentele normale ale vectorului cîmp pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate, contate pozitive cînd sînt îndreptate din spre suprafaţă spre cîmp, şi $\bar{u}_{21}$ e versorul normal pe suprafaţa de discontinuitate dirijat din spre partea 2 spre 1.

11.5. Divergenţa de linie a vectorului cîmp. Dacă există într-un cîmp o linie din care diverge flux, se împarte valoarea fluxului prin învelişul care îmbracă arcul lor, prin lungimea s a arcului de linie interceptat de înveliş, se ia limita cînd toate dimensiunile învelişului tind către zero şi se obţine divergenţa de linie a vectorului cîmp, care se notează cu simbolul $\operatorname{divl}\bar{G}$:

$$\operatorname{divl}\bar{G} = \lim_{s \to 0} \frac{\int_{\Sigma} \bar{G}\, d\bar{A}}{s} \qquad (17\ g)$$

11.6. Divergenţa de punct a vectorului cîmp Dacă există puncte discrete din care diverge flux (fig 35 sus), însăşi valoarea fluxului care diverge se numeşte divergenţa de punct a vectorului cîmp în punctele respective [illegible]

cu simbolul div p $\bar{G}$:

$$\operatorname{div}_p \bar{G} = \lim_{\Sigma \to 0} \int_{\Sigma} \bar{G}\, d\bar{A} \qquad (17\ h)$$

11.7. Momentul dubletului de divergenţe. Două puncte foarte apropiate, unul de divergenţă de punct ϕ şi altul de divergenţă de punct $-\phi$, egale în valoare absolută şi astfel încît produsul dintre această valoare absolută comună şi raza vectoare $\bar{\ell}$ dintre puncte să aibă o valoare finită, constituie un dublet de divergenţe (fig.35 jos, în strînga), şi mărimea :

$$\bar{p} = \frac{1}{4\pi} \phi\, \bar{\ell}\,, \qquad (17\ i)$$

considerată ca vector dirijat din spre punctul de convergenţă spre cel de divergenţă, se numeşte momentul dubletului. Dubletul se numeşte elementar, dacă ℓ tinde astfel către zero şi ϕ tinde astfel către infinit, încît produsul lor să rămînă finit

11.8. Puterea stratului de dubleţi de divergenţe Dacă, punctele de divergenţă ale unor dubleţi sînt repartizate pe o suprafaţă, şi cele de convergenţă pe o suprafaţă infinit vecină, ele constituie un strat de dubleţi sau de dipoli, şi densitatea de suprafaţă a momentelor lui, cînd ea există are expresiunea următoare, numită puterea stratului de dubleţi de divergenţe:

$$\bar{\pi} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \sum \bar{p}_i \qquad (17\ j)$$

In aplicaţii prezintă importanţă cazul în care puterea stratului e normală pe el.

11.9. Polarizaţia prin dubleţi de divergenţe. Dacă dubleţii sînt repartizaţi continuu în anumite regiuni din spaţiu, se spune că aceste regiuni sunt polarizate, şi ele se caracterizează prin densitatea de volum $\bar{P}$ a momentelor $\bar{p}_i$ ale dubleţilor, cînd ea există:

$$\bar{P} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \sum \bar{p}_i \qquad (17\ k)$$

care se numeşte polarizaţia dată de dubleţi.

11.10. Teorema lui Gauss şi Ostrogradski Fluxul vectorului cîmp al unui cîmp continuu prin orice suprafaţă închisă e egal cu integrala divergenţei lui asupra volumului v

din interiorul suprafeţei:

$$\int_{\Sigma} \bar{G}\, d\bar{A} = \int_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G}\, dv$$

Se împarte volumul v în elemente dv alese în aşa fel încît div $\bar{G}$ să aibă aceiaşi valoare pe fiecare dintre ele (fig.38) şi se observă că, după definiţia divergenţei, div $\bar{G}$ dv e fluxul vectorului cîmp prin învelişul elementului de volum dv şi că la adunarea fluxurilor parţiale corespunzătoare integralei din membrul drept al relaţiei lui Gauss şi Ostrogradski toate fluxurile prin suprafeţe din interiorul suprafeţei Σ se anulează două cîte două; în adevăr fluxul prin orice suprafaţă e pozitiv în sensul normalei exterioare a lui dv, adică dacă e pozitiv, pentru unul dintre cele două elemente de volum mărginite de suprafaţă interioară e negativ şi are aceiaşi valoare pentru celălalt, fiindcă $\bar{G}$ e repartizat continuu în cîmp. Rămîne numai suma referitoare la suprafaţa exterioară Σ, ale cărei elemente de arie mărginesc cîte un singur element de volum, adică suma din membrul stîng al expresiunii analitice a teoremei lui Gauss şi Ostrogradski, care trebuie să fie demonstrată.

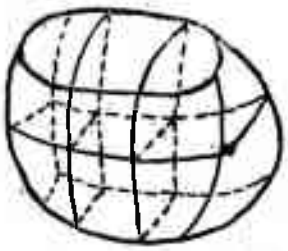


Fig. 38

Impărţirea unui volum în elemente, pentru demonstrarea teoremei lui Gauss şi Ostrogradski.

Teorema transformă o integrală de suprafaţă într-o integrală de volum sau o integrală de volum într-o integrală de suprafaţă.

Dacă există în cîmp şi suprafeţe de divergenţă S_d, se adaugă în membrul drept al relaţiei şi o integrală de suprafaţă asupra divergenţei de suprafaţă; ea se extinde asupra suprafeţei de divergenţă, pe cînd integrala din membrul stîng se extinde asupra unei suprafeţe închise oarecare. In membrul drept se adaugă şi integrala de linie asupra divergenţei de linie, sau divergenţe de punct, cînd ele există în în-

teriorul suprafeţei închise Σ:

$$\int_{\Sigma} \bar{G}\, d\bar{A} = \int_{V_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G}\, dv + \int_{\Sigma} \operatorname{div}_n \bar{G}\, d\bar{A}_n + \int_{C} \operatorname{div} \bar{G}\, ds + \sum \operatorname{div}_p \bar{G}. \qquad (18)$$

Aplicaţie. Forma diferenţială a legii de conservare a masei inerte a fluidelor. Fie un fluid care are densitatea μ şi fie $\bar{u}$ vitezele particulelor de fluid ($\bar{u}$ nu e deci versor). Masa de fluid care trece în unitatea de timp printr-un element de arie dA, situat în fluid, e $\mu \bar{u}.\, d\bar{A}$, fiindcă fluidul respectiv e conţinut într-o prismă oblică, de bază $d\bar{A}$ şi de generatoarea $\bar{u}$ adică de volum $\bar{u}\, d\bar{A}$. Masa de fluid care iese în unitatea de timp în interiorul unei suprafeţe închise Σ, situată în fluid, e deci

$$\int_{\Sigma} \mu\, \bar{u}\, d\bar{A}.$$

Conform legii de conservare a masei, această masă trebuie să fie egală cu scăderea în unitatea de timp, a masei m din volumul v_Σ din interiorul suprafeţei Σ, adică:

$$\int_{\Sigma} \mu\, \bar{u}\, d\bar{A} = -\frac{\partial m}{\partial t}$$

fiindcă

$$m = \int_{v_\Sigma} \mu\, dv,$$

se obţine aplicînd teorema lui Gauss şi Ostrogradski:

$$\int_{\Sigma} \mu\, \bar{u}\, d\bar{A} = \int_{v_\Sigma} \operatorname{div}(\mu \bar{u})\, dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v_\Sigma} \mu\, dv = -\int_{v_\Sigma} \frac{\partial \mu}{\partial t}\, dv.$$

Fiindcă această relaţie trebuie să fie satisfăcută, oricare ar fi volumul v_Σ rezultă:

$$\operatorname{div}(\mu \bar{u}) = -\frac{\partial \mu}{\partial t},$$

ca formă diferenţială a legii de conservare a masei inerte a fluidelor (numită şi forma diferenţială a ecuaţiei de continuitate a fluidelor în mişcare.).

11.11. Teoremele lui Green: Din teorema lui Gauss şi Ostrogradski se obţine o relaţie cunoscută sub numele de teorema lui Green. Ea admite vreo cîteva forme particulare, care se folosesc în demonstraţii importante în teoria cîmpurilor de vectori. Scriind teorema lui Gauss şi Ostrogradski aplicată vectorului cîmp $\bar{F}$, acest vector fiind de forma $\bar{F} = \lambda \bar{G}$,

se obţine forma generală a teoremei lui Green:

$$\int_{\Sigma} \lambda \bar{G} \cdot d\bar{A} = \int_{V_\Sigma} (\lambda \operatorname{div} \bar{G} + \bar{G} \operatorname{grad} \lambda)\, dv. \qquad (18\ a)$$

Presupunînd că vectorul $\bar{G}$ e gradientul unui cîmp de scalari : $\bar{G} = \operatorname{grad} V$, se obţine prima formă particulară a teoremei lui Green:

$$\int_{\Sigma} \lambda \operatorname{grad} V\, d\bar{A} = \int_{V_\Sigma} (\lambda \Delta V + \operatorname{grad} V \operatorname{grad} \lambda)\, dv \qquad (18\ b)$$

unde componenta normală pe suprafaţa Σ (adică în orientarea lui $d\bar{A}$), a gradientului lui V din produsul scalar, poate fi înlocuită prin derivata de orientare a lui V după orientarea lui S_n, normală pe $d\bar{A}$: $\operatorname{grad} V\, d\bar{A} = \frac{\partial V}{\partial s_n}\, dA$.

Dacă se scade din această formă relaţia care rezultă din ea înlocuind pe V cu λ şi pe λ cu V, se obţine a doua formă particulară a teoremei lui Green:

$$\int_{\Sigma} \left(\lambda \frac{\partial V}{\partial s_n} - V \frac{\partial \lambda}{\partial s_n}\right) dA = \int_{V_\Sigma} (\lambda \Delta V - V \Delta \lambda)\, dv.$$

Înlocuind aici pe λ cu valoarea reciprocă a distanţei punctelor curente de la un punct fix O : $\frac{1}{R}$, se obţine a treia formă particulară a teoremei lui Green:

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial s_n} - V \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n}\right) dA = \int_{V_\Sigma} \frac{\Delta V}{R}\, dv, \qquad (19)$$

fiindcă $\Delta \frac{1}{R} \equiv 0$

funcţiunea $\frac{1}{R}$ avînd însă un punct singular în O, unde devine infinită, spre a menţine valabilitatea acestei forme a teoremei trebuie ca punctul O să fie în exteriorul volumului v, asupra căruia se integrează.

Scriind în prima formă particulară $\lambda = V$, se obţine a patra formă particulară a teoremei lui Green:

$$\int_{\Sigma} V \frac{\partial V}{\partial s_n}\, dA = \int (V \Delta V + \operatorname{grad}^2 V)\, dv \qquad (18\ c)$$

Dacă se înlocueşte în forma generală a teoremei lui Green (18 a) scalarul cîmp λ pe rînd cu cîte una dintre componentele F_x, F_y, F_z ale vectorului cîmp $\bar{F}$ al unui cîmp de vectori în coordonate cartesiene, se obţin trei relaţii ca (18 a), în care λ e înlocuit respectiv cu F_x, F_y, F_z; Dacă se înmulţesc acestea respectiv cu cei trei versori $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ai sistemului de coordonate, se obţine:

$$\int_{\Sigma} (\bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z)(\bar{G}\, d\bar{A}) = \int_{V_\Sigma} \left[(\bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z) \operatorname{div} \bar{G} + \bar{i}(\bar{G} \operatorname{grad} F_x) + \right.$$
$$\left. + \bar{j}(\bar{G} \operatorname{grad} F_y) + \bar{k}(\bar{G} \operatorname{grad} F_z)\right] dv.$$

fiindcă versorii sînt constanţi, rezultă:

$$\bar{i}(\bar{G}\ \text{grad}\ F_x) = G_x \frac{\partial(\bar{i}\bar{F}_x)}{\partial x} + G_y \frac{\partial(\bar{i}F_x)}{\partial y} + G_z \frac{\partial(\bar{i}F_x)}{\partial z}$$

şi două expresiuni analoage pentru $\bar{j}(\bar{G}\ \text{grad}\ F_y)$ şi $\bar{k}(\text{grad}\ F_z)$. Adunîndu-le se obţine:

$$\bar{i}(\bar{G}\ \text{grad}\ F_x) + \bar{j}(\bar{G}\ \text{grad}\ F_y) + \bar{k}(\bar{G}\ \text{grad}\ F_z) = G_x \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}.$$

Dacă se introduce operatorul vectorului simbolic grad $= \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ se obţine:

$$G_x \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = \left(G_x \frac{\partial}{\partial x} + G_y \frac{\partial}{\partial y} + G_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\bar{F} =$$

$$= (\bar{G}\ \text{grad}\ )\ \bar{F}$$

şi prima relaţie se transformă în a cincea formă particulară a teoremei lui Green.

$$\int_\Sigma \bar{F}(\bar{G}\ d\bar{A}) = \int_{v_\Sigma} \left[\bar{F}\ \text{div}\ \bar{G} + (\bar{G}\ \text{grad})\ \bar{F}\right] dv. \qquad (2o)$$

Sensul operaţiei noi $(\bar{G}\ \text{grad}\ )\ \bar{F}$ se obţine, observînd că, dacă $d\bar{s}_\nu$ o vectorul de componente dx, dy şi dz, urmează:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial s_\nu} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\frac{dx}{ds_\nu} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}\frac{dy}{ds_\nu} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}\frac{dz}{ds_\nu} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\cos\alpha_{\nu x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}\cos\alpha_{\nu y} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}\cos\alpha_{\nu z}$$

unde $\cos\alpha_{\nu x}, \cos\alpha_{\nu y}$ şi $\cos\alpha_{\nu z}$ sînt cosinusurile directoare ale lui $d\bar{s}_\nu$. Înmulţind această relaţie cu valoarea absolută G a vectorului $\bar{G}$, alegînd pe $d\bar{s}_\nu$ paralel cu $\bar{G}$ şi observînd că $\bar{G}\cos\alpha_{\nu x} = G_x$, etc, se obţine:

$$G\frac{\partial \bar{F}}{\partial s_{\bar{G}}} = (\bar{G}\ \text{grad}\ )\ \bar{F}$$

adică operaţia $(\bar{G}\ \text{grad})\ \bar{F}$ reprezintă produsul dintre valoarea absolută a vectorului $\bar{G}$ şi derivata de direcţie a vectorului cîmp $\bar{F}$ în direcţia şi sensul lui $\bar{G}$.

<u>Aplicaţie.</u> Demonstrăm cu ajutorul teoremei lui Gauss şi Ostrogradski aplicată razei vectoare $\bar{r}$, că întreitul volumului v al unei sfere de rază r e egal cu de r ori aria ei: $A = 4\pi r^2$. Ţinînd seama că $\bar{G} = \bar{r}$ are o valoare absolută constantă pe suprafaţa sferei şi că are orientarea elementelor de suprafaţă, şi fiindcă $\text{div}\ \bar{r} = 3$, se obţine:

$$\int_\Sigma \bar{r}\, d\bar{A} = r\int_\Sigma dA = r.A = \int_{v_\Sigma} \text{div}\ \bar{r}\ dv = 3\int_{v_\Sigma} dv = 3v.$$

Cea de a treia formă particulară(19) a teoremei lui Green nu e aplicabilă cîmpurilor de vectori plane. Acestea sînt cîmpuri în care există o direcţie privilegiată pe care sînt perpendiculari vectorii cîmp din toate punctele şi aceştia au valori absolute, direcţii şi sensuri egale în toate punctele situate pe dreptele care au direcţia privilegiată. Un astfel de cîmp având aceiaşi repartiţie a vectorilor cîmp în toate planele perpendiculare pe direcţia privilegiată, e complect determinat cînd se cunoaşte vectorul cîmp în fiecare punct al unui singur plan perpendicular pe direcţia privilegiată în care e cuprins vectorul cîmp. Dacă z e direcţia privilegiată într-un cîmp al gradientului grad V al unui scalar cîmp V, gradientul şi scalarul cîmp nu depind în acest caz, de coordonata z. Dacă vrem să operăm deci numai în planul Oxy, laplacianul se reduce la expresiunea

$$\Delta_p V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

unde indicele p arată independenţa de una dintre coordonatele rectilinii ortogonale. Distanţa R dintre două puncte nu satisface însă relaţia $\Delta_p \frac{1}{R} = 0$, şi deci relaţia (19) nu e valabilă dacă se înlocueşte laplacianul Δ cu laplacianul plan Δ_p. Dacă se operează însă cu distanţa ρ dintre două puncte în planul perpendicular pe direcţia privilegiată, se constată că:

$$\Delta_p \ln \rho = 0.$$

In acest caz trebuie să se opereze cu divergenţa în plan:

$$\operatorname{div}_p \bar{G} = \lim_{A_\Gamma \to 0} \frac{\oint_\Gamma \bar{G} d\bar{s}_n}{A_\Gamma}$$

unde $d\bar{s}_n$ sînt elementele de arc normale pe un contur Γ, de valori absolute egale cu valorile absolute ale arcelor elementare $d\bar{r}$ ale conturului ($ds_n = |d\bar{r}| = ds$), iar A_Γ e aria domeniului plan din interiorul conturului Γ. In coordonate cartesiene:

$$\operatorname{div}_p \bar{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}$$

Teorema lui Gauss şi Ostrogradski are, în acest caz, forma:

$$\int_\Gamma G_n ds = \int_{A_\Gamma} \operatorname{div}_p \bar{G}\, d\bar{A}$$

unde d A e elementul de arie al domeniului A_Γ formula care precede formula (19) are deci, pentru cîmpurile plane în care V şi λ sînt independenţi de z, forma:

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial V}{\partial s_n} - V\,\frac{\partial \lambda}{\partial s_n}\right) ds = \int_{A_\Gamma} (\lambda \Delta_p V - \rho \Delta_p \lambda)\, dA$$

unde ds e elementul de arc al conturului Γ. Înlocuind pe λ cu $ln\rho$ se obţine a şasea formă particulară a teoremei lui Green.

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial V}{\partial s_n}\, ln\rho - V\,\frac{\partial ln\rho}{\partial s_n}\right) ds = \int \Delta_p V ln\rho\, dA \qquad (19\ a)$$

12. INTEGRALA DE LINIE ROTORUL SI TEOREMA LUI STOKES

12.1. Integrala de linie a vectorului cîmp. Fie o curbă ale cărei puncte au razele vectoare $\bar{r}$ într-un cîmp de vectori, cu un sens pozitiv pe ea şi fie $d\bar{r}$ elementele ei de arc, dirijate în sens ales pozitiv pe curbă (fig.39). Dacă se aleg astfel de elemente de arie, încît $\bar{G}$ să aibă aceiaşi valoare în toate punctele fiecăreia dintre ele şi se consideră pentru fiecare element de arc, produsul scalar dintre vectorul cîmp $\bar{G}$ şi elementul de arc $d\bar{r}$ şi se determină suma acestor produse de-alungul curbei C, se obţine un scalar L_c, care se numeşte integrala de linie a vectorului cîmp referitoare la curba C (sau tensiunea vectorului cîmp de-alungul curbei C):

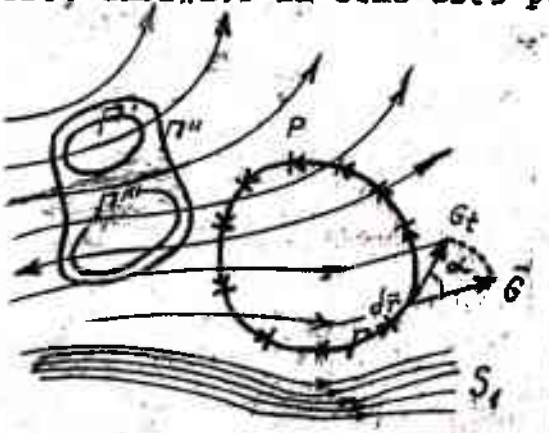


Fig.39

Figură pentru calculul integralei de linie a vectorului cîmp al unui cîmp de vectori.

$$L_c = \int_{Po}^{P}{}_{C} \bar{G}\, d\bar{r} \equiv \int_{Po}^{P}{}_{C} G\, dr \cos\alpha, \qquad (21)$$

unde P_o şi P indică punctele extreme ale curbei (sau alte două puncte pe ea, dacă se calculează tensiunea de-alungul curbei numai între P_o şi P). În coordonate cartesiene:

$$\bar{G} = \bar{i}G_x + \bar{j}G_y + \bar{k}G_z$$

şi $d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz$ şi deci

$$L_c = \int_C (G_x dx + G_y dy + G_z dz).$$

Cînd C e o curbă închisă, se folosește simbolul integrală cu un cerc pe ei, și nu se mai indică punctul P_0 de la care se începe integrarea și la care se revine, fiindcă integrala de linie nu depinde de el:

$$L_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{C}d\bar{r}$$

Ea se numește în acest caz, circulație. Exemplu. Lucrul mecanic L, raportat la un anumit sistem de referință inerțial, efectuat de o forță $\bar{F}$ cînd punctul ei material de aplicație se deplasează, în raport cu acel sistem de referință, dealungul unei curbe C, de element de linie dr, este:

$$L = \int_C \bar{F}\, d\bar{r}$$

integrala fiind efectuată dealungul întregei curbe C, deschisă sau închisă.

Cîmpurile de vectori se împart cu ajutorul circulației în două clase după un principiu diferit și independent de cel definit cu ajutorul fluxului. Cîmpurile de vectori a căror circulație e nulă dealungul tuturor curbelor închise din ele se numesc irotaționale, ele sînt caracterizate prin relația $\oint \bar{G}\, d\bar{r} = 0$ dealungul tuturor curbelor închise. Cîmpurile de vectori a căror circulație nu e nulă dealungul tuturor curbelor închise care se pot trasa în ele se numesc rotaționale; ele sînt caracterizate prin faptul că există curbe închise dealungul cărora $\oint \bar{G}d\bar{r} \neq 0$.

12.2. Rotorul vectorului cîmp. In cîmpul din fig 39 există curbe închise dealungul cărora circulația e nulă și curbe dealungul cărora circulația nu e nulă. Se poate însă ca integrala de linie dealungul unor curbe închise Γ, care înconjoară atît curbe de circulație nulă cît și curbe de circulație nenulă, să existe circulație nenulă. Spre a deosebi regiunile irotaționale de cele rotaționale, nu se pot alege curbe Γ de dimensiuni prea mari, fiindcă pot induce în eroare în ce privește caracterul unor regiuni din aria pe care o închid. De aceea se aleg curbe închise foarte mici și spre a înlătura inconvenientul că circulația variază în general cu valoarea absolută a vectorului arie al curbelor închise, se împarte circulația din jurul lor prin valoarea absolută a vectorului

lor arie, spre a obţine circulaţia specifică, adică raportată la conturul unităţii (foarte mici) de arie, se trece la limită pentru curbe ale căror dimensiuni scad în toate direcţiile, aşa încît valoarea absolută a vectorului lor arie A tinde către zero şi se obţine o valoare (scalară) de punct a circulaţiei specifice raportată la sensul ν al vectorului arie, asociat după regula burghiului drept sensului pozitiv al elementelor de linie $d\bar{r}$ de pe conturul Γ şi care se numeşte valoarea scalară a rotorului vectorului cîmp raportată la orientarea ν. şi se notează cu simbolul $\mathrm{rot}_\nu \bar{G}$

$$\mathrm{rot}_\nu G = \lim_{A_\Gamma \to 0} \frac{\int_\Gamma \bar{G} d\bar{r}}{A_\Gamma} \qquad (22)$$

Valoarea scalară $\mathrm{rot}_\nu \bar{G}$ variază cu orientarea ν, chiar dacă se menţine punctul din cîmp la care se referă. Valoarea $\mathrm{rot}_\nu \bar{G}$ e componenta unui vector după orientarea ν. Aceasta înseamnă că se poate găsi o orientare n sau orientarea corespunzătoare a curbei Γ), pentru care $\mathrm{rot}_\nu \bar{G} = R_{\nu\, max}$ calculat din (22) e maxim - şi astfel încît, dacă se dă curbei Γ orice altă orientare ν, valoarea corespunzătoare R_ν, raportată la acea orientare se obţine conform formulei (1o). In adevăr formula (1o) defineşte analitic un vector de componenţă R_ν în funcţiune de valorile scalare R_x, R_y, R_z din acelaşi punct ale componentelor în trei orientări trirectangulare cari formează un sistem drept de coordonate.

$$R_\nu = R_x \cos\alpha_{\nu x} + R_y \cos\alpha_{\nu y} + R_z \cos\alpha_{\nu z} \qquad (a)$$

Considerînd un tetraedru triîdreptunghic în P(fig 4o) şi observînd că circulaţia dealungul conturului Γ_ν al ariei A_ν e egală cu suma circulaţiilor dealungul contururilor $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ ale ariilor A_x, A_y şi A_z, fiindcă circulaţiile feţelor care se întîlnesc pe muchiile tetraedrului care nu mărginesc suprafaţa A_ν se iau în sensuri contrare pe aceste muchii şi se anulează două cîte două, urmează:

$$\oint_{\Gamma_\nu} \bar{G} d\bar{r} = \oint_{\Gamma_x} G dr + \oint_{\Gamma_y} \bar{G} d\bar{r} + \oint_{\Gamma_z} \bar{G} d\bar{r}.$$

Impărţind cei doi membri ai acestei relaţi cu mărimea

$$A_\nu = \frac{A_x}{\cos\alpha_{\nu x}} = \frac{A_y}{\cos\alpha_{\nu y}} = \frac{A_z}{\cos\alpha_{\nu z}}$$

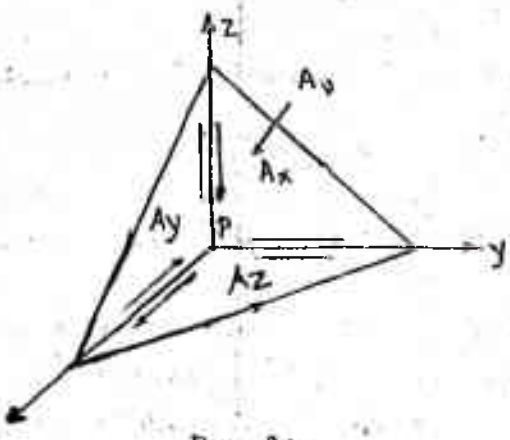


Fig.40

Figură pentru demonstrarea caracterului de vector al rotorului

unde $\alpha_{\nu x}, \alpha_{\nu y}, \alpha_{\nu z}$, sînt unghiurile dintre normala pe A_ν și normalele A_x, A_y și A_z se obține

$$\Gamma \frac{\oint_{\nu} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_\nu} = \frac{\oint_{x} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_x}\cos\alpha_{\nu x} + \frac{\oint_{y} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_y}\cos\alpha_{\nu y} + \frac{\oint_{z} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_z}\cos\alpha_{\nu z}$$

adică dacă se trece la limită pentru $A_\nu \to 0$, și deci $A_x \to 0$, $A_y \to 0$, și $A_z \to 0$ se obține relația (a) fiindcă prin definiție

$$R_\nu = \lim_{A_\nu \to 0} \frac{\oint_{\nu} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_\nu}; \quad R_x = \lim_{A_x \to 0} \frac{\oint_{x} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_x}$$

$$R_y = \lim_{A_y \to 0} \frac{\oint_{y} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_y}, \quad R_z = \lim_{A_z \to 0} \frac{\oint_{z} \bar{G}\, d\bar{r}}{A_z}.$$

Aceasta probează conform relației (1o) că R_ν e cîmpo nenta ortogonală a unui vector după orientarea ν. Urmează că se poate determina, în fiecare punct din cîmp, o orientare de versor $\bar{u}_n$ a vectorului arie al unei curbe Γ, pentru care valoarea rotorului e maximă, și că acest maxim e valoarea absolută a unui vector, care se numește rotorul vectorului cîmp în punctul considerat și se notează cu simbolul rot $\bar{G}$.

$$\text{rot}\,\bar{G} = \bar{u}_n \lim_{A \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \bar{G}\, d\bar{r}}{A} \qquad (23)$$

Regiunile unui cîmp de vectori în care rot $\bar{G} = 0$ se numesc irotaționale; cele în care rot $G \neq 0$ se numesc rotaționale.

12.3 Interpretarea rotorului în mecanica fluidelor. Dacă vectorul cîmp e viteza unui fluid, rotorul vectorului cîmp (adică al vitezei) e egal cu dublul vitezei unghiulare a particulelor de fluid (de unde derivă și numirea de rotor). În adevăr, fie un disc de rază r, foarte mică și care reprezintă particulă de fluid. Dacă $\bar{v}_m$ e viteza periferică mijlocie la marginea discului:

$$\oint_{\Gamma_\nu} \bar{v}\, d\bar{r} = 2\pi r\, v_m$$

Viteza unghiulară a discului în jurul normalei lui e egală cu $\frac{v_m}{r}$, adică

$$\omega_\nu = \frac{v_r}{r} = \frac{1}{2} \frac{\oint_{\Gamma_\nu} \bar{v}\, d\bar{r}}{\pi r^2} = \frac{1}{2} \operatorname{rot}_\nu \bar{v}$$

unde indicele v indică componenta mărimii $\operatorname{rot}_\nu \bar{v}$ referitoare la orientarea ν.

Fiindcă ω_ν e egal pentru orice direcţie, cu jumătate din componenta scalară corespunzătoare $\operatorname{rot}_\nu \bar{v}$ a mărimii $\operatorname{rot} \bar{v}$ viteza unghiulară e un vector $\bar{\omega}$, egal în fiecare punct cu jumătate din rotorul vitezei:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v}$$

12.4. Expresiunea rotorului în coordonate cartesiene

Fie $G_x, G_y G_z$ componentele vectorului cîmp $\bar{G}$ în punctul P de coordonate x,y,z (fig.41), şi un dreptunghiu de laturi Δy, Δz, perpendicular pe axa Ox şi cu centrul de simetrie în P. Valorile componentei z a vectorului cîmp pe laturile verticale se obţin în aproximaţie din valoarea ei în P prin dezvoltarea în serie Taylor a funcţiunii $G_z(x,y,z)$ şi întreruperea dezvoltării la termenul al doilea şi sînt:

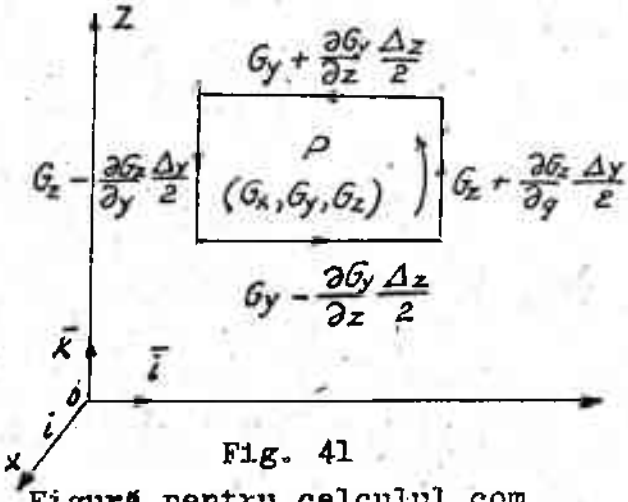


Fig. 41

Figură pentru calculul componentelor rotorului în coordonate cartesiene.

$$\left(G_z + \frac{\partial G_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right) \text{ şi}$$

$$\left(G_z - \frac{\partial G_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)$$

iar valorile componentei sale y pe laturile orizontale se obţin analog şi sînt:

$$\left(G_y + \frac{\partial G_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right) \text{ şi } \left(G_y - \frac{\partial G_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)$$

Calculînd circulaţia dealungul laturilor dreptunghiulare, adică înmulţind primele două expresiuni de mai sus

cu Δz şi $(-\Delta z)$ şi ultimele două cu (Δy) şi Δy, adunînd, împărţind cu aria $\Delta y \cdot \Delta z$ a dreptunghiului şi trecînd la limită cînd creşterile Δy şi Δz tind către zero aproximaţiile tind către valorile exacte, şi se obţine componenta x a rotorului în coordonate cartesiene:

$$\operatorname{rot}_x \bar{G} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[\left(Gz + \frac{\partial Gz}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z - \left(Gz - \frac{\partial Gz}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta z - \left(Gy + \frac{\partial Gy}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y + \left(Gy - \frac{\partial Gy}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y \right] = \frac{\partial Gz}{\partial y} - \frac{\partial Gy}{\partial z}$$

Prin permutare ciclică a indicilor se obţin celelalte două componente, şi deci:

$$\operatorname{rot} \bar{G} = \bar{i} \left(\frac{\partial Gz}{\partial y} - \frac{\partial Gy}{\partial z}\right) + \bar{j} \left(\frac{\partial Gx}{\partial z} - \frac{\partial Gz}{\partial x}\right) + \bar{k} \left(\frac{\partial Gy}{\partial x} - \frac{\partial Gx}{\partial y}\right) \quad (23\ a)$$

Cu ajutorul operatorului vectorial nabla, rotorul se poate pune sub forma de produs vectorial

$$\operatorname{rot} \bar{G} = \nabla \times \bar{G} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}$$

Aplicaţie: Rotorul unui cîmp de vectori plan, al cărui vector cîmp creşte cu puterea n a distanţei de la o axă fixă şi e dirijat pretutindeni tangenţial la cercurile cu centrul pe axă şi perpendiculare pe ea, adică dacă $\bar{v}_t$ e versorul tangenţiei:

$$\bar{G} = \bar{v}_t C r^n = \bar{v}_t r\, Cr^{n-1} = (-\bar{i}y + \bar{j}x) Cr^{n-1},$$

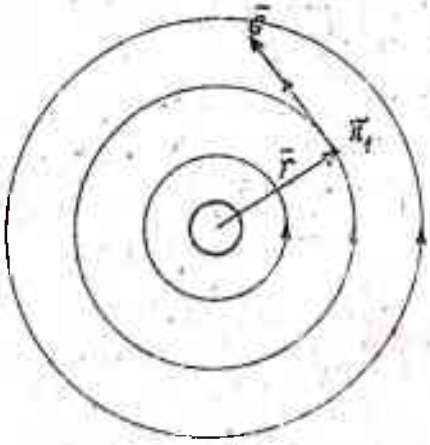


Fig. 42
Cîmp de vectori

unde x,y sînt coordonate cartesiene în planul vectorilor cîmp $\bar{G}$ şi cu originea pe axe de simetrie (fig.42). Mărimea $-iy+jx$ reprezintă vectorul $\bar{v}_t r$, perpendicular pe vectorul $\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y$ şi egal cu el în valoarea absolută, fiindcă $y^2+x^2=x^2+y^2$ şi $(\bar{i}x+\bar{j}y)(-\bar{i}y+\bar{j}x)=0$

Se obţine deci:

$$\text{rot } \bar{G} = \bar{k}\,\text{rot}_z \bar{G} = \bar{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\,Cr^{n-1}) - \frac{\partial}{\partial y}(y\,Cr^{n-1})\right] =$$

$$= \bar{k}\,(n+1)\,Cr^{n-1}$$

Dacă C e pozitiv, rotorul are deci o componentă pozitivă la $n > -1$; astfel componenta z a rotorului e negativă

Aplicaţie. Rotorul rotorului unui cîmp de vectori rot rot G. Calculăm componenta a expresiuni . Obţinem în coordonate cartesiene, cu ajutorul formulei (23 a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\text{div}\,\bar{G} - \Delta G_x$$

Celelalte două componente se obţin prin permutarea ciclică a indicilor şi deci

$$\text{(24 a)}\quad \text{rot rot } \bar{G} = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x}\,\text{div}\,\bar{G} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y}\,\text{div}\,\bar{G} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\,\text{div}\,\bar{G} -$$

$$-\bar{i}\,\Delta G_x - \bar{j}\,\Delta G_y - \bar{k}\,\Delta G_z = \text{grad div}\,\bar{G} - \Delta\bar{G}$$

dacă se înţelege prin $\Delta\bar{G}$ vectorul ale cărui componente după x,y,z sînt div grad G_x, div grad G_y şi div grad G_z.

12.5. Rotorul de suprafaţă a vectorului cîmp. Dacă există într-un cîmp o suprafaţă S_d pe care componenta tangenţială a vectorului cîmp e discontinuă (fig.39 jos) rotorul calculat din relaţia (24) e infinit pe acea suprafaţă. In acest caz se calculează circulaţia de-a lungul unei curbe închise formate din două linii care se aplică strîns şi corespund una alteia pe cele două feţe ale suprafeţei de discontinuitate, se împarte cu lungimea lor comună Δs, se trece la limită cînd lungimea Δs tinde către zero şi se obţine rotorul de suprafaţă al vectorului cîmp care se notează cu rots $\bar{G}$.

$$\text{(23 c)}\quad \text{rots } \bar{G} = \bar{u}_t \lim_{\Delta s \to 0} \frac{F_{t1}\Delta s - F_{t2}\Delta s}{\Delta s} = \bar{u}_{21} \times (\bar{F}_1 - \bar{F}_2) =$$

$$= \bar{u}_{21} \times \Delta\bar{F}_{12},$$

unde $\bar{u}_{21}$ e versorul normal pe suprafaţa de discontinuitate dirijat din spre partea 2 spre partea 1 . $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ sînt valorile vectorului cîmp de cele două părţi ale ei iar

$\Delta F_{12} - \bar{F}_1 - \bar{F}_2$

Aplicație: Rotorul de suprafață în cîmpuri de vectori ai vitezei $\bar{v}$ a unui lichid care circulă într-un vas circular cu viteza tangențială

$$\bar{v} = \bar{u}_t \frac{c}{r}$$

unde $\bar{u}_t$ e versorul tangențial și r e distanța dela axa de simetrie a vasului (fig.42). In cazul acesta rot $\bar{v} = 0$, adică particulele de lichid nu se învîrtesc în jurul axei lor și circulația vitezei e nulă dealungul tuturor curbelor închise Γ' care nu înconjoară miezul vasului. Circulația diferă însă de zero dealungul tuturor curbelor Γ care înconjoară miezul, fiindcă pe acestea viteza are componente tangențiale de un singur semn. Această împrejurare arată că există rotor de suprafață localizat pe suprafețele cilindrice formate de miez și de peretele exterior, deoarece componentele tangențiale ale vitezei (în acest caz însăși valorile vitezei) sînt discontinue pe aceste suprafețe. Din formula (23 c) rezultă pentru rotorul de suprafață al vitezei pe peretele miezului ($r = a$):

$$\text{rots } \bar{v} = \bar{\mu}_t \frac{c}{a},$$

și pentru rotorul de suprafață al vitezei pe peretele exterior ($r = b$):

$$\text{rots } \bar{v} = \bar{\mu}_t \frac{c}{b}$$

unde $\bar{\mu}_t$ e versorul dirijat în sensul pozitiv al axei de simetrie z a vasului.

12.6. Rotorul de linie al vectorului cîmp. Dacă există într-un cîmp de vectori numai linii pe care trebuie să le îmbrățișeze toate curbele de circulație diferită de zero, se spune că există dealungul acestor linii un rotor de linie, care se definește egal în valoare absolută cu valoarea corespunzătoare a circulației

$$\text{rot}_l \bar{S} = \bar{\mu}_t \oint_{\Gamma} \bar{G}\, d\bar{r} \qquad (23\ d)$$

unde $\bar{\mu}_t$ e vectorul unitate tangențial dirijat dealungul liniei de rotor, în sensul care se asociază după regula șurubului drept sensului pozitiv de pe curbele care închid linia, iar Γ e o curbă care îmbrățișează strîns linia de rotor (care o poate îmbrățișa oricît de larg dacă nu există un alt

fel de rotor în cîmp, fiindcă în cazul acesta circulaţia ar fi în mod necesar acelaşi valoare dealungul tuturor curbelor cari înconjoară o singură dată linia de rotor).

12.7. Teorema lui Stokes. Circulaţia vectorului cîmp continuu dealungul oricărei curbe închise Γ e egală cu fluxul rotorului lui prin orice suprafaţă S_Γ mărginită de curbă :

$$\oint_\Gamma \bar{G}\, d\bar{r} = \int_{S_\Gamma} \text{rot}\ \bar{G}\, d\bar{A} \qquad (25)$$

Impărţind suprafaţa S_Γ în elemente de arie $d\bar{A}$ şi observînd că după definiţia rotorului, rot $\bar{G}.d\bar{A}$ e circulaţia vectorului cîmp dealungul conturului elementului de arie $d\bar{A}$ şi că, la adunarea circulaţiilor corespunzătoare integralei din membrul drept al relaţiei lui Stokes, circulaţiile dealungul contururilor din interiorul curbei Γ se anulează două cîte două, fiind că circulaţiile corespunzătoare celor două elemente de suprafaţă care se mărginesc pe curbele interioare se iau în sensuri contrare dealungul aceloraşi porţiuni de curbă (fig.43) şi vectorul cîmp e presupus repartizat continuu în spaţiu, rămîne numai suma dealungul conturului exterior Γ, ale cărui elemente de linie mărginesc cîte un singur element de suprafaţă; această sumă reprezintă membrul stîng al expresiuni analitice a teoremei lui Stokes, care trebuia demonstrată.

Teorema lui Stokes transformă o integrală de linie în una de suprafaţă. Ea arată că fluxul rotorului unui cîmp de vectori are aceiaşi valoare prin toate suprafeţele care au acelaşi contur. Dacă se observă că oricari două din suprafeţele de acelaşi contur formează o suprafaţă închisă, şi se ţine seama de convenţia generală pentru orientările elementelor de arie $d\bar{A}$ ale suprafeţelor deschise şi de contur dat, ca şi ale suprafeţelor închise, se deduce că fluxul rotorului oricărui cîmp de vectori e nul prin orice suprafaţă închisă

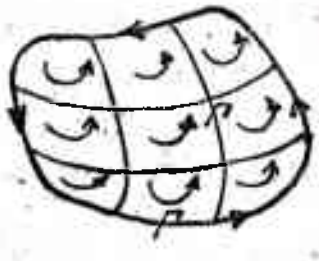


Fig.43
Figură pentru demonstrarea teoremei lui Stokes.

că adică divergenţa rotorului oricărui cîmp de vectori e

nulă.

$$\text{div rot } \bar{G} = 0,$$

relaţie care se poate demonstra şi cu ajutorul expresiunilor în coordonate ale divergenţei şi rotorului (v. aplicaţia de mai jos).

Această relaţie arată că o integrală de suprafaţă a vectorului cîmp $\bar{G}$ al unui cîmp de vectori, extinsă asupra unei suprafeţe deschise:

$$\int_{S_\Gamma} \bar{G}\, d\bar{A}$$

nu se poate transforma totdeauna într-o integrală de linie a unui alt cîmp de vectori $\bar{F}$, extinsă asupra conturului Γ al suprafeţei deschise

$$\oint_\Gamma \bar{F}\, d\bar{r},$$

transformarea putîndu-se face conform teoremei lui Stokes, numai dacă

$$\text{div } \bar{G} = 0$$

Aplicaţia: Expresiunea în coordonate cartesiene a divergenţei rotorului unui cîmp de vectori. Se obţine

$$\text{div rot } \bar{G} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y}\right) = 0$$

Aplicaţia: Expresiunea rotorului unui cîmp de vectori biscalar. Un cîmp de vectori se numeşte biscalar, dacă vectorul cîmp $\bar{G}_b$ admite o reprezentare de forma:

$$\bar{G}_b = U \text{ grad } V,$$

unde U şi V sunt două funcţiuni scalare de punct: $U(\bar{r})$ şi $V(\bar{r})$. Un cîmp biscalar admite suprafeţele V = const ca suprafeţe a căror traiectorii ortogonale sînt liniile de cîmp $\bar{G}_b$; acestea coincid cu liniile de cîmp ale vectorului grad V, fiindcă, în fiecare punct, $\bar{G}_b$ e paralel cu grad V. Dar $\bar{G}_b$ nu derivă dintr-un potenţial, adică nu admite suprafeţe echipotenţiale, fiindcă are un rotor care nu e nul. Calculăm în coordonate cartesiene componenta x a rotorului:

$$\text{rot}_x \bar{G} = \text{rot}_x (U \text{ grad } V) = \frac{\partial}{\partial y}\left(U \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(U \frac{\partial V}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} = \left[\text{grad } U \times \text{grad } V\right]_x$$

adică:

$$\text{rot } \bar{G}_b = \text{rot } (U \text{ grad } V) = \text{grad } U \times \text{grad } V.$$

Aceasta arată că rotorul e normal pe vectorul cîmp biscalar $\bar{G}_b$, care e paralel cu grad v

13. POTENȚIALUL SCALAR ȘI POTENȚIALUL VECTOR

13 1. Potențialul scalar. Studiul cîmpurilor irotaționale se simplifică introducînd conceptul de potențial scalar, fiindcă mărimile cari interesează în acest studiu se pot calcula din potențialul scalar și fiindcă se calculează mai simplu cu scalarii decît cu vectorii.

Circulația unui cîmp irotațional $\bar{G}_p$ e nulă dealungul tuturor curbelor închise $\oint \bar{G}_p d\bar{r} =$ Liniile de cîmp nu pot fi deci închise. Dacă se dau punctele P_o și P pe curba Γ, se poate scrie (fig 39)

$$\int_{C'} \bar{G}_p d\bar{r} + \int_{C''} \bar{G}_p d\bar{r} = 0$$

sau dacă se inversează limitele ultimei integrale, adică dacă se parcurg porțiunile de curbă C' și C'' de la P_o la P.

$$\int_{C'} \bar{G}_p d\bar{r} = \int_{C''} \bar{G}_p d\bar{r},$$

Cum porțiunea de curbă C' e arbitrară rezultă că integrala de linie a unui cîmp irotațional între două puncte oarecari nu depinde de porțiunea de curbă între ele dealungul căreia se calculează, ci numai de poziția celor două puncte, adică nu e nevoie să se indice decît limitele P_o și P ale integralei. Fie V_o valoarea arbitrară și cu semn schimbat a integralei de linie într-un punct P: valoarea ei cu semn schimbat V, într-un punct P, e deci:

$$V = V_o - \int_{P_o}^{P} \bar{G}_p d\bar{r}, \qquad (26)$$

oricare ar fi curba de integrare dintre P_o și P. Această relație determină la V_o dat, cîte o singură valoare scalară V pentru fiecare punct P din cîmp, adică ea determină un cîmp de scalari al cărui scalar cîmp V se numește potențialul scalar al cîmpului irotațional $\bar{G}_p$. Într-un cîmp rotațional nu se poate asocia în mod univoc fiecărui punct P o valoare scalară V, fiindcă integrala din (26) depinde și de curba de integrare dintre P_o și P.

Diferențiind relația (26), spre a obține variația potențialului scalar corespunzătoare deplasării în cîmp cu $d\bar{s}$,

de versor $\bar{u}_\nu$, urmează:

$$dV = -\bar{G}_p \, d\bar{s}_\nu = -\bar{u}_\nu \, \bar{G}_p ds_\nu$$

Comparînd cu relaţia (12) care conţine variaţia intensităţii oricărui cîmp de scalari se deduce:

$$\bar{G}_p = -\operatorname{grad} V \qquad (27)$$

In cuvinte: Se poate găsi totdeauna un cîmp de scalari V (potenţialul scalar), al cărui gradient cu semn schimbat să fie egal cu vectorul cîmp al unui cîmp irotaţional dat. Se mai spune că aceste cîmpuri derivă dintr-un potenţial scalar; de aceia cîmpurile irotaţionale se numesc şi cîmpuri potenţiale.

Aplicaţie: Potenţialul scalar al unui cîmp de vectori al cărui vector cîmp e proporţional cu puterea n a distanţei dela un punct O şi e dirijat pretutindeni în direcţia razelor vectoare:

$$\bar{G}_p = \bar{u}_r \, C \, r^n$$

Alegînd curba de integrare, pentru orice punct P, în care se calculează potenţialul dealungul razei vectoare $\overline{OP}$, se obţine:

$$V = V_0 - \int_0 Cr^n \, dr = V_0 - \frac{1}{n+1} Cr^{n+1}$$

13 2 Potenţialul vector. Studiul cîmpurilor $\bar{G}_s$ fără divergenţă sau solenoidale se simplifică introducînd conceptul de potenţial vector.

Fluxul unui cîmp fără divergenţă e nul prin orice suprafaţă închisă: $\int_\Sigma \bar{G}_s \, d\bar{A} = 0$. Liniile lui de cîmp nu pot începe şi nu se pot termina deci în cîmp. Dacă se alege o curbă închisă Γ pe suprafaţa Σ, pe care o împarte în două S_Γ' şi S_Γ'' se obţine:

$$\int_{S_\Gamma'} \bar{G}_s \, d\bar{A} = \int_{S_\Gamma''} \bar{G}_s \, d\bar{A}''$$

adică fluxul unui cîmp fără divergenţă are aceeaşi valoare prin toate suprafeţele cari au acelaşi contur Γ, ca şi fluxul rotorului unui vector (conform teoremei lui Stokes). Această proprietate a cîmpurilor de vectori fără divergenţă poate fi folosită şi pentru definirea lor. Urmează că se poate determina totdeauna un cîmp vectorial $\bar{a}$, numit potenţialul vector al cîmpului $\bar{G}_s$ de divergenţă nulă, astfel încît fluxul vectorului cîmp $\bar{G}_s$ prin orice suprafaţă care are conturul să fie egal

cu circulaţia vectorului cîmp $\bar{a}$ dealungul conturului Γ:

$$\int_S \bar{G}_s \, \bar{dA} = \oint_\Gamma \bar{a} \, d\bar{r} \qquad (28)$$

Fie $\bar{a}_1(\bar{r})$ un vector cîmp care satisface această relaţie, la $\bar{G}_s$ dat.

Acestei expresiuni i se poate adăugi orice cîmp potenţial de vectori, şi relaţia (28) rămîne valabilă. Potenţialul vector $\bar{a}$ e determinat deci numai pînă la un cîmp de vectori aditiv, potenţial, adică divergenţa lui nu e determinată prin relaţia (28). Asupra divergenţei lui se poate dispune deci în aşa fel, încît să se simplifice anumite calcule.

Urmează din (28) şi din teorema lui Stokes că se poate găsi totdeauna un cîmp de vectori $\bar{a}$, numit potenţialul vector al cîmpului de divergenţă nulă $\bar{G}_s$, astfel încît $\bar{G}_s$ să fie egal cu rotorul lui $\bar{a}$:

$$\bar{G}_s = \text{rot } \bar{a} \qquad (29)$$

Se mai poate afirma că pentru un cîmp fără divergenţă se poate scrie relaţia (29) fiindcă, luîndu-i divergenţa, se obţine

$$\text{div } \bar{G}_s = \text{div rot } \bar{a} = 0,$$

adică e satisfăcută relaţia identică div rot $\bar{a} = 0$. Se spune că un cîmp fără divergenţă derivă dintr-un potenţial vector. Pentru un cîmp cu divergenţă: (div $\bar{G} \neq 0$) nu se poate găsi un cîmp de vectori $\bar{a}$, astfel încît să fie satisfăcută relaţia (29) fiindcă, luîndu-i divergenţa, s-ar obţine div rot $\bar{a} \neq 0$, ceiace nu e posibil.

14. PROBLEMELE FUNDAMENTALE ALE TEORIEI CAMPURILOR DE VECTORI

14.1. Clasificarea cîmpurilor de vectori. Cîmpurile de vectori se clasifică în felul următor. Cîmpuri care au proprietatea că fluxul lor e nul prin toate suprafeţele închise cari se pot trasa în ele, şi că circulaţia lor e nulă în lungul tuturor curbelor închise cari se pot trasa în ele; ele se numesc cîmpuri laplaciene. (In cîmp laplacian de vector cîmp $\bar{G}_l$, poate fi derivat deci fie dintr-un potenţial scalar $\bar{G}_l = \text{grad } V_1$ fie dintr-un potenţial vector $\bar{G}_1 = \text{rot } \bar{a}_1$.)

Cîmpuri în care numai circulaţia e nulă în lungul

tuturor curbelor închise care se pot trasa în ele; ele se numesc cîmpuri potenţiale sau irotaţionale. Un cîmp potenţial, de vector cîmp $\bar{G}_p$, poate fi derivat deci numai dintr-un potenţial scalar $\bar{G}_p = -\operatorname{grad} V$

Cîmpuri în care numai fluxul e nul prin toate suprafeţele închise cari se pot trasa în ele; ele se numesc cîmpuri selenoidale. Un cîmp selenoidal, de vector cîmp $\bar{G}_s$, poate fi derivat deci dintr-un potenţial vector $\bar{G}_s = \operatorname{rot} \bar{a}$.

Cîmpuri în care nici fluxul nu e nul prin toate suprafeţele închise cari se pot trasa în ele, şi nici circulaţia nu e nulă în lungul tuturor curbelor închise cari se pot trasa între ele; ele se numesc cîmpuri generale. Un cîmp general nu poate fi derivat deci nici exclusiv dintr-un potenţial scalar şi nici exclusiv dintr-un potenţial vector.

14.2 Teoremele unicităţii. Vectorul cîmp $\bar{G}$ al unui cîmp de vectori e complect determinat în fiecare punct dintr-un domeniu a cărui frontieră e suprafaţa închisă Σ, dacă e dat fluxul lui prin orice suprafaţă închisă din interiorul domeniului şi circulaţia lui în lungul oricărei curbe închise din interiorul lui, şi dacă mai e dată, în fiecare punct al suprafeţei de frontieră Σ componenta normală pe ea G_n a vectorului cîmp. Domeniul considerat poate fi, fie cel interior, fie cel exterior suprafeţei de frontieră Σ.

In adevăr, să presupunem că $\bar{G}'$ şi $\bar{G}''$ ar fi două cîmpuri de vectori distincte care satisfac toate condiţiunile, adică au acelaşi flux prin toate suprafeţele închise din domeniu, aceiaşi circulaţie în lungul tuturor curbelor închise din domeniu şi aceiaşi componentă normală pe suprafaţa de frontieră, închisă: $G'_n = G''_n$. In acest caz, diferenţa dintre cei doi vectori cîmp: $\bar{D} = \bar{G}' - \bar{G}''$ este un cîmp de vectori care satisface următoarele trei condiţiuni: Are flux nul prin orice suprafaţă închisă $\int_\Sigma \bar{D}\, d\bar{A} = 0$, ceea ce arată că nici o linie unitate de cîmp nu se poate termina în domeniul care are frontiera Σ. Componenta vectorului cîmp $\bar{D}$ normală pe Σ e nulă: $D_n = 0 = G'_n - G''_n = 0$, adică liniile sale de cîmp nu pot ajunge din interiorul domeniului pînă la suprafaţă şi deci toate liniile sale de cîmp trebuie să fie închise şi situate în domeniul care are frontiera Σ. Cîmpul $\bar{D}$ mai satisface şi

...unea că, în lungul tuturor curbelor închise din domeniu, circulația lui e nulă $\oint \bar{D}\, d\bar{r} = 0$. Din această condiţiune rezultă că liniile de cîmp nu pot fi nici închise. In adevăr, dacă se înaintează dealungul unei astfel de linii de cîmp închise, vectorul cîmp $\bar{D}$ are componentele tangenţiale dirijate mereu în acelaş sens de circulaţie şi deci circulaţia lui dealungul curbei este cu siguranţă diferită de zero, prin opoziţie cu relaţia pe care o satisface $\bar{D}$. Rezultă că în interiorul domeniului considerat nu poate exista nici o linie de cîmp că adică în toate punctele din domeniul care are frontiera Σ cîmpul $\bar{D}$ e nul, şi deci $\bar{G}' = \bar{G}''$. Există deci un singur cîmp de vectori care satisface condiţiunile date impuse.

Cunoaşterea fluxului prin orice suprafaţă închisă echivalează cu cunoaşterea divergenţei (de volum, de suprafaţă de linie şi de punct) în orice punct, iar cunoaşterea circulaţiei în lungul oricărei curbe închise echivalează cu cunoaşterea rotorului (de volum, de suprafaţă şi de linie) în orice punct. Teorema demonstrată poate fi enunţată deci şi în felul următor: Vectorul cîmp $\bar{G}$ al unui cîmp de vectori e complect determinat în orice punct din fiecare dintre domeniile limitate de o suprafaţă închisă Σ, dacă se dau, în fiecare dintre aceste puncte, divergenţa şi rotorul vectorului cîmp $\bar{G}$ şi dacă se mai dă, în fiecare punct de pe suprafaţa Σ, componenta vectorului cîmp $\bar{G}$ normată pe această suprafaţă. - Aceasta teoremă se demonstrează mai precis cu ajutorul celei de a patra forme particulare a teoremei lui Green (18 c). Dacă $\bar{G}'$ şi $\bar{G}''$ sunt două soluţii distincte ale problemei, vectorul cîmp $D' = \bar{G}' - \bar{G}''$ satisface următoarele condiţiuni: $\operatorname{div} \bar{D} = \operatorname{div} \bar{G}' - \operatorname{div} \bar{G}'' = 0$; $\operatorname{rot} \bar{D} = \operatorname{rot} \bar{G}' - \bar{G}'' = 0$ şi $D_n = G'_n - G''_n = 0$. Rezultă că $\bar{D}$ derivă dintr-un potenţial scalar $\bar{D} = -\operatorname{grad} V$, că $\operatorname{div} \bar{D} = \Delta V = 0$ şi că $\frac{\partial V}{\partial s_n} = 0$ pe suprafaţa frontieră. Din relaţia (18 c) se obţine deci:

$$\int_\Sigma V \frac{\partial V}{\partial s_n}\, dA = 0 = \int_\Sigma \operatorname{grad}^2 V\, dv.$$

Cum elementele ultimei integrale sunt toate poziti- şi integrala e nulă, rezultă $\operatorname{grad} V = \bar{D} = 0$, ceiace demonstză teorema.

Dacă se cunoaşte divergenţa şi rotorul în întregul spaţiu şi dacă punctele în cari rot $\bar{G}$ şi div $\bar{G}$ diferă de zero ocupă un domeniu finit, divergenţa şi rotorul determină complect vectorul cîmp în fiecare punct din spaţiu, cum se demonstrează mai jos.

Această teoremă a unicităţii prezintă importanţa fiindcă, dacă se găseşte un cîmp de vectori $\bar{G}$, care are prin fiecare suprafaţă închisă un flux dat şi în lungul fiecărei curbe închise o circulaţie dată, respectiv un cîmp care are în fiecare punct divergenţă dată şi un rotor dat şi dacă componenta lui $\bar{G}$ normală pe frontiera domeniului are valori date pe această suprafaţă frontieră, acest cîmp de vectori e unica soluţie a problemei.

In cazul particular al cîmpurilor de vectori $\bar{G}_p$ cari derivă dintr-un potenţial scalar, potenţialul, şi deci vectorul cîmp, e univoc determinat şi în funcţiune de divergenţa vectorului cîmp în domeniu şi în funcţiune de valorile potenţialului scalar pe suprafaţa frontieră a domeniului. In adevăr dacă V' şi V" ar fi două soluţii distincte ale problemei, scalarul cîmp $V_d = V' - V''$ ar satisface în domeniu condiţiunea

$$\Delta V_d = \Delta V' - \Delta V'' = \operatorname{div} \bar{G}''_p - \operatorname{div} \bar{G}'_p = 0.$$

iar pe frontieră, condiţiunea $V_d = V'_\Sigma - V''_\Sigma = 0$. Din cea de a patra formă particulară a teoremei lui Green (18 c) se obţine deci, în acest caz:

$$\int_\Sigma V_d \frac{\partial V_d}{\partial s_n} \, d A = 0 = \int \operatorname{grad}^2 V_d \, dv.$$

Cum elementele ultimei integrale sunt toate pozitive şi această integrală e nulă, rezultă grad $V_d = 0$, adică V_d e constant în întregul domeniu. Fiind nul pe frontieră, valoarea lui constantă din interiorul domeniului e nulă, adică $V_d = V' - V'' = 0$, şi deci $V' = V''$: problema admite o singură soluţie.

14.3. Problema fundamentală a analizei cîmpurilor de vectori. Fie date, în fiecare punct din domeniul limitat de o suprafaţă Σ, mărimile div $\bar{G}$ şi rot $\bar{G}$. Vectorul cîmp care are această divergenţă şi acest rotor, se poate pune egal cu

suma dintre un vector cîmp potenţial $\bar{G}_p$, care derivă conform relaţiei (27) dintr-un potenţial scalar V, şi un vector cîmp solenoidal $\bar{G}_s$, care derivă, conform relaţiei (29), dintr-un potenţial vector $\bar{a}$. Vectorul cîmp $\bar{G} = \bar{G}_p + \bar{G}_s$ se poate pune deci sub forma

$$\bar{G} = - \text{grad } V + \text{rot } \bar{a} \qquad (30)$$

Un cîmp de vectori general are deci un vector cîmp care derivă în parte dintr-un potenţial scalar şi în parte dintr-un potenţial vector.

Conform teoremei unicităţii, potenţialul scalar V al vectorului cîmp $\bar{G}$ poate depinde numai de divergenţa vectorului cîmp $\bar{G}$ în domeniul considerat şi în condiţiunile pe frontieră Σ a domeniului, iar potenţialul vector $\bar{a}$ al vectorului cîmp $\bar{G}$ poate depinde numai de rotorul vectorului cîmp $\bar{G}$ în domeniul considerat şi de condiţiunile pe frontieră Σ. Condiţiunile pe frontiera Σ a domeniului consistă în darea componentei G_n a vectorului cîmp după normalele pe suprafaţa Σ. Acestor componente le corespunde un cîmp laplacian, care este atribuit părţii potenţiale, şi nu părţii rotaţionale a cîmpului $\bar{G}$, deşi un cîmp laplacian poate fi derivat atît dintr-un potenţial scalar, cît şi dintr-un potenţial vector. In general trebuie ca acest cîmp laplacian să fie atribuit părţii potenţiale $\bar{G}_p$ a cîmpului. Astfel condiţiunile cîmpului potenţial G_p sînt în domeniu :

$$\text{div } \bar{G}_p = \text{div } \bar{G} \qquad (31\ a)$$

şi pe frontiera domeniului :

$$G_{pn} = G_n \qquad (31\ b)$$

iar condiţiunile cîmpului solenoidal $\bar{G}_s$ sînt în domeniu :

$$\text{rot } \bar{G}_s = \text{rot } \bar{G} \qquad (31\ c)$$

şi pe frontiera domeniului :

$$G_{sn} = 0 \qquad (31\ d)$$

Cînd domeniul pentru care se pune problema e inferior suprafeţei de frontieră, mărimile G_n nu sînt complect arbitrare, ci trebuie să satisfacă, conform teoremei lui Gauss şi Ostrogradski, relaţia :

$$\int_{\Sigma} G_n \cdot d\Lambda = \int_{V_\Sigma} \text{div } \bar{G}\, dv \qquad (31\ e)$$

Problema fundamentală a analizei cîmpurilor de vectori consistă în a determina potenţialul scalar V al vectorului său cîmp $\bar{G}$, în funcţiune de divergenţa (31 a) a acestui vector cîmp într-un domeniu şi de condiţiunile pe frontieră (31 b), şi în a determina potenţialul vector $\bar{a}$ al vectorului său cîmp $\bar{G}$, în funcţiune de rotorul (31 c) al acestui vector cîmp în domeniu şi de condiţiunile pe frontieră (31 d).

Nu se cunoaşte soluţia generală explicită a problemei fundamentale a analizei cîmpurilor de vectori. Se poate da însă o soluţie generală explicită, dacă se cunosc şi valorile V ale potenţialului scalar V al vectorului cîmp căutat $\bar{G}$, pe frontiera Σ a domeniului (deşi aceste valori sînt determinate de celelalte condiţiuni impuse cîmpului $\bar{G}$, şi deci nu sînt arbitrare, ci trebuie să fie chiar cele corespunzătoare celorlalte condiţiuni). Problema determinării vectorului cîmp $\bar{G}$ al unui cîmp de vectori într-un domeniu, în funcţiune de divergenţa şi rotorul vectorului cîmp, ca şi în funcţiune de componentele normale ale vectorului cîmp pe frontieră şi de valorile potenţialului scalar pe frontieră, se numeşte problema generală. Rezolvăm această problemă.

14.4. <u>Soluţia explicită a problemei generale</u>. Dacă domeniul în care se cunosc divergenţa şi rotorul e domeniul din interiorul unei suprafeţe închise Σ pe care se cunosc componentele normale ale vectorului cîmp, problema se numeşte problemă generală interioară, iar dacă domeniul e cel din exteriorul suprafeţei Σ, problema se numeşte problema generală exterioară.

Rezolvăm mai întîi problema generală pentru potenţialul scalar, cu ajutorul formulei (19) a lui Green. Fie V potenţialul scalar într-un punct P şi R distanţa dintre acest punct şi elementele de arie $\overline{dA}$ ale suprafeţei frontieră Σ, respectiv dintre punctul P şi elementele de volum dv în care vectorul cîmp $\bar{G}_p$ are divergenţă: div $\bar{G}_p$ = - div grad V = $-\Delta V$. Cu aceste notaţii, formula (19) a lui Green are forma :

$$(19)\qquad \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial s_n} - V \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n} \right) dA = \int_{V_\Sigma} \frac{\Delta V}{R}\, dv \ ,$$

dacă punctul P se exclude din domeniul de integrare (fiindcă la apropierea de el mărimea $\frac{1}{R}$ tinde către infinit) şi dacă s_n

e lungimea de arc normală pe suprafaţa frontieră Σ şi derivata parţială în raport cu s_n se consideră după normala pe suprafaţă în sensul care arată din spre domeniul v_Σ spre exteriorul lui. Dacă punctul P, în care se calculează V, se găseşte în interiorul suprafeţei Σ (fig.45 a), îl excludem din domeniul de integrare cu ajutorul unei mici sfere Σ_0 care are centrul în P şi raza R_0, şi considerăm apoi limita expresiunii care se obţine de mai sus cînd R_0 tinde către zero. In acest caz frontiera Σ a noului domeniu e constituită nu numai de suprafaţa Σ_e a vechiului domeniu, ci şi de suprafaţa Σ_0 a sferei cu centrul în P. Derivarea parţială în raport cu arcul normal pe suprafaţa sferei Σ_0 fiind considerată spre exteriorul domeniului de integrare, e considerată spre centrul sferei Σ_0 adică e egală şi de semn contrar cu derivata în raport cu R_0.

$$\frac{\partial}{\partial s_n} = -\frac{\partial}{\partial R_0}$$

Se obţine deci din formula (19):

$$\int_{\Sigma_e}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial s_n} - V\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n}\right)dA_e + \int_{\Sigma_0}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial s_n} - V\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n}\right)dA_0 = \int_{V_\Sigma}\frac{\Delta V}{R}\,dv$$

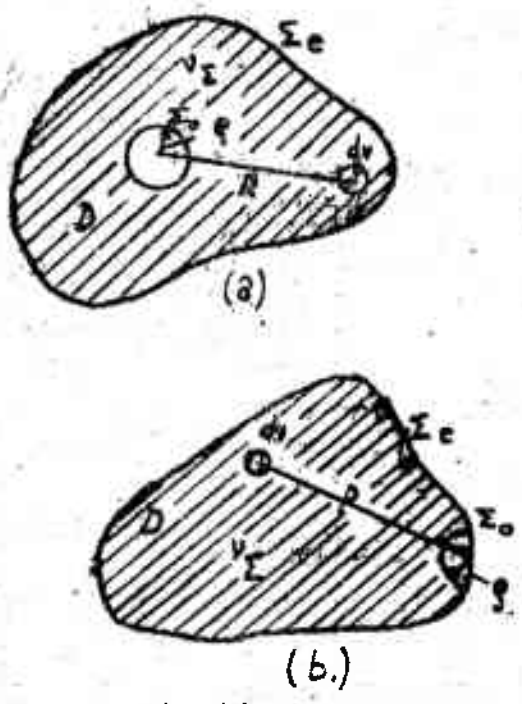


Fig.45

Figură pentru calculul potenţialului scalar, în interiorul unui domeniu (a) şi pe frontiera lui (b).

In cea de a doua integrală se obţine:

$$\lim_{R\to 0}\int_{\Sigma_0} V_0\frac{d\frac{1}{R_0}}{dR_0}dA_0 = \lim_{R\to 0}\left\{V\left(-\frac{1}{R_0^2}\right)\int_{\Sigma_0}dA_0\right\} =$$

$$= \lim_{R\to 0}\left\{-\frac{V}{R_0^2}\,4\pi R_0^2\right\} = -4\pi V_0 . \qquad (a)$$

Această formulă se poate obţine şi utilizînd cunoscuta teoremă a mediilor.

Dacă valoarea absolută maximă a derivatei potențialului V în raport cu R_0, pe suprafața sferei Σ_0, se notează cu indicele max, se obține în cea de a doua integrală:

$$\lim_{R_0\to 0}\left|\int_{\Sigma_0}\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial R_0}\,dA_0\right| \le \lim_{R_0\to 0}\int_{\Sigma_0}\frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial V}{\partial R_0}\right)_{max}dA_0 = \lim_{R_0\to 0}\left\{\frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial V}{\partial R_0}\right)_{max}\int dA_0\right\} =$$

$$= \lim_{R_0\to 0}\left\{\frac{4\pi R_0^2}{R_0}\left(\frac{\partial V}{\partial s_n}\right)_{max}\right\} = 0$$

adică limita considerată e nulă. Înlocuind aceste două limite în expresiunea de mai sus, se obține prin rezolvare în raport cu V:

$$(b)\quad V = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\Delta V}{R}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_e}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial s_n} - V\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial s_n}\right)dA_e$$

În această formulă v_Σ e iarăși întregul domeniu limitat de suprafață frontieră Σ_e. Notînd din nou suprafața frontieră Σ_e cu Σ și făcînd înlocuirea $\Delta V = -\operatorname{div}\bar{G}$, se obține:

$$(a)\quad V = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\operatorname{div}\bar{G}}{R}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial s_n} - V\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial s_n}\right)dA.$$

Dacă punctul P în care se calculează V, e situat pe suprafața frontieră Σ (fig.45 b) el se exclude din cîmp cu o emisferă, adică în integrala referitoare la suprafața Σ_0 se obține, în loc de (a):

$$(d)\quad \lim_{R_0\to 0}\int_{\Sigma_0} V\frac{\partial\frac{1}{R_0}}{\partial R_0}\,dA_0 = \lim_{R_0\to 0}\left\{-\frac{V}{R_0^2}2\pi R_0^2\right\} = -2\pi V,$$

și potențialul în acest punct are expresiunea

$$(e)\quad V_\Sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{\operatorname{div}\bar{G}}{R}\,dv + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial s_n} - V\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial s_n}\right)dA$$

Dacă punctul P e situat în exteriorul suprafeței frontieră Σ, el nu trebuie exclus din cîmp, și formula (19) nu permite să se calculeze potențialul V (fiindcă nu se cunosc condițiunile din exteriorul suprafeței Σ).

Dacă se alege ca suprafață Σ o sferă de rază ρ, cu centrul la distanță finită și se face ca raza ei să tindă către infinit, trebuie presupus că se cunoaște $\operatorname{div}\bar{G}$ în spațiul întreg. În acest caz, integrala de suprafață din expresiunea (e) e nulă dacă $\operatorname{div}\bar{G}$ e diferit de zero numai în puncte situate într-un domeniu finit avînd frontiera Σ' (fig.46 a).

Presupunem că soluția e reprezentată numai de primul termen

din membrul al doilea din (c), şi demonstrăm că, în aceste condiţiuni, el reprezintă întreaga sumă din (c). Se obţine cu notaţiile din figură :

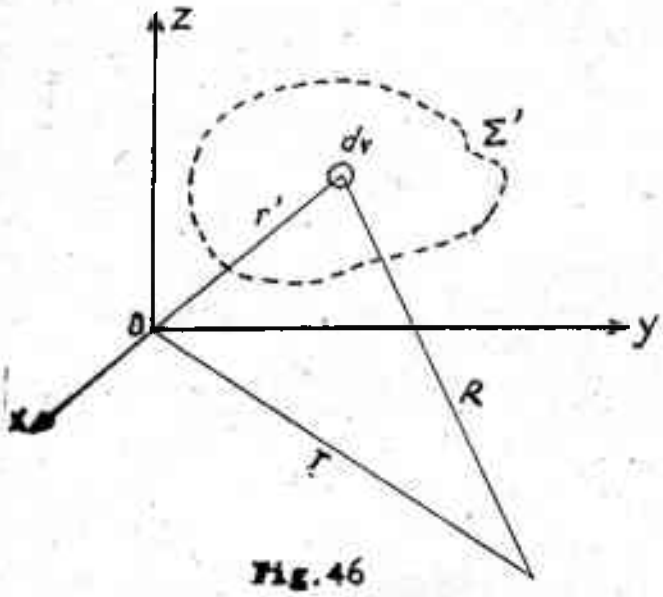


Fig.46

Figură pentru calculul potenţialului scalar cînd se dă divergenţa în întregul spaţiu.

$R = r + \varepsilon r' = r(1+\varepsilon\cdot\frac{r'}{r})$, cu $\frac{r'}{r}$ finit, unde $-1 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

Potenţialul V', corespunzător primului termen, e

$$V' = \lim_{r\to\infty} \int_r \frac{\operatorname{div}\bar{G}}{r(1+\varepsilon\frac{r'}{r})}\,dv =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int \operatorname{div}\bar{G}\,dv.$$

Dacă V' e soluţia, V' tinde deci ca $\frac{1}{r}$ către zero cînd r tinde către infinit, iar

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial V'}{\partial s_n} = \lim_{r\to\infty} \frac{\partial V'}{\partial r} =$$

$$= -\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \int \operatorname{div}\bar{G}\,dv, \text{ şi}$$

$\frac{\partial V}{\partial s_n}$ tinde ca $\frac{1}{r^2}$ către zero.

De altă parte

$$\lim_{r\to\infty} R = \lim_{r\to\infty} r;\ \lim_{r\to\infty} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n} = \lim_{r\to\infty} \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\partial \frac{1}{r(1+\varepsilon r'/r)}}{\partial r} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2}$$

Rezultă că în adevăr :

$$\lim_{r\to\infty} \int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V'}{\partial s_n} - V' \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n} \right) dA = \lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} \int \operatorname{div}\bar{G}\,dv - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \frac{1}{r^2} \int \operatorname{div}\bar{G}\,dv \right\} 4\pi r^2 = 0$$

şi că, deci termenul întîi din membrul al doilea reprezintă în acest caz, soluţia problemei propuse.

Dacă există şi divergenţă de suprafaţă, de linie şi de punct, se obţine pentru partea potenţialului care nu depinde de condiţiunile de frontieră :

$$(32)\quad V_d = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int \frac{\operatorname{div}\bar{G}}{R} dv + \int \frac{\operatorname{div}_s \bar{G}}{R} dA + \int \frac{\operatorname{div}_l \bar{G}}{R} ds + \right.$$

$$\left. + \sum \frac{\operatorname{div} p_i}{R_i} \bar{G} \right\}$$

în toate punctele care nu sînt situate pe suprafaţa frontieră.

Cazul dubleţilor de divergenţă

$$\bar{p} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{s}}{4\pi} \operatorname{div} p\, \bar{G}$$

cazul foilor de dubleţi de divergenţă, de puterea

$$\bar{\pi} = \frac{d\bar{p}}{dA}$$

şi cazul polarizaţiei cîmpului prin dubleţi de divergenţă, de polarizaţie

$$\bar{P} = \frac{d\bar{p}}{dV}$$

se rezolvă cum urmează :

Potenţialul unui dublet de divergenţă se obţine prin trecerea la limită din potenţialul unei perechi de puncte de divergenţă, la distanţele R şi R' de punctul în care se calculează V :

$$V = \frac{\operatorname{div} p\, \bar{G}}{4\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$$

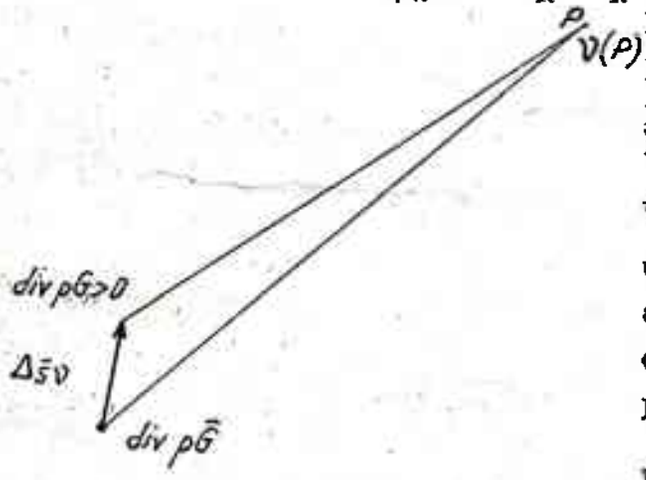


Fig.47

Figură pentru calculul potenţialului unui dublet de divergenţe.

Rezultă însă, cu notaţiile din figură :

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{d}{ds_\nu} \left(\frac{1}{R} \right) \Delta s_\nu =$$

$$= \frac{1}{R} - \Delta \bar{s}_\nu \operatorname{grad}' \frac{1}{R}$$

unde simbolul (') "prim" arată că gradientul se calculează deplasînd punctul de divergenţă. Deci

$$V_p = \frac{\Delta \bar{s}_\nu \operatorname{div} p\, \bar{G}}{4\pi} \operatorname{grad}' \frac{1}{R} =$$

$$= \bar{p} \operatorname{grad}' \frac{1}{R}$$

Prin însumare, respectiv integrare, se obţine potenţialul scalar corespunzător :

$$(33) \quad V_p = \int \bar{P} \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\, dv + \int \bar{\pi} \operatorname{grad}' \frac{1}{R}\, dA + \sum_{i=1}^{f} \bar{p}_i \operatorname{grad}' \frac{1}{R_i}$$

Soluţia problemei generale interioare pentru potenţialul scalar e deci :

$$(34) \quad V = V_d + V_p + \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial s_n} - V \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s_n} \right) dA$$

unde V_d şi V_p sînt daţi de formulele (32) şi (33).

Expresiunea potenţialului corespunzător foilor de

de dubleţi

$$V_{\vec{\Pi}} = \int \vec{\Pi} \operatorname{grad}' \frac{1}{R} \cdot d\vec{A} = \int \bar{u}_n \vec{\Pi} \, dA \operatorname{grad}' \frac{1}{R},$$

unde $\bar{u}_n$ e versorul normal pe $d\vec{A}$, admite o interpretare geometrică simplă. Într adevăr:

$$\bar{u}_n \operatorname{grad}' \frac{1}{R} = -\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n_v} = -\frac{d\frac{1}{R}}{dR} \cdot \frac{\partial R}{\partial n_v} = \frac{\cos(\vec{R}, d\vec{A})}{R^2}$$

şi deci

$$(33\,a) \qquad V_p = \int \vec{\Pi} \frac{\cos(\vec{R}, d\vec{A})}{R^2} dA = \int \vec{\Pi} \, d\Omega$$

unde $d\Omega$ e unghiul solid sub care se vede dA din P. Cînd densitatea de moment e constantă $\vec{\Pi} = \text{const}$, rezultă:

$$(33\,b) \qquad V_p = \vec{\Pi}\Omega$$

adică potenţialul într-un punct P e egal cu produsul dintre densitatea de moment şi unghiul solid sub care se vede din P foaia de dubleţi, elementele $d\Omega$ de unghiu solid, care se însumează în Ω, fiind contate pozitive sau negative, după cum raza formează un unghiu ascuţit sau obtuz cu $\vec{\Pi}$. Fiindcă în acest caz, foaia de dubleţi se vede din orice punct al ei sub un unghiu solid de valoare absolută 2π şi de valori de semne contrare pentru două puncte P' şi P", cari corespund unul altuia pe cele două feţe ale foii, rezultă că diferenţa corespunzătoare a potenţialelor e:

$$(33\,c) \qquad V_{p'} - V_{p''} = \vec{\Pi}(\Omega' - \Omega'') = \vec{\Pi} 2\pi - \vec{\Pi}(-2\pi) = 4\pi\vec{\Pi}$$

Potenţialul are un gradient de suprafaţă (13 d), şi creşte cu $4\pi\vec{\Pi}$ de cîte ori se trece prin foaia de dubleţi cu linia de integrare folosită pentru calculul potenţialului.

Dacă V e deci potenţialul unui punct al foii de dubleţi, se poate spune:

$$(33\,d) \qquad V_{p'} = V + 2\pi\vec{\Pi}; \quad V_{p''} = V - 2\pi\vec{\Pi}$$

Circulaţia vectorului cîmp e egală cu $4\pi k\vec{\Pi}$ de-alungul oricărei curbe închise care străbate de k ori în acelaşi sens foaia de dubleţi (sau înconjură de k ori conturul ei). Se obţine o circulaţie finită de-alungul unei curbe închise în cîmpul unei foi de dubleţi, care ar părea că trebuie să fie irotaţional în toată extinderea lui, fiindcă distanţa pe normala dintre suprafeţele de divergenţă pozitivă şi negativă, cari

constituie foaia de dubleţi, tinzînd către zero, integrala de linie a cîmpului (infinit) dintre ele nu mai e contată; deci rămîne numai integrala de linie din exteriorul lor. Astfel, potenţialul nu mai e însă funcţiune uniformă de punct, ci are în fiecare punct curent valori cari diferă între ele cu $4\pi k\Pi$

Spre a calcula potenţialul vector $\bar{a}$ din expresiunea (3o) în funcţiune de rotor, se ţine cont de expresiunea rotorului rotorului unui vector cîmp şi de (3o), şi se deduce:

$$\text{rot } \bar{G}_s = \text{rot rot } \bar{a} = \text{grad div } \bar{a} - \Delta\bar{a} = -\Delta\bar{a}.$$

unde s-a presupus, pentru simplificarea calculului, div $\bar{a}=0$, fiindcă $\bar{G}_s = \text{rot } \bar{a}$ nu depinde de div a. Relaţia de mai sus se poate descompune în trei relaţii componente:

$$\text{rot}_x \bar{G}_s = \Delta a_x; \quad \text{rot}_y \bar{G}_s = \Delta a_y; \quad \text{rot}_z \bar{G}_s = \Delta a_z;$$

şi problema determinării lui $\bar{a}$ în funcţiune de rot $\bar{G}$ se reduce la determinarea componentelor sale (trei funcţiuni scalare) în funcţiune de laplacienii lor, fiindcă pe frontieră $G_{sn}= 0$. Problema aceasta e rezolvată însă în (b) şi deci:

$$\bar{a} = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Delta\bar{a}}{R}\,dv = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\text{rot } \bar{G}}{R}\,dv \qquad (f)$$

Cînd există rotor de suprafaţă sau de linie, se adaugă în membrul drept o integrală analoagă de suprafaţă, şi una de linie.

$$\bar{a} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\text{rot } \bar{G}dv}{R} + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\text{rots } \bar{G}}{R}dA + \frac{1}{4\pi}\oint\frac{\text{rotl } \bar{G}}{R}dS \qquad (g)$$

Cazul rotorului de linie conduce la o formulă particulară, numită formula lui Biot - Savart - Laplace. Expresiunea acestei părţi a potenţialului vector din (g) este:

$$\bar{a} = \oint\frac{\text{rot l } \bar{G}}{4\pi R}\,ds = \frac{/\text{ rot l } \bar{G}\ /}{4\pi}\cdot\oint_r\frac{d\bar{r}}{R} \qquad (h)$$

unde integrala e extinsă dealungul unei curbe închise, fiindcă divergenţa rotorului oricărui cîmp de vectori e nulă, adică liniile de cîmp ale rotorului oricărui cîmp de vectori sunt închise. Pentru a calcula componenta x a vectorului cîmp după formula (3o), dx, dy, dz fiind componentele elementului de linie ds, trebuie observat că:

$$G_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{/\text{rot } 1\bar{G}/}{4\pi}\left\{\oint_\Gamma \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dz}{R}\right) - \oint_\Gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dy}{R}\right)\right\} = \frac{/\text{rot } 1\ \bar{G}/}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{dz(-y) - dy(-z)}{R^3}$$

Dacă se folosesc formule corespunzătoare pentru G_y şi G_z şi se strîng cele trei expresiuni într-o expresiune vectorială, se obţine :

$$\bar{G} = \frac{/\text{rot } 1\ \bar{G}/}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{d\bar{r} \times \bar{R}}{R^3} = \frac{/\text{rot } 1\ \bar{G}/}{4\pi}\oint \frac{d\bar{r} \times \bar{u}_R}{R^2}, \quad (35\ a)$$

unde $\bar{u}_R$ e versorul dirijat în direcţia şi sensul lui $\bar{R}$.

Dacă se observă că circulaţia cîmpului $\bar{G}$ de-a lungul oricărei curbe care înconjoară odată curba rotorului de linie este

$$/\oint \bar{G}\, d\bar{r}\ / = /\ \text{rot } 1\ \bar{G}/$$

şi că, după formula (33 c) aceiaşi circulaţie, în cîmpul unei foi de dubleţi uniforme şi cu acelaşi contur, e $4\pi\Pi$,rezultă că aceste două cîmpuri sînt identice cînd :

$$\Pi = \frac{/\ \text{rot } 1\ \bar{G}\ /}{4\pi} \quad (36)$$

şi deci potenţialul scalar, funcţiune neunivocă de punct, al cîmpului cu rotor de linie (sau cu o foaie de dubleţi) e :

$$V = \pm\Pi\Omega = \frac{/\ \text{rot } 1\ \bar{G}\ /}{4\pi}\Omega$$

de unde rezultă

$$\bar{G} = -\ \text{grad } V = \frac{/\text{rot } 1\ \bar{G}/}{4\pi}\text{grad}\,\Omega = \frac{/\text{rot } 1\ G/}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{d\bar{r} \times \bar{u}_R}{R^2}$$

ultima expresiune fiind obţinută în virtutea relaţiei (35 a) Rezultă

$$\text{grad}\,\Omega = \oint_\Gamma \frac{d\bar{r} \times \bar{u}_R}{R^2} = \oint_\Gamma \frac{d\bar{r} \times \bar{R}}{R^3}, \quad (g)$$

formulă care se poate stabili şi direct.

Rezultă că foaia de dubleţi de densitate de moment constantă dă acelaşi cîmp ca o linie de rotor de-a lungul conturului foii, şi de valoare a rotorului de linie dată de (36).

Ţinînd seama şi de expresiunile, se obţine expresiunea generală a potenţialului vector :

$$\bar{a} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{rot } \bar{G}}{R}\, dv + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\text{rot}_s\, \bar{G}}{R}\, dv + \frac{/\text{rot } 1\ \bar{G}/}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{dr}{R} \quad (35)$$

Introducînd valorile (32),(33),(34) şi (35) în relaţia (30), se obţine soluţia problemei generale a analizei cîmpurilor de vectori.

Aplicaţie. Să se determine cîmpul de vectori irotaţional, care are o singură divergenţă de punct: $\mathrm{div}\bar{G} = C$. Potenţialul scalar corespunzător e, după formula (30) :

$$V = \frac{C}{4\pi R}$$

şi cîmpul se calculează din formula (29) :

$$\bar{G} = -\operatorname{grad} V = -\bar{u}_R \frac{dV}{dR} = \bar{u}_R \cdot \frac{C}{4\pi r^2}$$

adică variază invers proporţional cu pătratul distanţei de la punctul de divergenţă.

14.5. Problema lui Neumann. Problema determinării potenţialului scalar al unui cîmp laplacian $\bar{G}_1$ într-un domeniu, în funcţiune de componentele normale $\bar{G}_{1n}$ ale vectorului cîmp pe suprafaţa frontieră a domeniului, se numeşte problema Neumann. După cum domeniul se găseşte în interiorul, respectiv în exteriorul suprafeţei frontieră, problema se numeşte problema Neumann interioară, respectiv exterioară. Fie u_i şi u_e două mărimi dintre care prima e egală cu unitatea în problema Neumann interioară şi e nulă în problema exterioară, iar cea de a doua e nulă în problema Neumann interioară şi egală cu unitatea în problema exterioară. Dacă $\frac{\partial V}{\partial s_{n_i}}$ şi $\frac{\partial V}{\partial s_{n_e}}$ sînt derivatele potenţialului după normala interioară, respectiv exterioară a suprafeţei frontieră, condiţiunile pe această suprafaţă, în oricare dintre cele două probleme, sînt :

$$(a) \qquad u_i \frac{\partial V}{\partial s_{ni}} + u_e \frac{\partial V}{\partial s_{ne}} = F ,$$

unde F e o valoare cu semn schimbat a componentei vectorului cîmp după normala interioară, respectiv exterioară, a suprafeţei frontieră.

Dacă e satisfăcută condiţiunea (31 e), cu $\mathrm{div}\bar{G}_1 = 0$, problema Neumann admite o soluţie şi una singură. Pentru a o găsi se încearcă să se exprime potenţialul sub forma

$$(37) \qquad V = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{R} dA ,$$

unde R e distanţa dintre dA şi punctul lui V, şi rămîne să se de-

termine astfel funcţiunea pe frontieră, încît V să fie soluţia problemei. Funcţiunea σ reprezintă, în acest caz, o divergenţă de suprafaţă a vectorului cîmp $\vec{G}_1$ pe frontiera domeniului, cum arată comparaţia cu (32). Potenţialul V, astfel determinat, e potenţialul unui cîmp laplacian, cum se poate verifica şi direct. In acest caz

$$\frac{\partial V}{\partial s_{ni}} = -\frac{\partial V}{\partial s_n} - 2\pi\sigma \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial s_{ne}} = \frac{\partial V}{\partial s_n} + 2\pi\sigma .$$

Introducînd în expresiunea (a), se obţine următoarea ecuaţie integrală pe care trebuie să o satisfacă mărimea σ, pentru ca V să satisfacă condiţiunile pe frontieră ale problemei Neumann, şi deci (37) să fie unica soluţie, conform primei teoreme a unicităţii:

$$(37\ a) \qquad (u_i + u_e) \int \frac{\partial}{\partial s_n} \left(\frac{\sigma}{R}\right) dA - (u_e - u_i)\, 2\pi\sigma = F .$$

In general rezolvarea acestei ecuaţii integrale prezintă dificultăţi, şi nu există o formă explicită a soluţiei problemelor Neumann interioară sau exterioară.

14.6. Problema lui Dirichlet. Problema determinării potenţialului scalar V al unui cîmp laplacian G_1 într-un domeniu în funcţiune de valorile sale V_Σ pe suprafaţa frontieră a domeniului, presupuse cunoscute, se numeşte problema lui Dirichlet. După cum domeniul se găseşte în interiorul, respectiv în exteriorul suprafeţei frontieră, problema se numeşte problema Dirichlet interioară, respectiv exterioară. Fie u_i şi u_e două mărimi, dintre cari prima e egală cu unitatea în problema Dirichlet interioară şi e nulă în problema exterioară, iar cea de a doua e nulă în problema Dirichlet interioară şi egală cu unitatea în problema exterioară. Dacă V_i şi V_e sunt valorile potenţialului pe "faţa" interioară, respectiv exterioară a suprafeţei frontieră Σ, condiţiunile pe această suprafaţă, în oricare dintre cele două probleme sunt

$$u_i V_i + u_e V_e = F \qquad (b)$$

unde F e valoarea dată V_Σ a potenţialului pe frontieră, în problema propusă.

Problema Dirichlet interioară admite o soluţie în funcţiune de valorile F date, şi una singură (problema

exterioară o admite numai în anumite condiţiuni). Pentru a o găsi, se încearcă să se exprime potenţialul sub forma:

$$(38) \quad V = \frac{1}{4\pi}\int \Pi \frac{\partial}{\partial n_n}\left(\frac{1}{R}\right) dA, \qquad (37)$$

unde R e distanţa dintre dA şi punctul lui V, şi rămîne să se determine astfel funcţiunea Π pe frontieră, încît V să fie soluţia problemei. Funcţiunea Π reprezintă, în acest caz, o putere a foii de dubleţi de divergenţă ai cîmpului $\bar{G}_1$ pe frontiera domeniului, normală pe această frontieră, cum arată comparaţia cu (32). Potenţialul V astfel determinat e potenţialul unui cîmp laplacian în domeniu, cum se poate verifica şi direct. In acest caz:

$$V_1 = v + 2\pi\Pi; \qquad V_e = V - 2\pi\Pi.$$

Introducînd în expresiunea (b), se obţine următoarea ecuaţie integrală pe care trebuie să o satisfacă funcţiunea Π pentru ca V să satisfacă şi condiţiunile pe frontieră ale problemei Dirichlet, adică să fie unica ei soluţie conform celei de a doua teoreme a unicităţii.

$$(38\ a) \quad (u_1 + u_e)\int \Pi \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial n_n} dA + (u_e - u_1)\, 2\pi\Pi = F$$

In general rezolvarea acestei ecuaţii integrale prezintă dificultăţi - şi nu există o formă explicită a soluţiei problemelor Dirichlet, interioară sau exterioară.

g. <u>Potenţialul logaritmic</u>. In cîmpurile plane, forma (19) a teoremei lui Green nu e aplicabilă în plan şi trebuie folosită formula (19 a). Prin consideraţii analoage cu cele făcute în legătură cu figura 45, dar în plan (adică operînd cu cercuri de arie $2\pi\rho$ în locul suprafeţelor sferice de arie $4\pi r^2$), se obţine în loc de (32):

$$V_{dp} = \frac{-1}{2\pi}\left\{\int \mathrm{div}_p \bar{G}\, \mathrm{In}\rho\, dA + \int \mathrm{div}_{pe}\bar{G}\, \mathrm{In}\rho\, ds + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}_{p_{pi}} \bar{G}\, .\, \mathrm{In}\rho_i\right\},$$

cu o notaţie uşor de interpretat. In loc de (33) se obţine.

$$V_{p_p} = -\left\{\int \bar{P}_p \mathrm{grad}'\mathrm{In}\rho\, dA + \int \Pi_p \mathrm{grad}'\mathrm{In}\rho\, ds + \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_{pi}\, \mathrm{grad}'\mathrm{In}\rho_i\right\}$$

şi în loc de (34)

$$V_p = V_{dp} + V_{p_p} + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left(V\frac{\partial \mathrm{In}\rho}{\partial n_n} - \mathrm{In}\rho\frac{\partial V}{\partial n_n}\right) ds_r$$

In loc de (35) se obţine :

$$\bar{a}_p = -\left\{\int \mathrm{rot}_p \bar{G} \ln\rho \, dA + \int \mathrm{rot}_{pl} \bar{G} \ln\rho \, ds + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}_{p_{pi}} \bar{G} \ln\rho_i\right\},$$

unde toţi rotorii sînt perpendiculari pe planele în care sînt conţinuţi vectorii cîmp $\bar{G}$. Potenţialele V_p şi $\bar{a}_p$ se numesc potenţialele logaitmice, spre deosebire de V şi $\bar{a}$, care se numesc potenţiale newtoniene.

15. INTENSITATEA SI INTENSITATEA-INDUCTIE A CIMPURILOR DE VECTORI POLARIZATE

Fie $\bar{G}'$ vectorul cîmp al unui cîmp de vectori în interiorul unei mici suprafeţe închise Σ_o, din care s-a suprimat polarizaţia de dubleţi $\bar{P}$, suprafaţa care închide volumul v_i şi lasă în exteriorul ei volumul v_e. Vectorul $\bar{G}'$ se calculează din potenţialul scalar şi din potenţialul vector ca vectorul cîmp $\bar{G}$, cu deosebirea că integrala din termenul referitor la polarizaţie al potenţialului scalar, adică primul termen din expresiunea (33), se extinde numai asupra volumului v_e. Se obţine deci :

$$\bar{G} - \bar{G}' = -\mathrm{grad}\left[\int_v \bar{P}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dv - \int_{v_i} \bar{P}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dv\right] =$$

$$= -\mathrm{grad}\int_{v_i} \bar{P}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dv .$$

Folosind identitatea

$$\mathrm{div}'\frac{\bar{P}}{R} = \bar{P}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,\mathrm{div}'\,\bar{P}$$

şi teorema lui Gauss şi Ostrogradscki, se obţine :

$$\bar{G} - \bar{G}' = -\mathrm{grad}\int_{v_i}\frac{\mathrm{div}'\bar{P}}{R}dv + \mathrm{grad}\int_{v_i}\mathrm{div}'\,\frac{\bar{P}}{R}\,dv =$$

$$-\mathrm{grad}\int_{v_i}\frac{\mathrm{div}'\bar{P}}{R}\,dv + \int_{\Sigma_o}\mathrm{grad}\left(\frac{\bar{P}d\bar{A}}{R}\right) = -\int_{v_i}\mathrm{grad}\,\frac{\mathrm{div}'\bar{P}}{R}\,dv -$$

$$-\int_{\Sigma_o}\frac{(\bar{P}d\bar{A})\bar{R}}{R^3}$$

Limita $\bar{G}_p$ a lui $\bar{G}'$ cînd volumul v_i tinde către zero, este deci:

$$\bar{G}_p = \bar{G} + \lim\int_{\Sigma_o}\frac{(\bar{P}d\bar{A})\bar{R}}{R^3} \qquad (a)$$

adică diferă de $\bar{G}$.

Cînd se trece la limită în ultima integrală, dimensiunile suprafeţei închise Σ_ε scad destul pentru ca $\bar{P}$ să tindă către o valoare constantă, aşa încît valoarea integralei şi deci a lui $\bar{G}_p$ depinde numai de forma, nu şi de dimensiunile suprafeţei Σ_ε fiindcă două suprafeţe închise, omotetice în raport cu punctul din interior în care se determină G_p, dau aceiaşi valoare a integralei. Cînd integrala de suprafaţă din (a) nu e nulă, $\bar{G}p$ nu tinde către $\bar{G}$, deşi dimensiunile suprafeţei Σ_ε tind către zero. Relaţia (a) arată că, dacă într-un cîmp de vectori nu se cunoaşte vectorul cîmp $\bar{G}$ şi polarizaţia $\bar{P}$, ajunge să se cunoască vectorul $\bar{G}p$, pentru două forme ale suprafeţei Σ_ε pentru care integrala de suprafaţă din (a) are valori diferite, şi se pot determina vectorii $\bar{G}$ şi $\bar{P}$.

In electromagnetism se foloseşe în acest scop, formele de canal local foarte strîmt şi fantă locală pentru volumul din suprafaţa Σ_ε dîndu-se aceiaşi direcţie axei canalului, respectiv normalei pe fantă. Calculul se efectuează simplu, alegînd un canal cilindric circular şi o fantă de asemenea cilindrică circulară. Efectuăm deci calculul pentru un cilindru mic, pentru ca $\bar{P}$ să poată fi considerat constant, şi apoi particularizăm pentru canal şi fantă. Fie $\bar{u}_z$ versorul axei cilindrului ρ şi 2 h raza şi înălţimea lui, z, ρ şi α coordonatele cilindrice ale unui punct într-un sistem de coordonate cu originea O în centrul cilindrului cu axa z în axa cilindrului şi cu originea unghiurilor α în planul determinat de versorul $\bar{u}_z$ şi de polarizaţia locală $\bar{P}$ (fig.48).

Elementele de arie $d\bar{A}_s$ şi $d\bar{A}_i$ ale bazelor superioară şi inferioară sînt $d\bar{A}_s = -d\bar{A}_i = \bar{u}_z \rho\, d\alpha\, d\rho$, valoarea produsului scalar $\bar{P}\, d\bar{A}$ pe un element de arie presupus situat la unghiul α este $\bar{P}d\bar{A} = P_z \rho\, d\alpha\, d\rho$ dacă P_z e componenta z a polarizaţiei, iar $R = \sqrt{\rho^2 + h^2}$. Elementele de arie $d\bar{A}_l$ ale suprafeţei laterale sînt $d\bar{A}_l = \bar{u}_\rho\, a\, d\alpha\, dz$, dacă $\bar{u}_\rho$ e versorul razelor ρ. Dacă se aleg două axe de coordonate ortogonale O_x şi O_y, în planul care trece prin O şi e paralel cu bazele, astfel încît Ox să coincidă cu proiecţia polarizaţiei $\bar{P}$ pe acest plan rezultă deci: $dA_x = a \cos\alpha .\, d\alpha\, dz$; $dA_y = a \sin\alpha .\, d\alpha\, dz$. Produsul scalar $\bar{P}d\bar{A}$ corespunzător elementului $d\bar{A}$ este $\bar{P}d\bar{A} =$

$= P_x \cos\alpha \cdot d\alpha$, dz, iar $R = \sqrt{a^2 + z^2}$. Componenta z a integralei din (a) devine deci, conţinînd de două ori integrala privitoare la baza de sus, pentru a ţine seama de integrala privitoare la baza de jos:

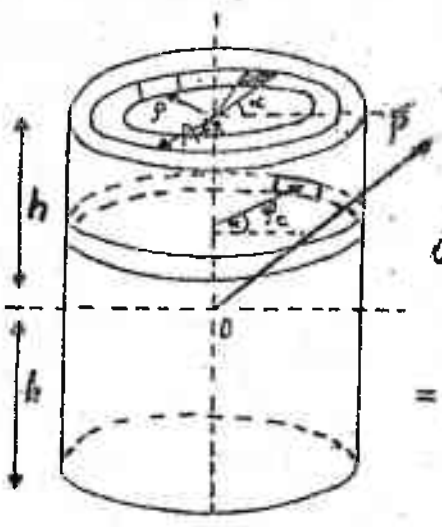


Fig.48
Suprafaţă de cilindru într-un cîmp de vectori polarizat.

$$\bar{U}_z \int \frac{(\bar{P}\nabla\bar{A})\bar{R}}{R^3} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{hP_x\rho\,d\alpha\,d\rho}{(\rho_0^2+h^2)^{3/2}} + \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{2\pi+h} \frac{zP_x a\cos\alpha\,d\alpha\,dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi h\int_0^{a} \frac{P_x\rho\,d\rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} = 4\pi P_z\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2/h^2+1}}\right)$$

Componenta y a integralei e nulă, iar componenta x e:

$$u_x \int \frac{(\bar{P}\nabla\bar{A})R}{R^3} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\rho\cos\alpha P_x\,d\alpha\,d\rho}{(\rho^2+h)^{3/2}} + \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{+h} \frac{P_x a^2\cos\alpha\,d\alpha\,dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \pi a^2 P_x \int_{-h}^{+h} \frac{dz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi P_x \frac{1}{\sqrt{a^2/h^2+1}}$$

Dacă se notează cu γ unghiul format de axa cilindrului cu dreapta care uneşte centrul lui cu un punct al circumferinţei unei baze:

$$\cos\gamma = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$\bar{u}_x$ fiind versorul direcţiei componentei P_x a polarizaţiei, urmează deci din (a):

$$\bar{G}_p = \bar{G} + 4\pi\bar{u}_z P_z(1-\cos\gamma) + 2\pi\bar{u}_x P_x\cos\gamma = \bar{G} + 2\pi\bar{u}_z(\bar{P}\bar{u}_z)(2-3\cos\gamma) + 2\pi\bar{P}\cos\gamma.$$

Pentru canalul foarte strîmt ($\lim \frac{a}{h} = 0$; $\cos\gamma = 1$; $\bar{u}_z = \bar{u}_y$) urmează:

$$\bar{G}_{cy} = \bar{G} + 2\pi\left[\bar{P} - \bar{u}_y(\bar{P}\bar{u}_y)\right], \qquad (39\ a)$$

şi componenta în lungul axei a canalului, a vectorului cîmp d în el devine

$$\bar{u}_y\bar{G}_{cy} = \bar{u}_y\bar{G}$$

adică egală cu componenta respectivă a vectorului cîmp $\bar{G}$ (deşi vectorii $\bar{G}_{c\varphi}$ variază odată cu φ).

Integrala de linie a vectorului cîmp $\bar{G}$ dealungul unei linii oarecare e deci egală cu integrala de linie a vectorilor $\bar{G}_{c\varphi}$ dealungul aceleiaşi linii:

Dacă axa canalului e paralelă cu $\bar{P}$, se obţine

$$\bar{G}_{cp} = \bar{G}, \qquad (39\ c)$$

adică chiar vectorul cîmp.

Pentru fanta, adică pentru discul foarte plat ($\lim \frac{h}{a} = 0$; $\cos \varphi = 0$; $\bar{u}_z = u_\varphi$) urmează:

$$G_{f\varphi} = \bar{G} + 4\pi \bar{u}_\varphi (P, \bar{u}_\varphi), \qquad (40\ a)$$

şi componenta perpendiculară pe fantă a vectorului cîmp din el devine:

$$\bar{u}_\varphi G_{f\varphi} = \bar{u}_\varphi \left[\bar{G} + 4\pi \bar{P} \right]$$

adică egală cu componenta respectivă a vectorului $\bar{G} + 4\pi \bar{P}$ (deşi vectorii $\bar{G}_{c\varphi}$ variază odată cu φ).

Fluxul vectorului cîmp $\bar{G} + 4\pi \bar{P}$ printr-o suprafaţă oarecare e deci egal cu fluxul vectorului $\bar{G}_{f\varphi}$ prin aceiaşi suprafaţă.

Dacă normala pe fantă e paralelă cu $\bar{P}$ se obţine

$$G_{fp} = \bar{G} + 4\pi \bar{P}. \qquad (40\ c)$$

Vectorul $\bar{G}_{cp} = G$ se numeşte intensitatea cîmpului de vectori, iar vectorul $G_{fp} = G + 4\pi \bar{P}$, care diferă de $\bar{G}_{cp}$ numai în cîmpurile polarizate, se numeşte intensitatea-inducţie a cîmpului de vectori.

Scăzînd relaţia (32 a) membru cu membru din relaţia (33 a) şi presupunînd că fanta e perpendiculară pe canal ($\bar{u}_{\varphi f} = \bar{u}_{\varphi c} = u_\varphi$), urmează

$$\bar{G}_{f\varphi} - \bar{G}_{c\varphi} = 6\pi \bar{u}_\varphi (P u_\varphi) - 2\pi \bar{P}. \qquad (40\ d)$$

Diferenţa dintre vectorii cîmp într-o fantă fără polarizaţie, perpendiculară pe un canal, şi în acel canal fără polarizaţie, e maximă şi egală cu $4\pi \bar{P}$ cînd axa canalului e paralelă cu $\bar{P}$. Dînd sistemului canal fantă toate orientările posibile şi determinînd direcţia normalei pe fantă (adică şi direcţia canalului) pentru care diferenţa dintre vectorii cîmp locali în fantă şi în canal e maximă, se ob-

---

Fasc.59:cda,nr.77/955-Bazele Electrotehnicii.

ţine deci direcţia locală a polarizaţiei, valoarea absolută a polarizaţiei e cîtul valorii absolute a acestei diferenţe prin numărul 4π, iar sensul polarizaţiei $\bar{P}$ e sensul care duce din spre extremitatea vectorului cîmp în canal spre extremitatea vectorului cîmp în fantă, dacă aceştia au aceeaşi origine, cum urmează din relaţia

$$\bar{P} = \frac{\bar{G}_{fp} - \bar{G}_{cp}}{4\pi} \qquad (40\ c)$$

Existenţa unei diferenţe între vectorii cîmp în fantă şi în canalul perpendicular pe ea e deci şi criteriul existenţei unei polarizaţii a cîmpului de vectori. Aceasta prezintă importanţă în Electromagnetism, fiindcă permite stabilirea experimentală a polarizaţiei cîmpurilor electrice şi magnetice.

16. GRADIENTUL, DIVERGENŢA, ROTORUL ŞI LAPLACIANUL ÎN COORDONATE CURBILINII ORTOGONALE

Componentele 1, 2 şi 3 ale gradientului se obţin ţinînd seama de (11 a):

$$grad_1 V = \frac{\partial V}{\partial s_1} = \frac{1}{g_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\ ;\ grad_2 V = \frac{\partial V}{\partial s_2} = \frac{1}{g_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\ ;\ grad_3 V = \frac{\partial V}{\partial s_3} = \frac{1}{g_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}$$

şi deci

$$(41) \qquad grad\, V = \frac{\bar{u}_1}{g_1}\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\bar{u}_2}{g_2}\frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\bar{u}_3}{g_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\ ,$$

unde $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ şi $\bar{u}_3$ sunt versorii în direcţiile 1, 2 şi 3.

Expresiunea divergenţei se obţine cu ajutorul teoremei lui Gauss observînd că fluxul prin suprafaţa unui element de volum, într-o direcţie, e diferenţiala, după elementul de linie corespunzător, a produsului componentei corespunzătoare a vectorului de cîmp $\bar{G}$ prin elementul corespunzător de arie. De exemplu, fluxul în direcţia 1 e: $\frac{\partial}{\partial s_1}(G_1 dA_1)\, ds_1$ şi e dat de expresiuni analoage în celelalte direcţii. Adunîndu-le, se obţine cu ajutorul teoremei lui Gauss:

$$(42) \quad div\, \bar{G} = \frac{1}{\Delta v}\left[\frac{\partial(G_1 dA_1)}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial(G_2 dA_2)}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial(G_3 dA_3)}{\partial s_3} ds_3\right] =$$

$$= \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left[\frac{\partial(g_2 g_3 G_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(g_3 g_1 G_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(g_1 g_2 G_3)}{\partial x_3}\right].$$

Expresiunea rotorului se obține cu ajutorul teoremei lui Stokes, observînd că circulația vectorului cîmp $\bar{G}$ de-alungul conturului elementului de arie dA_1 e egală cu diferențiala după dx_2 a produsului scalar dintre G și elementul de linie ds_3 minus diferențiala după ds_3 a produsului scalar dintre G și elementul de linie ds_2 și că se obțin două expresiuni analoage deslungul contururilor celorlalte două elemente de arie. Adunînd aceste trei expresiuni, fiecare înmulțită cu versorul respectiv $\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3$, și ținînd seama de teorema lui Stokes, se obține:

$$(43)\quad rot\,\bar{G} = \frac{\bar{u}_1}{g_1 g_3}\left[\frac{\partial(g_3 G_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(g_2 G_2)}{\partial x_3}\right] + \frac{\bar{u}_2}{g_2 g_3}\left[\frac{\partial(g_1 G_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(g_3 G_3)}{\partial x_1}\right]$$

$$+ \frac{\bar{u}_3}{g_1 g_2}\left[\frac{\partial(g_2 G_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(g_1 G_1)}{\partial x_2}\right]$$

Din expresiunea gradientului și a divergenței se obține expresiunea laplacianului

$$div\ grad\ V = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{g_2 g_3}{g_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{g_1 g_3}{g_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{g_1 g_2}{g_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)\right]$$

a) In sistemul de coordonate cilindrice $x_1 = z; x_2 = r; x_3 = \alpha$; expresiunea pătratului elementului de linie este

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 (d\alpha)^2$$

și deci:

$$g_1 = g_z = 1;\ g_2 = g_r = 1;\ g_3 = g_\alpha = r$$

Expresiunea gradientului (43) devine

$$grad\ V = \bar{u}_z \frac{\partial V}{\partial z} + \bar{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \bar{u}_\alpha \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \qquad (41\ a)$$

unde u_z, u_r și u_α sunt versorii după liniile de coordonate, atașați punctului în care se calculează gradientul. Expresiunea divergenței (42) devine:

$$div\,\bar{G} = \frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r G_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha}$$

expresiunea rotorului (43):

$$rot\,\bar{G} = \bar{u}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rG_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial G_r}{\partial \alpha}\right] + \bar{u}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial G_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_\alpha}{\partial z}\right] + \bar{u}_\alpha\left[\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

şi a laplacianului (44):

$$\text{div grad } V \equiv \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) \quad (44\ a)$$

In sistemul de coordonate sferice $x_1 = r$; $x_2 = \vartheta$; $x_3 = \alpha$; expresiunea pătratului elementului de linie este:

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta\,(d\alpha)^2,$$

şi deci:

$$g_1 \equiv g_r = 1\ ;\quad g_2 \equiv g_\vartheta = r\ ;\quad g_3 \equiv g_\alpha = r\sin\vartheta.$$

Expresiunea (41) a gradientului devine:

$$\text{grad } V = \bar{u}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \bar{u}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \bar{u}_\alpha\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \alpha} \quad (41\ b)$$

unde $\bar{u}_r, \bar{u}_\vartheta$ şi $\bar{u}_\alpha$ sunt vectorii unitate după liniile de coordonate, ataşaţi punctului în care se calculează gradientul. Expresiunea divergenţei (42) este:

$$\text{div } \bar{G} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 G_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\, G_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial G_\alpha}{\partial \alpha}\ ; \quad (42\ b)$$

expresiunea rotorului (43):

$$\text{rot } \bar{G} = \bar{u}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\, G_\alpha)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial G_\vartheta}{\partial \alpha}\right] + \bar{u}_\vartheta\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial G_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial(r G_\alpha)}{\partial r}\right] + \bar{u}_\alpha\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r G_r)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \vartheta}\right]. \quad (43\ b)$$

şi a laplacianului (44):

$$\text{div grad } V \equiv \Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \quad (44\ b)$$

17. OPERATORUL VECTORIAL NABLA

Definiţiile (13), (17) şi (22) ale gradientului unui cîmp de scalari şi ale divergenţei şi rotorului unui cîmp de vectori arată că ele pot fi considerate drept aplicare a operatorului simbolic nabla:

$$\nabla = \lim_{\Sigma \to 0}\frac{1}{V_\Sigma}\int_\Sigma d\bar{A} \quad (45)$$

asupra funcţiunii de punct care se găseşte în dreapta acestui simbol. Operatorul ∇ are caracterul de vector. Aplicarea lui

este efectuată, formal, ca înmulţire a unui vector cu un scalar dacă funcţiunea de punct e un scalar, şi ca înmulţire scalară respectiv vectorială, a unui vector printr-un vector, dacă funcţiunea de punct e un vector. Operatorul se numeşte şi hamiltonian sau del. Folosirea lui prezintă avantaje, fiindcă simplifică tehnica operaţiilor de analiză vectorială, reducîndu-le formal la operaţia de algebră vectorială. Aplicarea lui reprezintă efectuarea unor operaţiunii diferenţiale asupra funcţiunilor din dreapta sa. In coordonate cartesiene trirectangulare, hamiltonianul reprezintă aplicarea următoarei operaţii asupra acestor funcţiuni (v. şi formula 14):

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \qquad (45\ a)$$

cum se deduce examinînd expresiunile (13 a) (16 a) şi (23 a) ale gradientului, divergenţei şi rotorului în coordonate cartesiene. Operatorul e deci linear, în sensul că reprezintă o sumă de derivări de ordinul întîiu în raport cu trei elemente de linie trirectangulare, fiecare înmulţită cu versorul elementului de linie respectiv. Operarea cu hamiltonianul satisface următoarele legi:

a) Distributivitatea în raport cu adunarea, de ex:

(45 b) $\nabla(U + V) = \nabla(V) + \nabla(V)$, adică grad$(U + V)$ = grad U + grad V;

(45 c) $\nabla(\bar{F}+\bar{G}) = \nabla(\bar{F}) + \nabla(\bar{G})$, adică $\mathrm{div}(\bar{F}+\bar{G}) = \mathrm{div}\,\bar{F} + \mathrm{div}\,\bar{G}$;

(45 d) $\nabla_x(\bar{F}+\bar{G}) = \nabla\, x(\bar{F}) + \nabla\, x(\bar{G})$, adică $\mathrm{rot}(\bar{F}+\bar{G}) = \mathrm{rot}\bar{F} + \mathrm{rot}\,\bar{G}$;

b) Permutările factorilor produselor scalare şi vectoriale, permise de comutativitatea, respectiv de anticomutativitatea acestor produse, pot fi făcute numai în dreapta, respectiv numai în stînga operatorului, fiindcă trecerea unui factor din dreapta în stînga lui ar însemna că nu se mai derivează un factor care trebuia derivat, iar trecerea factorului din stînga în dreapta lui ar însemna că se derivează un factor care nu trebuia derivat.

c) Operatorul aplicat unui produs de n funcţiuni e echivalent cu o sumă, de n termeni formal identici cu produsul căruia i se aplică operatorul, dar în cari operatorul se aplică

numai cîte unuia dintre factori, ca în cazul derivatei unui produs de funcţiuni. Cînd operatorul trebuie aplicat dacă unui produs, e nevoie de un simbol care să indice factorul căruia i se aplică, respectiv factorii cărora îi se aplică. De aceea factorul respectiv produsul din dreapta, căruia i se aplică operatorul, se închide în paranteze. Astfel factorii sau produsele cari nu sunt închise în paranteze se pot trece din dreapta în stînga operatorului, şi invers, dar numai dacă permite comutativitatea sau anticomutivitatea. De exemplu:

$$\nabla(UV) = \text{grad}\,(UV) = \nabla\left[(U)\,V\right] + \nabla\left[U(V)\right] = V\ \text{grad}\ U + U\ \text{grad}\ V; \quad (45\ e)$$

$$\nabla(V\bar{G}) = \text{div}\,(V\bar{G}) = \nabla\left[(V)\bar{G}\right] + \nabla\left[V(\bar{G})\right] = G\,\text{grad}\,V + \times\ \text{div}\ \bar{G}; \quad (45\ f);$$

$$\nabla x(V\bar{G}) = \text{rot}\,(V\bar{G}) = \nabla(V)\times\bar{G} + \nabla x\left[V(\bar{G})\right] = \text{grad}\ V \times \bar{G} + V\ \text{rot}\ \bar{G}; \quad (45\ g);$$

$$\nabla \times \left[\bar{F}\bar{G}\right) = \nabla\left[(\bar{F})\,\bar{G}\right] + \nabla\left[\bar{F}\,(\bar{G})\right] \quad (45\ h)$$

Pentru a transforma ultimii doi termeni, se foloseşte următoarea formulă de algebră vectorială:

$$\bar{F}\times(\bar{D}\times\bar{G}) = D(F\,G) - (FD)\bar{G} \text{ adică } \bar{D}(\bar{F}\bar{G}) = (\bar{F}\bar{D})\bar{G} + \bar{F}\times(\bar{D}\times\bar{G}). \quad *)$$

Înlocuind în această relaţie vectorul $\bar{D}$ prin operatorul ∇ şi închizînd în paranteze factorii din dreapta lui asupra cărora operează, se obţine.

$$\nabla\left[\bar{F}\,(G)\right] = (F.\nabla)\,(\bar{G}) + \ldots\left[\nabla x\,(G)\right]$$

şi analog

$$\nabla\left[(\bar{F})\,\bar{G}\right] = \nabla\left[\bar{G}(\bar{F})\right] = (\bar{G}\nabla)(\bar{F}) + \bar{G}\times\left[\nabla\times(\bar{F})\right].$$

Înlocuind în (45 h), se obţine:

$$\text{grad}\,(\bar{F}\bar{G}) = (\bar{F}\ \text{grad})\,\bar{G} + (\bar{G}\ \text{grad})\,\bar{F} + \bar{F}\times\text{rot}\,\bar{G} + \bar{G}\times\text{rot}\,\bar{F} \quad (\ldots\ i)$$

Prin transformări analoage se obţin relaţiile:

$$\nabla(\bar{F}\times\bar{G}) = \text{div}(\bar{F}\times\bar{G}) = \bar{G}\left[\nabla\times(\bar{F})\right] - \bar{F}\left[\nabla\times(\bar{G})\right] = \bar{G}\,\text{rot}\bar{F} - \bar{F}\text{rot}\,\bar{G} \quad (45\ \ldots)$$

şi

$$\nabla\times(\bar{F}\times\bar{G}) = (\bar{G}\nabla)(\bar{F}) - (\bar{F}\nabla)(\bar{G}) + \bar{F}\left[\nabla(\bar{G})\right] - \bar{G}\left[\nabla\,(\bar{F})\right]$$

adică:

$$\text{rot}(\bar{F}\times G) = (\bar{G}\text{grad})(\bar{F}) - (\bar{F}\ \text{grad})\,\bar{G} + \bar{F}.\text{div}\,\bar{G} - \bar{G}.\text{div}\,\bar{F}. \quad (45\ k)$$

Laplacianul se poate pune sub forma următoare, în coordonate carteziene:

$$\text{div grad}(-)=\Delta=\nabla\left[\nabla(\ldots)\right]=\left[\nabla\nabla\right](\ldots)=(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})$$

$$(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})(\ldots)=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

adică

$$\text{div grad } V \equiv \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (45\ l)$$

și analog

$$\Delta\bar{G}=\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{G}}{\partial z^2}\ . \qquad (45\ m)$$

De asemenea, urmează din (a), înlocuind vectorii $\bar{F}$ și $\bar{D}$ prin operatorul ∇:

$$\nabla\times\left[\nabla\times(\bar{G})\right]=\nabla\left[\nabla(\bar{G})\right]-\left[\nabla\nabla\right](\bar{G}),$$

adică

$$\text{rot rot } \bar{G} = \text{grad div } \bar{G} - \Delta\bar{G}. \qquad (45\ n)$$

18. DERIVATELE ÎN RAPORT CU TIMPUL

18.1. Derivata parțială în raport cu timpul. Fie un cîmp de scalari cu scalarul cîmp $V(\bar{r},t)$, respectiv un cîmp de vectori cu vectorul cîmp $\bar{G}(\bar{r},t)$, date de exemplu, în raport cu un sistem de coordonate carteziene, în care raza vectoare e $\bar{r}=\bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z$ și al cărui scalar respectiv vector cîmp depinde și de timpul t.

Dacă se formează limita cîtului dintre variația în timp ΔV a scalarului cîmp V, într-un punct fix în raport cu sistemul de coordonate și dintre creșterea corespunzătoare Δt a timpului cînd aceasta tinde către zero, se obține derivata parțială a scalarului cîmp V, în raport cu timpul, în punctul considerat:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(\bar{r},t+\Delta t)-V(\bar{r},t)}{\Delta t} \qquad (46)$$

Dacă se formează limita cîtului dintre variația în timp $\Delta\bar{G}$ a vectorului cîmp $\bar{G}$, într-un punct fix în raport cu sistemul de coordonate, și dintre creșterea corespunzătoare Δt a timpului cînd aceasta tinde către zero, se obține derivata parțială a vectorului cîmp $\bar{G}$ în raport cu timpul, în punctul

considerat:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{G}}{\Delta t} \qquad (47)$$

18.2. Derivata substanţială a unui scalar cîmp, respectiv a unui vector cîmp, în raport cu timpul. Fie un cîmp de scalari cu scalarul cîmp $V(\bar{r},t)$, dat, de exemplu, în raport cu un sistem de coordonate cartesiene, în care raza vectoare e $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$, şi al cărui scalar cîmp depinde şi de timpul t. Fie $\bar{v} = \bar{i}\frac{dx}{dt} + \bar{j}\frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt}$ vitesele punctelor de raze vectoare r, în raport cu sistemul de coordonate considerat.

Dacă se formează limita cîtului diferenţei $\Delta_s V$ dintre scalarii cîmp într-un acelaşi punct mobil, în momentele t+Δt şi t, prin creşterea corespunzătoare Δt a timpului cînd aceasta tinde către zero, se obţine derivata substanţială a scalarului cîmp în raport cu timpul, în punctul mobil considerat. Cînd se consideră limita acestui cît, variază în timpul Δt atît variabila t a funcţiunii scalare V(x,yz,t), cît şi variabilele x,y, z,t) cît şi variabilele x,y,z, fiindcă punctul considerat are în momentul t coordonatele x,y,z iar în momentul t + Δt, coordonatele x+ Δx, y+Δy şi z +Δz, şi deci

$$\frac{\partial_s V}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_s V}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{v}\,\text{grad}\,V \qquad (48)$$

Dacă se formează limita cîtului diferenţei $\Delta_s G$ a vectorilor cîmp $\bar{G}$ într-un acelaşi punct mobil, în momentele t +Δt şi t, prin creşterea corespunzătoare Δt a timpului cînd aceasta tinde către zero, se obţine derivata substanţială a vectorului cîmp în raport cu timpul, în punctul mobil considerat. Cînd se consideră limita acestui cît, variază în timpul Δt atît variabila t a funcţiunii vectoriale $\bar{G}(x,y,z,t)$, cît şi variabilele x,y,z, fiindcă punctul considerat are în momentul t coordonatele x,y, şi z, iar în momentul t +Δt, coordonatele x +Δx, y +Δy, şi z +Δz, şi deci:

$$\frac{d_s \bar{G}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_s \bar{G}}{\Delta t} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + (\bar{v}\,grad)\,\bar{G} \tag{49}$$

Aplicaţie Ecuaţiile lui Euler referitoare la mişcarea fluidelor. Fie un fluid care are densitatea μ şi deci masa fluidului din elementul de volum dv e egală cu $dm = \mu\,dv$. Dacă $\bar{f}$ e densitatea de volum a forţei care se exercită asupra fluidului forţa $d\bar{F}$ care se exercită asupra fluidului din elementul de volum dv e deci $d\bar{F} = \bar{f}.dv$ şi legea de mişcarea fluidului din elementul de volum e :

$$d\bar{F} = \bar{a} \cdot dm,$$

unde $\bar{a}$ e acceleraţia instantanee a fluidului din elementul de volum. Acceleraţia e însă derivata substanţială a vitesei $\bar{v}$ a fluidului, fiindeă în calculul ei se foloseşte diferenţa $\Delta_s \bar{V}$ a vitezelor într-un acelaş punct mobil, adică într-o aceiaşi particulă de fluid mobilă, şi deci

$$\bar{a} = \frac{d_s \bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{v}\ grad)\ \bar{v}.$$

Introducînd în formula de mai sus a legii de mişcare şi simplificând cu dv, se obţine:

$$\bar{f} = \mu \left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{v}\ grad)\ \bar{v}\right].$$

Fie $\bar{g}$ acceleraţia căderii libere(adică intensitatea cîmpului de gravitaţie) în punctul în care densitatea fluidului e μ, şi fie p presiunea, în general variabilă, a fluidului, Forţa $d\bar{F}$, care e rezultanta dintre greutatea $\bar{g}dm = \bar{g}\mu dv$ şi dintre rezultanta parţială $\bar{F}p\ dv$ a forţelor provenind din presiunile care se exercită asupra fluidului din elementul de volum dv, are deci expresiunea $d\bar{F} = (\mu\bar{g} + \bar{f}p)\ dv$. Expresiunea densităţii de forţă $\bar{F}p$ în funcţiune de presiuni a fost calculată imediat după definiţia gradientului, şi e: $\bar{f}p = -\ grad\ p$. Se obţine deci următoarea formă eulerianâ a legii de mişcare a fluidelor:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\ grad)\ \bar{v} = \bar{g} - \frac{1}{\mu}\ grad\ p.$$

18.3. Derivata de flux a unui vector cîmp în raport cu timpul. Fie un cîmp de vectori cu vectorul cîmp $\bar{G}(\bar{r},t)$

dat în raport cu un anumit sistem de coordonate, şi fie $\bar{v}$ vitezele punctelor de raze vectoare $\bar{r}$, în raport cu sistemul de coordonate considerat. Presupunem vitezele punctelor astfel repartizate în spaţiu, încît prin efectul mişcării punctelor să nu se producă nici o soluţie de continuitate a nici uneia dintre suprafeţele realizate, într-un moment oarecare, de anumite puncte, cari antrenează suprafaţa în mişcarea lor. Considerăm deci astfel de suprafeţe deschise S_1 de contur Γ, pe cari punctele lor le antrenează într-o anumită mişcare în raport cu sistemul de coordonate considerat, în care există cîmpul de vectori cu vectorul cîmp $\bar{G}(\bar{r},t)$ care poate fi invariabil, sau poate fi funcţiune de timpul t.

Se numeşte derivată de flux a vectorului cîmp $\bar{G}(\bar{r},t)$ în raport cu timpul la viteze $\bar{v}$ date ale punctelor de raze vectoare $\bar{r}$, noul vector cîmp $\frac{d_{\bar{v}}\bar{G}}{dt}$ a cărui flux prin orice suprafaţă deschisă S_p. În calculul acestei ultime derivate se consideră limita cîtului diferenţei dintre fluxurile vectorului cîmp $\bar{G}$, în cele două poziţii, în momentele $t+\Delta t$ şi t, ale suprafeţei deschise, prin creşterea corespunzătoare Δt a timpului, cînd aceasta tinde către zero. Această derivată se poate descompune în doi termeni aditivi, dintre cari primul ar reprezenta derivata fluxului în raport cu timpul, dacă suprafaţa S_p ar fi imobilă în raport cu sistemul de referinţă considerat şi numai vectorul cîmp $\bar{G}$ ar fi funcţiune de timp, iar al doilea termen ar reprezenta derivata fluxului dacă vectorul cîmp din diferitele puncte fixe în raport cu sistemul de coordonate considerat, nu ar depinde de timp şi ar avea de exemplu valorile sale din momentul t, şi numai suprafaţa S_p ar fi mobilă:

$$\int_{S_p} \frac{d_{\bar{v}}\bar{G}}{dt}\, d\bar{A} = \frac{d}{dt}\int_{S_p} \bar{G}\, d\bar{A} = \int_{S_p} \frac{\partial \bar{G}}{\partial t}\, d\bar{A} + \frac{d}{dt}\left[\int_{S_p} \bar{G}\, d\bar{A}\right]_{\bar{G}}$$

Pentru a calcula ultimul termen, considerăm poziţiile S_p şi S'_p ale unei suprafeţe mobile în momentele t şi $t+\Delta t$. Dacă $\Delta\bar{r} = \bar{v}\Delta t$ sunt deplasările punctelor în timpul Δt suprafaţa laterală S_g descrisă de elementele de arc $d\bar{r}$ ale conturului Γ, în trecerea lor din poziţia Γ în poziţia Γ', are elementele de arie

$$d\bar{A}_1 = d\bar{r} \times \Delta\bar{r} = d\bar{r} \times \bar{v}\Delta t.$$

[illegible] e egală cu derivata în raport cu timpul a fluxului vectorului $\bar{G}$ prin suprafaţa mobilă S_p

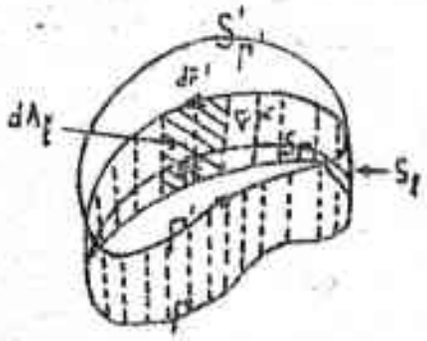


Fig.49

Figură pentru calculul derivatei de flux a unui vector.

Suprafeţele S_f, S_1, şi S'_f. Formează o suprafaţă închisă Σ. Fluxul vectorului cîmp $\bar{G}$ prin suprafaţa închisă Σ este egal cu diferenţa dintre suma fluxurilor prin suprafeţele S'_f şi S_1 şi fluxul prin suprafaţa S_f, dacă sensurile pozitive ale elementelor de arie ale suprafeţelor S'_f şi S_f se asociază după regula burghiului drept sensului pozitiv pe conturul lor. Folosind expresiunea $dv = d\bar{A}\,\Delta\bar{r} = d\bar{A}\,\bar{v}\,\Delta t$ a elementelor de volum din interiorul suprafeţei Σ şi teorema lui Gauss şi Ostrogradschi, rezultă:

$$\int_{\Sigma} \bar{G}d\bar{A} = \int_{S'_f} \bar{G}d\bar{A} - \int_{S_f} \bar{G}d\bar{A} + \oint_f \bar{G}(d\bar{r} \times \bar{v})\,\Delta t = \int_{S_f} \operatorname{div} \bar{G}(d\bar{A}\,\bar{v}\Delta t)$$

Rezultă dacă $\bar{G}$ e presupus independent de timp:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{S_f} \bar{G}d\bar{A}\right]_{\bar{G}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{S'_f} \bar{G}d\bar{A} - \int_{S_f} \bar{G}d\bar{A}}{\Delta t} = \int_{S_f} \operatorname{div} \bar{G}(\bar{v}d\bar{A}) + \oint_f \bar{G}(\bar{v}\times d\bar{r}). \qquad (50)$$

Conform teoremei lui Stokes

$$\oint_f \bar{G}(\bar{v} \times d\bar{r}) = \oint_f (\bar{G}\times\bar{v})d\bar{r} = \int_{S_f} \operatorname{rot}(\bar{G}\times\bar{v})d\bar{A}$$

şi deci

$$\frac{d}{dt}\int_{S_f} \bar{G}d\bar{A} = \int_{S_f} \frac{d_f\bar{G}}{dt}\,d\bar{A} = \int_{S_f} \left[\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + \bar{v}\operatorname{div}\bar{G} + \operatorname{rot}(\bar{G}\times\bar{v})\right]d\bar{A}.$$

Fiindcă suprafaţa S_f e arbitrară, această relaţie e satisfăcută numai dacă derivata de flux a vectorului cîmp $\bar{G}$ are expresiunea:

$$\frac{d_f\bar{G}}{dt} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + \bar{v}\operatorname{div}\bar{G} + \operatorname{rot}(\bar{G}\times\bar{v}). \qquad (51)$$

Derivata de flux diferă esenţial de derivata substanţială. Dacă se foloseşte identitatea (45 k):

$$\operatorname{rot}(\bar{G}\times\bar{v}) = (\bar{v}\operatorname{grad})\bar{G} - (\bar{G}\operatorname{grad})\bar{v} + \bar{G}\operatorname{div}\bar{v} - \bar{v}\operatorname{div}\bar{G},$$

şi se ţine seama de expresiunea (49) a derivatei substanţiale, se obţine următoarea relaţie importantă între cele două derivate:

$$\frac{d_p \bar{G}}{dt} = \frac{d_e \bar{G}}{dt} + \bar{G} \operatorname{div} \bar{v} - (\bar{G} \operatorname{grad}) \bar{v} \qquad (52)$$

18.4. Derivata de integrală de linie a unui vector cîmp în raport cu timpul. Fie un cîmp de vectori cu vectorul cîmp $\bar{G}(\bar{r},t)$, dat în raport cu un anumit sistem de coordonate, şi fie $\bar{v}$ vitesele punctelor de raze vectoare $\bar{r}$ în raport cu sistemul de coordonate considerat. Presupunem vitesele punctelor astfel repartizate în spaţiu, încît prin efectul mişcării punctelor, să nu se producă nici o soluţie de continuitate a niciuneia dintre curbele realizate, într-un moment oarecare, de anumite puncte, cari antrenează curba în mişcarea lor. Considerăm deci astfel de curbe deschise C, cu extremităţile P_1 şi P_2 pe cari punctele lor le antrenează într-o anumită mişcare în raport cu sistemul de coordonate considerat, în care există cîmpul de vectori cu vectorul cîmp $\bar{G}(\bar{r},t)$, care poate fi invariabil sau poate fi funcţiune de timpul t. Derivata de integrală de linie a vectorului cîmp $\bar{G}$ în raport cu timpul, la mişcare dată a curbei C în cîmp, e noul vector cîmp $\frac{d_1 \bar{G}}{dt}$ a cărui integrală de linie dealungul curbei C este egală cu derivata în raport cu timpul a integralei de linie a vectorului cîmp $\bar{G}$ dealungul aceleiaşi curbe mobile. In calculul ultimei derivate se cosnideră diferenţa dintre integralele de linie dealungul celor două curbe C şi C' ocupate de curbele C în două momente diferit şi $t + \Delta t$. Derivata poate fi descompusă în doi termeni additivi, dintre cari primul ar reprezenta derivata în raport cu timpul a integralei de linie, dacă curba C ar fi mobilă în raport cu sistemul de coordonate la care sunt raportaţi vectorii cîmp $\bar{G}$ şi numai aceşti vectori cîmp ar varia în timp în raport cu acel sistem de referinţă, iar cel de al doilea ar reprezenta derivata în raport cu timpul a integralei de linie dacă vectorii cîmp nu ar varia în timp în raport cu sistemul de coordonate, şi numai curba C s-ar mişca în raport cu acel sistem de coordonate:

$$\int_{P_1}^{P_2}_{C} \frac{d_1 \bar{G}}{dt} d\bar{r} = \frac{d}{dt} \int_{P_1}^{P_2}_{C} \bar{G}\, d\bar{r} = \int_{P_1}^{P_2}_{C} \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} d\bar{r} + \frac{d}{dt}\left[\int_{P_1}^{P_2}_{C} \bar{G}\, d\bar{r} \right]_{\bar{G}}$$

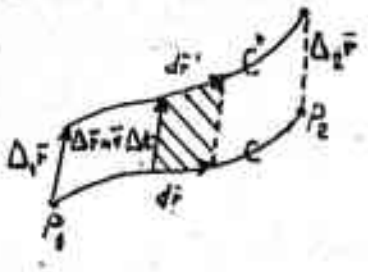


Fig.5o

Figură pentru calculul derivatei de integrală de linie a unui vector cîmp.

Calculăm ultimul termen. Fie C curba considerată într-un moment t şi C' poziţia ei în momentul t + Δ t (fig.5o). Dacă $\Delta\bar{r}$ sunt deplasările elementelor de arc $d\bar{r}$ ale curbei şi, în particular $\Delta_1\bar{r}$ şi $\Delta_2\bar{r}$ sunt deplasările extremităţilor ei P_1 şi P_2 în timpul Δ t, curbele C, $\Delta_2\bar{r}$, C' şi $-\Delta_1\bar{r}$ formează o curbă închisă Γ. Ţinînd seama că $\Delta\bar{r}$ este egal cu $\bar{v}\,\Delta t$ şi aplicînd curbei închise teorema lui Stokes se obţine:

$$\int_C^{P_2} \bar{G}\,d\bar{r} + \bar{G}_2\,\Delta_2\bar{r} - \int_{P_1'}^{P_2'} \bar{G}\,d\bar{r} - \bar{G}_1\,\Delta_1\bar{r} = \int_{P_1}^{P_2} \bar{G}\,d\bar{r} - \int_{P_1'}^{P_2'} \bar{G}\,d\bar{r} - \left[(\bar{G}\bar{v})_2 - (\bar{G}\bar{v})_1\right]\Delta t =$$

$$= \int_{P_1}^{P_1'P_2} \operatorname{rot}\bar{G}\,(d\bar{r}\times\Delta\bar{r}) = \int_{P_1}^{P_2} \operatorname{rot}\bar{G}\,(d\bar{r}\times\bar{v})\,\Delta t = -\int_{P_1}^{P_2} (\operatorname{rot}\bar{G}\times\bar{v})\,d\bar{r}\,\Delta t .$$

Termenul din dreapta poate fi pus sub forma:

$$\left[(\bar{G}\bar{v})_1 - (\bar{G}\bar{v})_2\right] = -\int_{P_1}^{P_2} \operatorname{grad}(\bar{G}\bar{v})\,d\bar{r},$$

conform formulei (13 c), în care $V = \bar{G}\bar{v}$. Se obţine deci:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{P_1}^{P_2} \bar{G}\,d\bar{r}\right]_G = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\left(\int_{P_1'}^{P_2'} \bar{G}\,d\bar{r} - \int_{P_1}^{P_2} \bar{G}\,d\bar{r}\right)\right] = \int_{P_1}^{P_2}\left[\operatorname{grad}(\bar{G}\bar{v}) + \operatorname{rot}\bar{G}\times\bar{v}\right]d\bar{r}$$

Rezultă pentru derivata de integrală de linie în raport cu timpul a vectorului G expresiunea:

$$(53)\qquad \frac{d_1\bar{G}}{dt} = \frac{\partial\bar{G}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\bar{G}\bar{v}) + \operatorname{rot}\bar{G}\times\bar{v}.$$

Între derivata de integrală de linie şi derivata substanţială, în raport cu timpul, a unui vector cîmp G, există deci relaţia:

$$(54)\qquad \frac{d_e\bar{G}}{dt} = \frac{d_s\bar{G}}{dt} + \bar{G}\times\operatorname{rot}\bar{v} + (\bar{G}\operatorname{grad})\,\bar{v}.$$

<u>Aplicaţie</u> Derivata de flux a unui vector cîmp solenoidal în funcţiune de derivata de integrală de linie a potenţialului său vector, în raport cu timpul. Fie

$$\bar{G}_s = \operatorname{rot}\bar{a}$$

un vector cîmp solenoidal, care derivă din potențialul vector $\bar{a}$. Aplicînd teorema lui Stokes, se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{a}\, d\bar{r} = \int_{S_\Gamma} rot\, \bar{a}\, d\bar{A} = \int_{S_\Gamma} \bar{G}_s\, d\bar{A}$$

Derivînd în raport cu timpul în ipoteza că suprafața S_Γ și deci conturul ei Γ, se mișcă se obține

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \bar{G}_s\, d\bar{A} = \int_{S_\Gamma} \frac{dt\,\bar{G}_s}{dt}\, d\bar{A} = \frac{d}{dt}\oint_{\Gamma} \bar{a}\, d\bar{r} = \oint_{\Gamma} \frac{d_c \bar{a}}{dt}\, d\bar{r}$$

Înlocuind expresiunea (53) a derivatei de integrală de linie în raport cu timpul, se obține:

$$\int_{S_\Gamma} \frac{dt\,\bar{G}_s}{dt}\, d\bar{A} = \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + grad(\bar{a}\bar{v}) + rot\,\bar{a}\times\bar{v}\right] d\bar{r}$$

Aplicînd teorema lui Stokes, rezultă:

$$\int_{S_\Gamma} \frac{dt\,\bar{G}_s}{dt}\, d\bar{A} = \int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial\, rot\,\bar{a}}{\partial t} + rot(rot\,\bar{a}\times\bar{v})\right] d\bar{A} = \int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \bar{G}_s}{\partial t} + rot(\bar{G}_s\times\bar{v})\right] d\bar{A}$$

de unde rezultă: $\frac{dt\,\bar{G}_s}{dt} = \frac{\partial \bar{G}_s}{\partial t} + rot(\bar{G}_s\times\bar{v})$,

adică expresiunea (51) în care div $\bar{G}_s = C$, fiindcă $\bar{G}_s$ e un cîmp solenoidal (pentru ca să poată fi derivat dintr-un potențial.

16.5. <u>Derivata de integrală de volum în raport cu timpul</u>. Scalarul cîmp $\frac{d_v V}{dt}$, a cărui integrală de volum, referitoare la un anumit volum v care e egală cu derivata în raport cu timpul a integralei de volum $\int_v V\, dv$, a unui scalar cîmp V, calculată ca diferența dintre aceste integrale de volum, efectuate asupra volumelor V' și V, pe care le ocupă un sistem de puncte în mișcare în momentele t + dt și t, se numește derivata de integrală de volum a scalarului cîmp în raport cu timpul:

$$\int_v \frac{d_v V}{dt}\, dv = \frac{d}{dt}\int_v V dv \qquad (a)$$

Derivata de integrală de volum se poate descompune într-o sumă de doi termeni, în raport cu un anumit sistem de referință, față de care punctele sunt în mișcare. Primul termen cuprinde partea de derivată care diferă de zero și cînd volumul nu variază prin efectul mișcării, iar cel de al doilea termen provine exclusiv din variația volumului prin efectul mișcării, adică diferă de zero și cînd V nu depinde de t:

$$\frac{d}{dt}\int_v V dv = \left[\frac{d}{dt}\int_v V dv\right]_v + \left[\frac{d}{dt}\int_v V dv\right]_V \qquad (b)$$

Prima parte se calculează luînd derivata densităţii de volum a sarcinii considerînd în derivată diferenţa dintre valoarea mărimii V într-un anumit punct, în momentul $t + \Delta t$, şi dintre valoarea mărimii V în acelaşi punct, în momentul t, în care punctul se găsea într-o altă poziţie în raport cu sistemul de referinţă (din cauza mişcării). In urma mişcării, coordonatele cartesiene x,y,z ale unui punct sunt însă funcţiuni de timp şi această derivată a mărimii V în raport cu timpul, numită şi derivată substanţială în raport cu timpul, e :

$$\frac{d_s V}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{u}\,\mathrm{grad}\,V \qquad (c)$$

In această expresiune, derivatele coordonatelor în raport cu timpul au fost înlocuite prin componente respective ale vitezei $\bar{u}$ a punctului material în raport cu sistemul de referinţă faţă de care se consideră poziţiile corpurilor. (Folosim simbolul $\bar{u}$ pentru viteză, fiindcă dacă am folosi simbolul obişnuit $\bar{v}$, valoarea ei absolută v s-ar confunda cu volumul v. Simbolul $\bar{u}$ nu trebuie confundat însă cu simbolurile vectorilor, cari au, în general, indici).

Cea de a doua aditivă a derivatei de integrală de volum în raport cu timpul, se obţine considerînd mărimea V constantă în fiecare dintre puncte şi considerînd numai variaţia elementelor de volum provenită din viteză. Dacă divergenţa vitezei e nulă, elementele de volum rămîn invariabile. Dacă divergenţa vitezei e diferită de zero, volumul v devine v' în timpul Δt, şi

$$v'_\Sigma = v_\Sigma + \int_\Sigma \bar{u}\, d\bar{A}\, \Delta t = v_S + \int_v \mathrm{div}\,\bar{u}\, dv\, \Delta t$$

mărimea $\bar{u}\,d\bar{A}$ fiind volumul descris în unitatea de timp de elementul de arie dA.

Variaţia elementului de volum dv, raportată la unitatea de timp, e deci:

$$\frac{d(dv)}{dt}_{lg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dv' - dv}{\Delta t} = dv\ \mathrm{div}\,\bar{u} \qquad (d)$$

adică partea din derivată care corespunde variaţiei volumului

are expresiunea

$$\left[\frac{d}{dt}\int_v V\,dv\right]_V = \int V \operatorname{div}\bar{u}\,dv \quad (e)$$

Se obţine deci pentru derivata în raport cu timpul. din (b) (c) şi (e), relaţia:

$$\int_v \frac{d_v V}{dt}dv = \frac{d}{dt}\int_v V dv = \int_v \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \bar{u}\,\operatorname{grad} V + V \operatorname{div}\bar{u}\right)dv = \int_v \left[\frac{\partial V}{\partial t} + d_v(V\bar{u})\right]dv$$

Derivata de integrală de volum are deci următoarea expresiune;

$$\frac{d_v V}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}(V\bar{u}) . \quad (f)$$

TABLA DE MATERII

Prefaţă Pagina

ELECTROSTATICA

1. Sarcina electrică adevărată, intensitatea cîmpului electric în vid şi permitivitatea vidului .....
2. Cîmpul electric în vid al conductoarelor omogene încărcate cu sarcină adevărată .....
3. Momentul elsctric şi polarizaţia electrică.....
4. Sarcinile electrice dipolare de polarizaţie şi libere .....
5. Cîmpul electric în vid al corpurilor încărcate şi polarisate electric.....
6. Intensitatea cîmpului electric şi inducţia electrică.....
7. Intensitatea cîmpului electric imprimat .....
8. Sisteme de unităţi de măsură şi sisteme de dimensiuni.....
9. Legea legăturii dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în cîmpul electric.....
10. Lema fluxului electric .....
11. Legea polarizaţiei electrice.....
12. Teorema potenţialului electrostatic .....
13. Ecuaţiile lui Poisson şi Laplace în cîmpul electrostatic.....
14. Legea cîmpurilor electrice imprimate.....
15. Teoremele generale ale Electrostaticei .....

16. Metoda elementară a Electrostaticei... .....
17. Metoda imaginilor electrice.....
18. Metoda inversiunii .....
19. Metoda funcţiunilor analitice.....
20. Metoda reprezentării conforme .....
21. Metode de aproximare a formei liniilor de cîmp .....

MAGNETOSTATICA

22. Momentul magnetic, intensitatea cîmpului magnetic în vid şi permeabilitatea magnetică a vidului.....
23. Sarcinile magnetice dipolare, de polarizaţie şi libere.....
24. Cîmpul magnetostatic în vid al corpurilor polarizate magnetic.....
25. Intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică.....
26. Legea legăturii dintre inducţie, intensitate şi polarizaţie în cîmpul magnetic.....
27. Lema fluxului magnetic.....
28. Legea polarizaţiei magnetice .....
29. Teorema potenţialului magnetostatic .....
30. Ecuaţiile lui Poisson şi Laplace în cîmpul magnetostatic.....
31. Cîmpuri magnetostatice .....

ANEXA MATEMATICA

1. Mărimi matematice şi mărimi fizice.....
2. Vectorii .....

13. Potențialul scalar și potențialul vector.....

14. Problemele fundamentale ale teoriei
câmpurilor de vectori.....

15. Intensitatea și intensitatea-inducție
a câmpurilor de vectori polarizate.....

16. Gradientul, divergența, rotorul și laplacianul
în coordonate curbilinii ortogonale.....

17. Operatorul vectorial nabla.....

18. Derivatele în raport cu timpul.....

3. Suma şi diferenţa vectorilor.....
4. Produsul şi cîtul unui vector printr-un scalar.....
5. Produsul scalar a doi vectori.....
6. Sistemele de coordonate şi vectorii .....
7. Produsul vectorial a doi vectori.....
8. Vectori polari şi vectori axiali.....
9. Funcţiuni şi cîmpuri de scalari şi de vectori.....
10. Integrala de suprafaţă şi gradientul scalarului cîmp .....
11. Integrala de suprafaţă, divergenţa vectorului cîmp şi teoremele lui Gauss, Ostrogradski şi Green.....
12. Integrala de linie, rotorul vectorului cîmp şi teorema lui Stokes.....

Scanned with OKEN Scanner

$V_1 - V_2 = \gamma_{21} q_1 + \gamma_{22} q_2 + \dots + \gamma_{2n} q_n$

$V_1 - V_3 = \dots$

$V_1 - V_n = \gamma_{n1} q_1 + \gamma_{n2} q_2 + \dots + \gamma_{nn} q_n$

$q_1 = \gamma_{11} V_1 + \gamma_{12} V_2 + \dots + \gamma_{1n} V_n$

$q_n = \gamma_{n1} V_1 + \gamma_{n2} V_2 + \dots + \gamma_{nn} V_n$

$\Delta V = 0$

$q_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + \dots + C_{1n}(V_1 - V_n)$

$q_n = C_{n1}(V_n - V_1) + C_{n2}(V_n - V_2) + \dots + C_{n,n-1}(V_n - V_{n-1})$

$\gamma_{i1} + \gamma_{i2} + \dots + \gamma_{ii} + \gamma_{i,i+1} + \dots + \gamma_{in} = 0$

$V_i \gamma_{ii} = -(\gamma_{i1} + \gamma_{i2} + \dots + \gamma_{i,i-1} + \gamma_{i,i+1} + \dots + \gamma_{in}) V_i$

$q_i = \gamma_{i1} V_1 + \gamma_{i2} V_2 + \dots + \gamma_{ii} V_i + \dots + \gamma_{in} V_n$

$q_i = -\gamma_{i1}(V_i - V_1) - \gamma_{i2}(V_i - V_2) - \dots - \gamma_{i,i-1}(V_i - V_{i-1}) - \gamma_{i,i+1}(V_i - V_{i+1}) - \dots - \gamma_{in}(V_i - V_n)$

$\operatorname{div} \overline{D} = \kappa \rho_0$

$D_{n1} + D_{n2} = \kappa \rho_0$

$E = \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho_0 \qquad \rho_0 = \frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot \frac{\partial V}{\partial r_m} \qquad q_i = \frac{\varepsilon}{\kappa} \int_{\Sigma_i} \frac{\partial V}{\partial S_n} dA = \sum_1^n V_k \int_{\Sigma_i} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial V_k}{\partial S_n} dA$

γ_{ik}

$q_i = \gamma_{i1} V_1 + \gamma_{i2} V_2 + \gamma_{ii} V_{i-1} + \gamma_{in} V_n$

$q_2 = -q_1 - q_3$

$C_{12} = \frac{\varepsilon A}{\kappa \delta_{12}} \qquad C_{23} = \frac{\varepsilon A}{\kappa \delta_{23}}$

$C_{31} = 0$

$q_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) = C_{12} V_1 - C_{12} V_2 -$

$q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3) = -C_{12} V_1 + (C_{12} + C_{23}) V_2 - C_{23} V_3$

$q_3 = C_{31}(V_3 - V_1) + C_{32}(V_3 - V_2) = -C_{31} V_1 - C_{32} V_2 + C_{32} V_3$

$\gamma_{11} = V_1 \qquad \gamma_{12} = -C_{12} \qquad \gamma_{13} = 0$

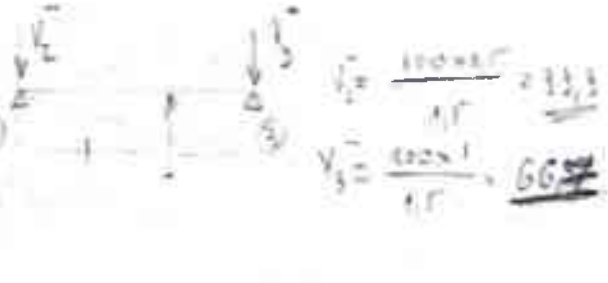
$\gamma_{12} = -C_{12} \qquad \gamma_{22} = C_{12} + C_{23} \qquad \gamma_{23} = -C_{23} \qquad \gamma_{33} = C_{12}$

$\gamma_{11} = -C_{31}$

Scanned with OKEN Scanner

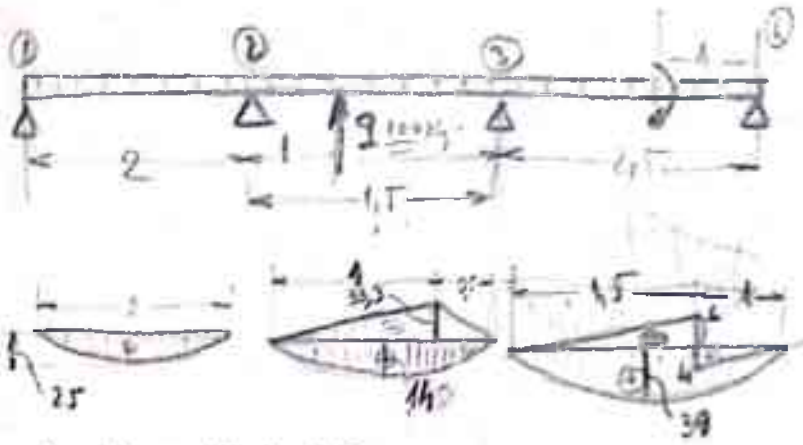
V_1 49,79
53,61
29,79
61,77

$\begin{cases} M_2 = -1,42 \\ M_3 = -1,24 \end{cases}$



$V_2 = \frac{100 \times 1,5}{1,5} = 33,3$

$V_3 = \frac{100 \times 1}{1,5} = 66,7$



$p = 50\ Kg/m$

$P_2 = 100\ Kg$

$M = 10\ Kg\,m$

$M_3 = \frac{50 \times 8,25}{8}$

$S_{1,2} = \frac{2}{3} \cdot 2 \times 25 \times 1 = 33,3$

$S_{3,2} = \frac{2}{3} \cdot 1,5 \times 14 \times 0,75 - \frac{1}{2} 33,3 \left(\frac{1}{3} + 1,5 + 0,5 \times \frac{2}{3} \times 0,5 \right)$

$S_{32} = 10,5 - 16,6 = -6,1$

$S_{2,3} = 10,5 - \frac{1}{2} 33,3 \left(\frac{2}{3} + 0,5 \times \left(1 + \frac{0,5}{3} \right) \right)$

$S_{2,3} = 10,5 - 20,6 = -10,1$

$S_{4,3} = \frac{2}{3} \cdot 2,5 \times 39 \times 1,25 - 9 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1,5}{3} \right) + 2 \times \frac{2}{3}$

$= 81 - 6,75 + 0,75 = 75$

$\Sigma M_2 \cdot 3,5 + M_3 \cdot 1,5 = -A_2$

$M_2 \cdot 1,5 + 2 M_3 \cdot 4 = -A_3$

$7 M_2 + 1,5 M_3 = -A_2$

$15 M_2 + 8 M_3 = -A_3$

$M_2 = \frac{\begin{vmatrix} -A_2 & 1,5 \\ -A_3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1,5 \\ 1,5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1,5A_2 - 8A_2}{56 - 2,25}$

$M_3 = \frac{1,5A_2 - 7A_3}{53,75}$

$A_2 = \frac{S_{12}}{2} + \frac{S_{3,2}}{1,5}$

$A_2 = \frac{33,3}{2} - \frac{6,1}{1,5} = 16,6 - 4 = 12,6$

$A_3 = \frac{S_{2,3}}{1,5} + \frac{S_{4,3}}{2,5}$

$A_3 = -6,75 + 30 = 23,25$

$M_2 = \frac{35 - 101}{53,75} = -\frac{66}{53,75} = -1,19$

$M_3 = \frac{18,9 - 525}{53,75} = -\frac{505}{53,75} = -9,4$

Scanned with OKEN Scanner

$$q_1 = -q_2 - q_3$$

$$C_{12} = \frac{\varepsilon A}{\kappa g_{12}} \qquad C_{23} = \frac{\varepsilon A}{\kappa g_{23}}$$

$$C_{31} = 0$$

$$q_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) = q_{12} V_1 - C_{12} V_2 - C_{13} V_3$$

$$q_2 = C_{12}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3) = -q_{12} V_1 + (C_{12} + C_{23}) V_2 - C_{23} V_3$$

$$q_3 = C_{13}(V_3 - V_1) + C_{23}(V_3 - V_2) = -C_{13} V_1 - C_{23} V_2 + (C_{13} + C_{23}) V_3$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & -C_{12} & -C_{13} \\ -C_{12} & q_{22} & -C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & \zeta_{23} \\ \zeta_{13} & \zeta_{23} & \zeta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

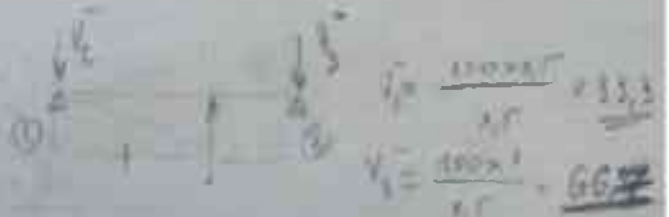
$$\zeta_{11} = \frac{1}{q_{11}} \qquad \zeta_{12} = \frac{q_{12}}{q_{11}} \qquad \zeta_{13} = \frac{q_{13}}{q_{11}}$$

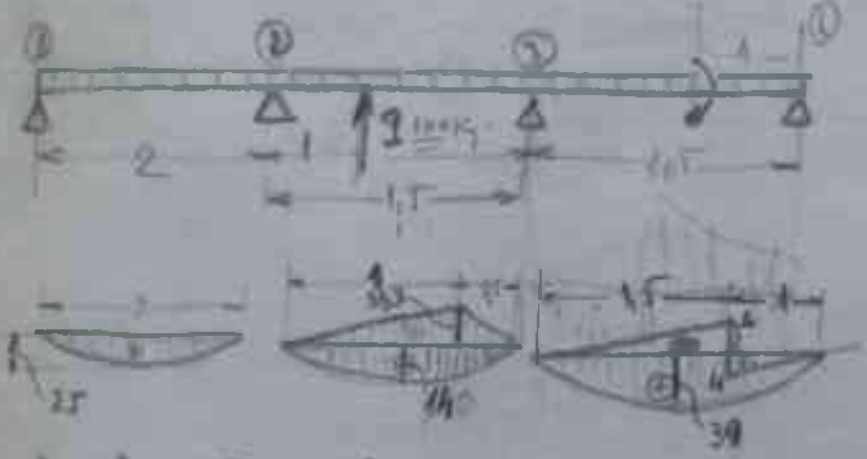
$$\zeta_{22} = \frac{1}{q_{22}} - \frac{q_{12}^2}{q_{11} q_{22}} \qquad \zeta_{23} = \frac{q_{23}}{q_{22}} - \frac{q_{12} q_{13}}{q_{11} q_{22}}$$

$$\zeta_{33} = \frac{1}{q_{33}} - \frac{q_{13}^2}{q_{11} q_{33}} - \frac{q_{23}^2}{q_{22} q_{33}} + \frac{2 q_{12} q_{13} q_{23}}{q_{11} q_{22} q_{33}}$$

V_1 49,29
53,64
29,79
65,77

$\begin{cases} M_2 = -3,42 \\ M_3 = -1,84 \end{cases}$





$p = 50\ Kg/m$

$P_0 = 100\ Kg$

$M = 10\ Kg\,m$

$\frac{50 \cdot 6,5^2}{8}$

$M_2 \cdot 3,5 + M_3 \cdot 1,5 = -A_2$

$M_2 \cdot 1,5 + 2M_3 \cdot 4 = -A_3$

$7M_2 + 1,5M_3 = -A_2$

$11M_2 + 8M_3 = -A_3$

$M_2 = \frac{\begin{vmatrix} -A_2 & 1,5 \\ -A_3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 1,5 \\ 1,5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8A_2 - 1,5A_3}{56 - 2,25}$

$M_3 = \frac{1,5A_2 - 7A_3}{53,75}$

$S_{1,2} = \frac{2}{3} \cdot 2 \times 25 \times 1 = 33,3$

$S_{2,1} = \frac{2}{3} \cdot 1,5 \times 14 \times 0,75 - \frac{1}{2} 33,3 \left(\frac{1}{3} + 1,5 + 0,5 \times \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right)$

$S_{22} = 10,5 - 16,6 = -6,1$

$S_{2,3} = 10,5 - \frac{1}{2} 33,3 \left(\frac{2}{3} + 0,5 \times \left(1 + \frac{0,5}{3} \right) \right)$

$S_{23} = 10,5 - 20,6 = -10,1$

$S_{4,3} = \frac{1}{3} \cdot 1,5 \times 39 \times 1,25 - 9 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1,5}{3} \right) + 2 \times \frac{2}{3}$

$= 81 - 6,75 + 0,75 = 75$

$A_2 = \frac{S_{12}}{2} + \frac{S_{22}}{1,5}$

$A_2 = \frac{33,3}{2} - \frac{6,1}{1,5} = 16,6 - 4 = 12,6$

$A_3 = \frac{S_{43}}{1,5} + \frac{S_{32}}{2,5}$

$A_3 = -6,75 + 30 = 23,25$

$M_2 = \frac{35 - 101}{53,75} = -\frac{66}{53,75} = -1,19$

$M_3 = \frac{18,9 - 525}{53,75} = -\frac{505}{53,75} = -9,4$

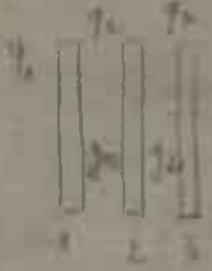
Scanned with OKEN Scanner

$D_{n+1} + D_1 = \kappa \rho_0$

$E_1 = \frac{\kappa}{\varepsilon} \rho_0 \qquad \rho_0 = \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial V}{\partial n_m} \qquad q_i = \frac{\varepsilon}{\kappa} \int_{\Sigma_i} \frac{\partial V}{\partial n_m} dA = \sum_1^m V_k \int_{\Sigma_i} \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial V_k}{\partial n_m} dA$

γ_{ik}

$q_i = \gamma_{i1} V_1 + \gamma_{i2} V_2 + \gamma_{i3} V_3 + \dots + \gamma_{im} V_m$



$q_2 = -q_1 - q_3$

$C_{12} = \frac{\varepsilon A}{\kappa g_{12}} \qquad C_{23} = \frac{\varepsilon A}{\kappa g_{23}}$

$C_{31} = 0$

$q_1 = C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) = C_{12} V_1 - C_{12} V_2 -$

$q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3) = -C_{12} V_1 + (C_{12} + C_{23}) V_2 - C_{23} V$

$q_3 = C_{31}(V_3 - V_1) + C_{32}(V_3 - V_2) = -C_{31} V_1 - C_{32} V_2 + C_{32} V_3$

$\gamma_{11} = V_1 \qquad \gamma_{12} = -C_{12} \qquad \gamma_{13} = 0$

$\gamma_{12} = -C_{12} \qquad \gamma_{22} = C_{12} + C_{23} \qquad \gamma_{23} = -C_{23} \qquad \gamma_{33} = C_{32}$

$\gamma_{32} = -C_{32}$

Scanned with OKEN Scanner

ACADEMIA DE STIINTE A U.R.S.S.

Expunerea Dr.F.T.Karakuk în fața membrilor Asociației Oncologilor și Bacteriologilor (Kierobiologilor)

Informații generale

Din păcate, se observă în ultimii ani că mulți oameni rămîn nehotărîți față de un tratament simplu și concret, care li se oferă, în ciuda faptului că eficiența lui - științifică dovedită - este excepțională și dă rezultate miraculoase în îmbunătățirea sănătății bolnavului.

Aceasta se datorește faptului, că prin vindecarea bolii sale, omul pune mari speranțe în medicamente, care în unele cazuri aduc mult rău decît bine sănătății bolnavului. Consumarea excesivă a medicamentelor este caracterizată omului contemporan, care se străduiește de multe ori cu ajutorul medicamentelor, să rezolve o careeare problemă a sănătății sale, folosind medicamente, care este posibil să-l vindece de boala de care suferă, dar care crează o nouă boală neprevăzută.

Gîndindu-mă astfel, m-am hotărît să caut metoda simplă de tratament, fără administrarea medicamentelor, ca bolnavul să nu fie expus la pericolul să capete o nouă boală, de care să se vindece apoi cu ajutorul altor proceduri medicamentoase.

După mulți ani de cercetări și studii am reușit să vindec diferite boli cu ajutorul unei metode foarte eficiente.

Subliniez că această metodă vindecă eficient toate țesuturile și organele corpului omenesc, reușind să elimine substanțele organice și anorganice dăunătoare în el, așa cum sînt microbi, săruri, etc.

Timpul pentru aplicarea acestei metode este atît cît este necesar pentru vindecarea definitivă a bolnavului. Așadar fiecare cointeresat poate să stabilească singur, de cîte ori va repeta procedura propusă de mine, făcînd comparație între starea de sănătate, înainte și în timpul tratamentului.

Trebuie să subliniez că este posibil, ca în timpul tratamentului să apară accentuarea bolii în forma crizelor, în special la persoane ce suferă de boli cronice. Bolnavul poate să simtă o înrăutățire a bolii.

Aceasta din punct de vedere științific, înseamnă că a început dizolvarea focarelor bolii în organism. La multe persoane organismul poate reacționa sub formă de temperatură, dar și acest semnal constituie dovada că, organismul bolnavului a început să acționeze energic, să se apere față de diferite focare create de boala concretă.

In cazul în care apar accentuări a bolii, este absolut necesară accentuarea procedurii propusă prin metoda mea simplă, care în ultimă instanță va ajuta bolnavul să se vindece și de alte boli, afară de cea concretă, pentru vindecarea căreia a fost urmată metoda mea. Aceasta pentru faptul că, cu ajutorul ei se tratează întregul organism al omului: dureri de cap, bronșite, dureri de măsele, tromboflebite, boli cronice ale sîngelui, eczeme, epilepsie, boli ginecologice, tumori în general, artrite, etc.

/

Scanned with OKEN Scanner

Este posibil ca unele boli să se vindece foarte repede, în 2-3 zile, iar în boli cronice poate fi necesar chiar un an.

Eu personal, cînd m-am îmbolnăvit de dureroşul lombago, am aplicat metoda aceasta numai 3 zile şi m-am vindecat.

Soţia mea, de asemenea s-a vindecat de o boală de sînge de care a suferit 15 ani.

Subliniez că folosirea acestei metode este absolut nepericuloasă şi foarte eficientă. Cu ajutorul ei se vindecă o întreagă gamă de boli.

Modul de tratament

Folosim ulei (preferabil ulei de floarea soarelui)

Luăm o linguriţă de ulei în gură fără să-l înghiţim, îl sugem, aşa cum procedăm cu o bomboană 15-20 minute. Procedura trebuie făcută calm, fără încordări şi nervă. Sugem uleiul în gură, înainte-înapoi, între dinţi fără să înghiţim nici o picătură din el. Procedura este bine să se facă dimineaţa pe stomacul gol. Dacă vrem să accelerăm tratamentul, trebuie să repetăm metoda de 2-3 ori pe zi însă întotdeauna pe stomacul gol. La început uleiul este gras în gură, după 12-20 min. de sugere se face apos şi alb ca laptele. După sugere (procedură) trebuie scuipat uleiul apos, direct în chiuvetă sau la WC, pentru că este plin de microbi şi foarte periculos în transmiterea diferitelor boli. Trebuie să spălăm foarte bine gura cu apă, pentru ca cea mai mică rămăşiţă din acest ulei constituie un focar de molipsire.

Dacă uleiul scuipat nu este alb ca laptele, ci galben aceasta înseamnă că procedura de sugere nu s-a făcut corect şi în timpul necesar. De aceea trebuie să repetăm prpoedura, făcînd-o corect şi în timp necesar. Două din primele rezultate vizibile ale acestei proceduri sînt: întărirea arterelor coronariene şi albirea dinţilor.

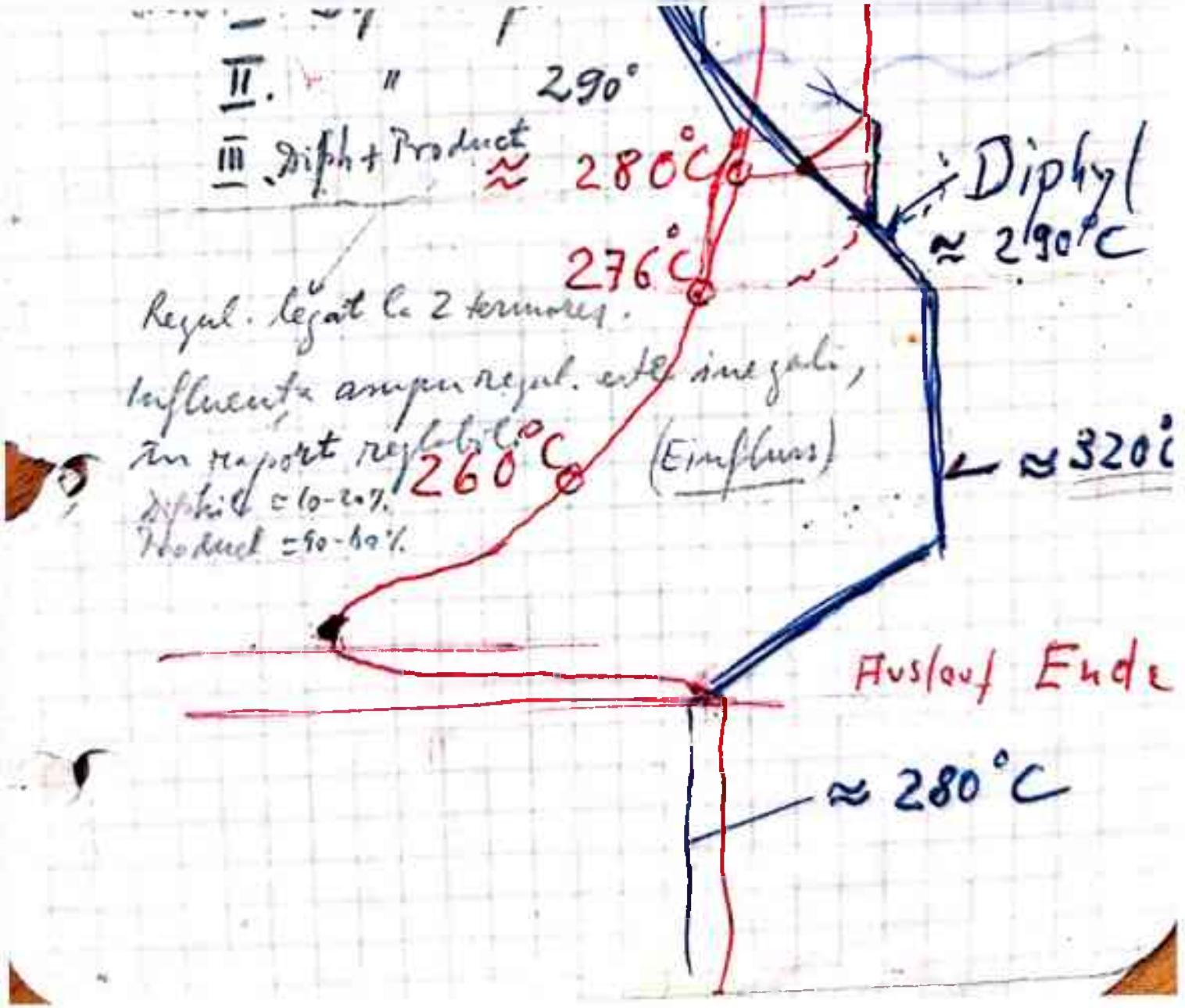
De asemeni bolnavul simte o înviorare generală a corpului şi îmbunătăţirea generală a întregului organism.

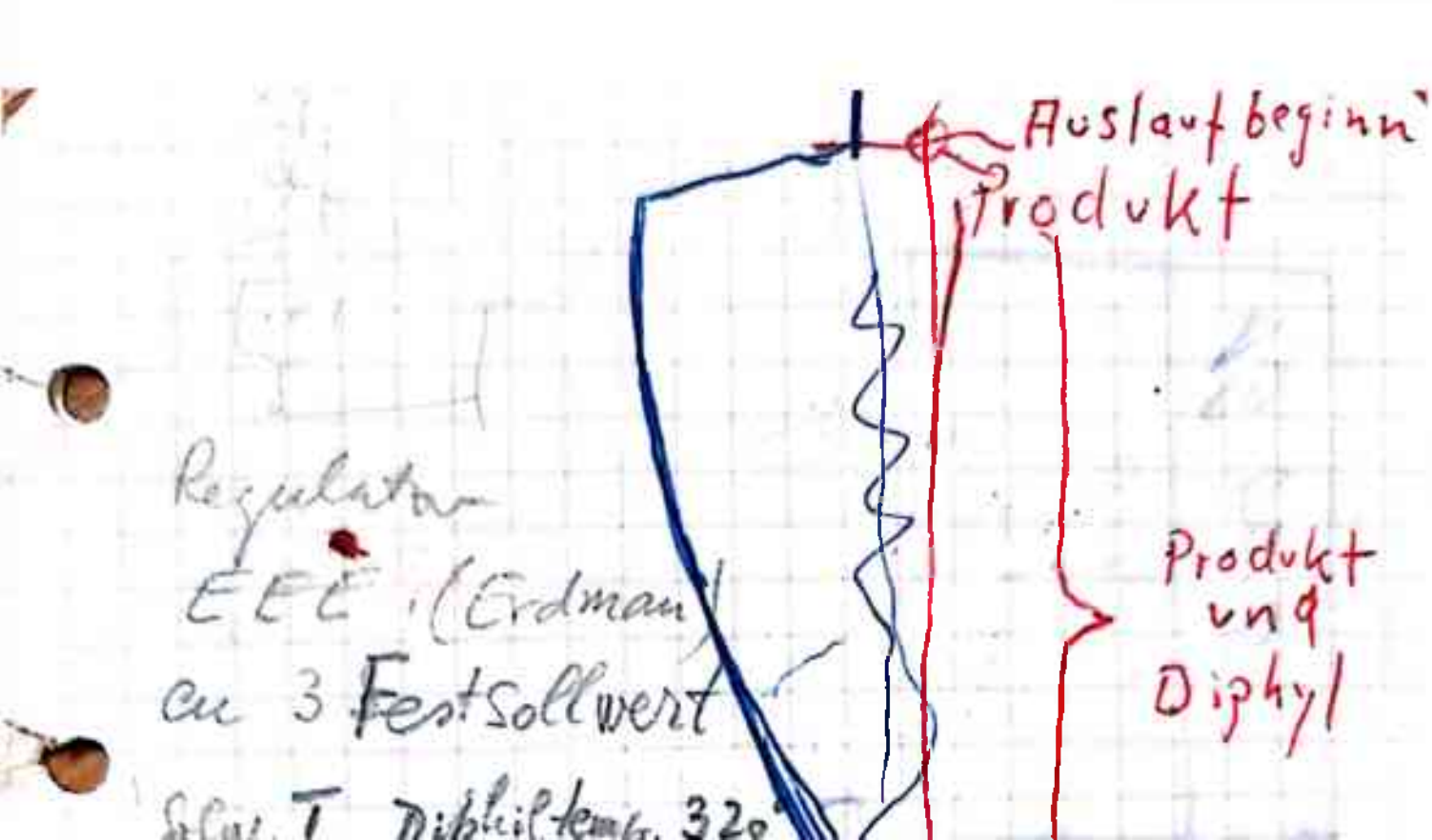
Cititorul acestei expuneri poate să tragă concluzie, că metoda e absolut nepericuloasă. Eu nu propun un nou medicament, ci un tratament cu un aliment, cel mai pur - uleiul, care din antichitate şi pînă acum constituie principalul aliment şi e cel mai sănătos aliment al omului.

Dar acest pur şi sănătos aliment, bolnavul nu-l înghite, ci îl foloseşte ca mijloc pentru dezvoltarea tuturor focarelor care constituie începutul ficărei boli.

ooo OOO ooo

Scanned with OKEN Scanner


II. " 290°
III. Diph + Product ≈ 280°C
Diphyl
≈ 290°C
276°C
Regul. legat la 2 termoel.
influenta asupra regul. este inegala,
in raport regl. la 260°C (Einfluss)
Diphyl = 10-20%
Product = 90-80%
≈ 320°C
Auslauf Ende
≈ 280°C



Scanned with OKEN Scanner

COMBINATUL DE FIBRE SINTETICE IAȘI
Laborator de biochimie

Buletin de analiză nr. 3

din data de 7.11.1984

Bolnavul Vlad

Secția (serviciul)

Produsul trimis Ser

Examenul cerut

Rezultatul : Electroforeza - P.T - 78 g/oo

Alb. 40,4

α_1 - 3,8 R-Gross - 1,96 ml -

α_2 - 7,0 R-Timol - 3 u.M.L

β - 10,2

γ - 16,6

Transaminaze - TGP - 14,4 u.F

TGO - 14,1 u.F

Șef laborator,
Chim. E. Itacu

Scanned with OKEN Scanner

COMBINATUL DE FIBRE SINTETICE IAȘI
Laborator de biochimie

Buletin de analiză nr. 3

din data de 7.11.1984

Bolnavul Vlad

Secția (serviciul)

Produsul trimis ser

Examenul cerut

Rezultatul

Hematr - 40 %
Hemoglobină - 17,6 g %
Leucocite - 4700 / mmc
Calciu total - 9,3 mg %
Colesterol - 2,5 g %o
Glicemie - 1,3 g %o
Bilirubina totală - 12,0 mg %o
Uree - 0,39 g %o

Șef laborator,
Chim. E. Racu

Scanned with OKEN Scanner

CFJ.

CABINETUL DE ACUPUNCTURĂ

Programare

NUMELE VLAD. PRENUMELE NICOLAE VIRSTA 45

DIAGNOSTIC Sin etnici

LUNA	DATA										OBS.
Nov.	19	22	26	29	—						
Dec	"	"	"								

MEDIC,

Dr. IANCU ŞTEFAN
medic specialist

...ul cd. 8793

Scanned with OKEN Scanner

FISA DE ATESTARE [illegible] CALITATII EXECUTIEI

Se[illegible] 42924170 [illegible]ru. AGS _____

Da[illegible] [illegible]ru final _____

Nr. crt.	Operatia	Executant	Nr. crt.	Operatia	Executant
1	Verificare mecanica placă baza		5	Verificare şi reglaj A.G.S.	
2	Punere în funcţiune şi reglaj placă baza		6	C T C A.G.S.	
3	Verificare mecanica A.G.S.		7	Incasetare	
4	Punere în funcţiune şi reglaj A.G.S.		8	Punere in functiune, reglaj şi verificare reglaje A.G.Tv.	

P 37471-000

Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt	Operatia	Executant	Nr. crt.	Operatia	Executant
9	Reglaj geometrie		14	Verificare dupa antrenament tehnologic	
10	Vibrare A. G .Tv.		15	Finisare si aspect	
11	C.T.C. curbe și tensiuni		16	Depanare mecanica și electrică	
12	Montare placa spate		17	Verificare finală nișe	
13	C.T.C. antrenament tehnologic		18	C.T.C. Electrosecuritate și aspect	

P37471-000

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CARACTERISTICI TEHNICE

220 V ∽ , 50 Hz, 110 W.

Turație 18 000 rot./min.

Funcționează 1 min.—25 min. pauză

Capacitate șarjă 50 gr./min.

Rișnește cafea boabe prăjită.

Funcționează numai cînd capacul este montat, iar butonul înglobat acestuia este apăsat.

RIȘNIȚA

NU SE FOLOSESTE :

— în medii cu umiditate ridicată, inflamabile, corozive, explozive ;

— de către copii ;

- **Nu se spală — se șterge atît aparatul cît și cuva.**
- **Nu improvizați butonul de pornire — pericol de accidentare.**
- **Nu desigilați aparatul — își pierde garanția.**
- **Odată pe an se recomandă prezentarea aparatului la un atelier de specialitate pentru ungerea lagărelor.**
- **La primele semne de funcționare anormală se va prezenta la atelierul de specialitate.**

CERTIFICAT DE CALITATE
ȘI GARANȚIE

GARANTAT
12 LUNI
de la data vînzării
folosit conform instrucțiunilor

Tip .....

Seria .....

Data fabricației .....

11 IX. 1984

Vîndut prin Magazinul 215

Localitatea Gor jud. Gor

Factura nr. 1 din 5-XII. 84

Unitatea depanatoare în termen de garanție :

Gor Voluntari 194

L. S. Magazin

S-au făcut probe de funcționare, mi-s-a arătat modul de utilizare.

Vînzător.

Cumpărător.

Prezentul certificat constituie atestarea legală a îndeplinirii condițiilor de calitate, de către produsul livrat, în conformitate cu Legea 7/1977.

Director,

Șef C.T.C.

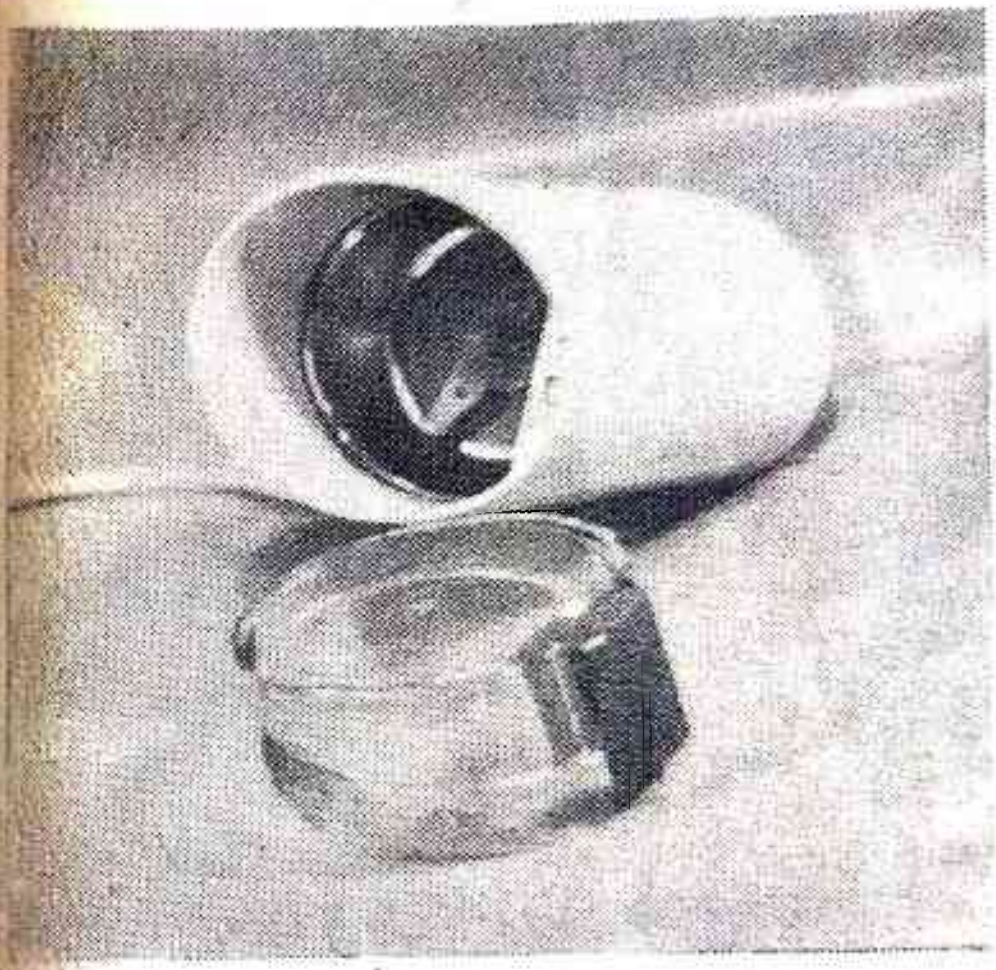
C.T.C. N 91

Scanned with OKEN Scanner

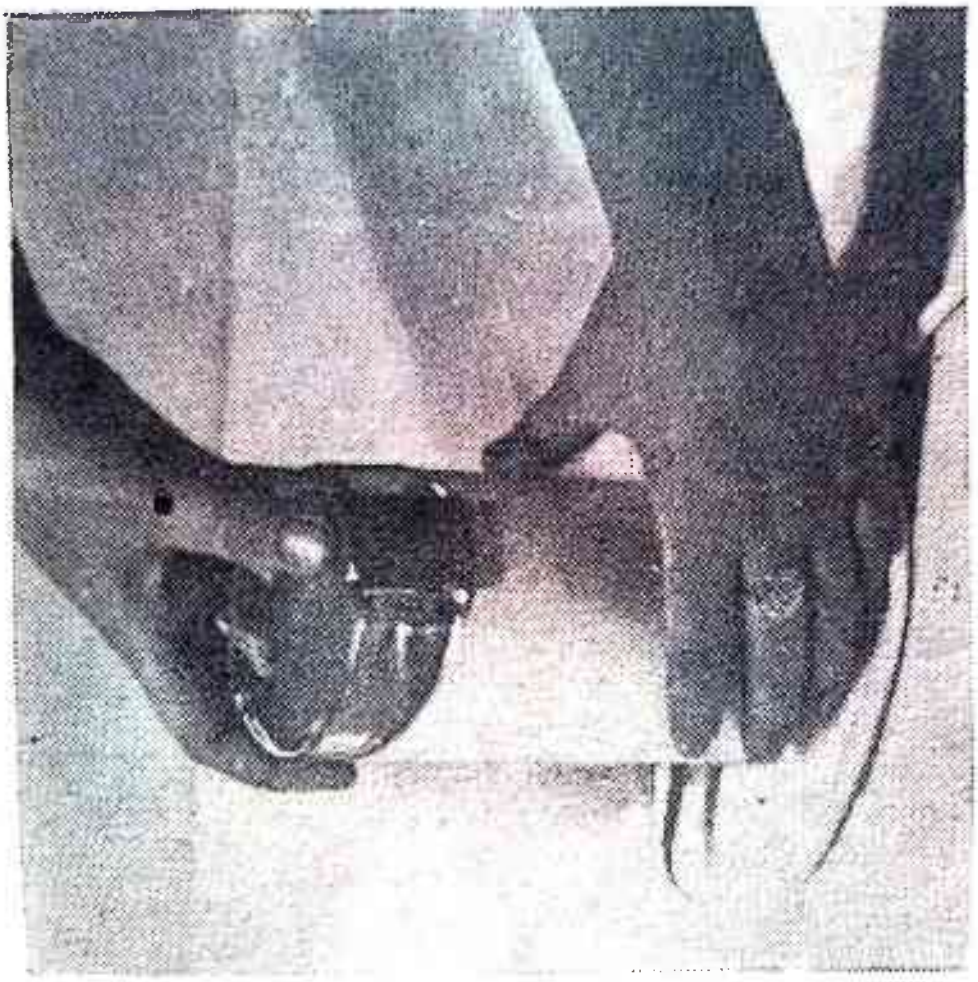
Scanned with OKEN Scanner

I.P.E.E. Electroargeș
Sos. Albești 12-14 tel. 11700
Curtea de Argeș-Romania

rc 2



rîşniţa electrică



PORNIREA APARATULUI

REPARAŢII ÎN TERMEN DE GARANŢIE

Comanda	Primit pentru reparatii Data	Ştampila	Va fi reparat Data	Reparaţii, piese înlocuite	Data ridicării produsului	Produsul funcţ.normal Ştampila

Scanned with OKEN Scanner